Лекция
Криптосистемы с открытым ключем

- Лектор: профессор Яковлев В.А.

Хронология развития систем ЭЦП

- **1976 г. – открытие М. Хэлменом и У. Диффи асимметричных криптографических систем;**
- **1978 г. – Р. Райвест, А. Шамир, Л. Адельман – предложили первую систему ЭЦП, основанную на задаче факторизации большого числа;**
- **1985 г. – Эль Гамаль предложил систему ЭЦП, основанную на задаче логарифмирования в поле чисел из *p* элементов;**
- **1991 г.- Международный стандарт ЭЦП ISO/IEC 9796 (вариант РША);**
- **1994 г. – Стандарт США FIPS 186 (вариант подписи Эль Гамаля);**
- **1994 г. – ГОСТ Р 34.10-95 (вариант подписи Эль Гамаля);**
- **2000 г. – Стандарт США FIPS 186 – 2;**
- **2001 г. – ГОСТ Р 34.10-01 (ЭЦП на основе математического аппарата эллиптических кривых).**

Односторонняя функция

Пусть X и Y дискретные множества. Функция y=f(x), где $x \in X$, $y \in Y$ называется односторонней (однонаправленной),
если y легко вычисляется по любому x, а обратная функция $x=f^{-1}(y)$ является трудно вычислимой.

Пример ОФ.
$y=a^x(\mathrm{mod}p)$, где p- простое число, x - целое число,
a -примитивный элемент поля Галуа GF(p). То есть a такое число, что все его степени $a^i(\mathrm{mod}p)$, i= 1,2…p-1, принимают все значения в множестве чисел от 1 до p-1.

Пример односторонней функции функции

Пусть p=7, a=3.

Проверим, что a примитивный элемент -

$a^1 = 3 (mod 7)$, $a^2 = 2 (mod 7)$, $a^3 = 6 (mod 7)$, $a^4 = 4 (mod 7)$, $a^5 = 5 (mod 7)$, $a^6 = 1 (mod 7)$.

Если x=4, то $y = 34 (mod 7) = 4$.

Сложность нахождения функции возведения в степень $N_в = O(2 \log p)$.

Обратная функция $x = \log_a y$ (функция дискретного логарифмирования) трудно вычислима.

Если p - сильно простое число, то $N_{лог} = O((p)^{1/2})$.

$$p = 2^{1000}$$

Оценки сложности вычислений прямой и обратной функций

- Пусть $p = 2^{1000}$ 1000 разрядное двоичное число, тогда для решения задачи возведения в степень числа x по modp потребуется примерно 2000 = $2*10^3$ операций , а для нахождения логарифма такого числа потребуется примерно

$p^{1/2}=2^{500}\sim10^{170}$ операций, что вычислительно невозможно осуществить ни за какое реально обозримое время.

Односторонняя функция с потайным ходом

Это не просто ОФ, обращение которой невозможно, она содержит потайной ход (trapdoor), который позволяет вычислять обратную функцию, если известен секретный параметр - ключ.

$y=f(x,s)$ – легковычислима;
$x=f^{-1}(y)$ – трудновычислима;
$x= f^{-1}(y,s)$- легковычислима.

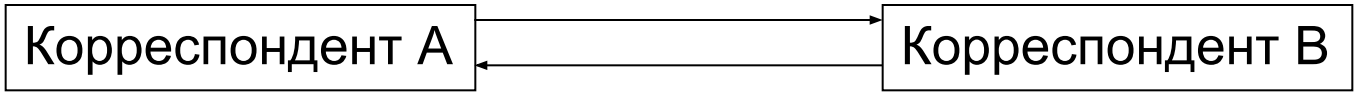
Общий принцип построения криптосистемы с открытым ключем

Требования к системам с открытым ключем

1. Вычисление пары ключей PK, SK должно быть просто решаемой задачей;
2. При известном ключе шифрования PK вычисление криптограммы E=f(M,PK) должно быть простым;
3. При известном ключе расшифрования SK восстанавливает сообщение M=g(E,SK) должно быть простым;
4. При известном ключе шифрования PK вычисление ключа расшифрования SK должно быть сложным;
5. При известном ключе шифрования PK, но неизвестном ключе расшифрования SK вычисление M по известной криптограмме E должно быть весьма сложным.

Система шифрования Эль-Гамаля

Пусть p -простое число; a - примитивный элемент.



Генерирование пары открытых ключей

A - генерирует число x_A,
вычисляет открытый ключ
$y_A=a^x \pmod p$. (SK= x_A , PK= y_A).

y_A передается корр. B.

Шифрование сообщения

Пусть корр. B хочет послать корр.A сообщение $m<p$.
Генерирует случайное число $k<p$.
Формирует криптограмму $E=(c_1 c_2)$
$c_1=a^k \pmod p$, $c_2=m \cdot (y_A^{-1})^k$.
Отправляет E корр. A.

Система шифрования Эль-Гамаля

Расшифрование сообщения.

Корр.А вычисляет $c_1^x \pmod p = a^{kx} \pmod p$,

Затем находит

$c_2 a^{kx} \pmod p = m \cdot (y_A^{-1})^k a^{kx} \pmod p = m \cdot a^{-xk} a^{kx} \pmod p = m$

Замечание.

Как найти y_A^{-1} ?

$y_A^{p-2} \pmod p = y_A^{p-1} \pmod p \cdot y_A^{-1} \pmod p = y_A^{-1} \pmod p$

Стойкость системы Эль-Гамаля

1. Раскрытие секретного ключа эквивалентно решению задачи дискретного логарифмирования.
2. Нахождение m без знания ключа возможно, если случайное число k используется дважды и в одном случае нарушитель знает открытый текст

$c_2 = m \cdot (y_A^{-1})^k \pmod p$, $c'_2 = m' \cdot (y_A^{-1})^k \pmod p$

Зная c_2, c'_2 и m несложно найти m' $m' = c'_2 \cdot m \cdot c^{-1}_2 \pmod p$

k должно меняться случайным образом при шифровании нового сообщения.

Пример системы Эль-Гамаля

p=11, a=4, a- примитивный элемент $GF(2^p)$

Пусть x=3 – закрытый ключ

$y=4^3(mod11)=64(mod11)=9$ открытый ключ

y → y

Шифрование сообщения m=6

Генерирование СЧ k=4

Вычисление:

$C_1=a^k(modp)=4^4(mod11)=256(mod11)=3$

$y^{-1}=y^{p-2}(modp)= 9^9(mod11)=9^29^29^29^29(mod11)=$

$4*4*4*4*9(mod11)=5*5*9(mod11)=5$

$C_2=my^{-1k}(modp)=6*5^4(mod11)=6*3*3(mod11)=10$

C_1,C_2 ← C_1,C_2

Расшифрование

$C_1^x (modp)=3^3(mod11)=5$

$C_2*C_1^x (modp)=10*5 (mod11)=50(mod11)=\mathbf{6}$

Система РША (1978г.)

Генерирование ключей.

Случайно выбираются два простых числа p и q. Находится модуль N=pq. Находится функция Эйлера $\phi(N)= (p-1)(q-1)$. Выбираем число e такое, что НОД(e, $\phi(N)$)=1.

Находим d, как обратный элемент к e, $de=1(\mathrm{mod}\ \phi(N))$.

Объявляем d=SK, (e,N)=PK. PK сообщается всем корреспондентам.

Шифрование.

Корр. А передает зашифрованное сообщение корр.В (использует открытый ключ корр. В)

$E=m^e(\mathrm{mod}N)$

Расшифрование.

Корр. В расшифровывает принятую криптограмму от корр.А,используя свой секретный ключ.

$m=E^d(\mathrm{mod}N)$

Доказательство обратимости операции дешифрования операции шифрования

Покажем, что $E^d(\mathrm{mod}N) = (m^e)^d(\mathrm{mod}N) = m$

По т. Эйлера $m^{\phi(N)} \equiv 1(\mathrm{mod}N)$ для любого m взаимно простого с N.

Умножая обе части сравнения на m, получаем сравнение

$m^{\phi(N)+1} \equiv m(\mathrm{mod}N)$ справедливое уже для любого целого m.

Перепишем соотношение $ed \equiv 1(\mathrm{mod}\phi(N))$ в виде $ed = 1 + k\phi(N)$

для некоторого целого k.

Тогда $E^d = (m^e)^d = m^{1+k\phi(N)} = m^{1+\phi(N)}\, m^{(k-1)\phi(N)} =$

$= m \cdot m^{(k-1)\phi(N)} = m^{1+(k-1)\phi(N)} = m^{1+\phi(N)}\, m^{(k-2)\phi(N)} =$

$\ldots = m^{1+\phi(N)} = m$

Что и требовалось доказать.

Пример системы РША

p=3, q=11 N=33 $\varphi(N) = 20$

Генерирование ключей
e=**7**, НОД(7,20)=1
$d=7^{-1}(\mathrm{mod}20) = \mathbf{3}$

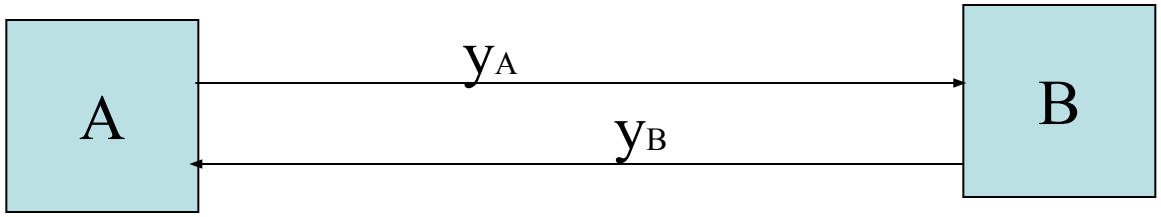
Шифрование
m=**6** $E=m^e(\mathrm{mod}N)= 6^7(\mathrm{mod}33)=6^2\,6^2\,6^2\,6^1(\mathrm{mod}33)=$
$=3*3*3*3*2=30$

Расшифрование
$E^d(\mathrm{mod}N)=30^3(\mathrm{mod}33)=900*30(\mathrm{mod}33)=9*30(\mathrm{mod}33)=\mathbf{6}$

Оценки стойкости системы РША

1. Нахождение чисел p и q по известному модулю N. Задача факторизации имеет сложность $O((N)^{1/2})$.
2. Будем последовательно возводить полученную криптограмму в степень равную значению открытого ключа т.е. $(((((E^e)^e).....)^e$. Если при некотором шаге окажется, что $E_i=E$, то это означает, что $E_{i-1}=m$. Доказывается, что данная атака требует непереборно большого числа шагов.
3. Поиск слабых ключей, для которых $m^{e'} = m$, т.е. возведение в степень не меняет сообщения. Эта атака имеет малую вероятность успеха, если p и q выбираются среди сильно простых чисел. Сильно простое число, это число, для которого p-1 не содержит в разложении маленьких сомножителей, и имеет в разложении хотя бы один большой сомножитель.
4.

Алгоритм формирования ключей на основе однонаправленных функций (алгоритм Диффи-Хеллмана)



А генерирует большое случайное число x_A, $1 \le x_A \le p-1$, p - простое число. Число x_A сохраняется в секрете. Вычисляет число $y_A = \alpha^{x_A} (\mathrm{mod}\, p)$, где α - примитивный элемент поля $GF(p)$, которое передает корреспонденту В.

В генерирует x_B, аналогичным образом вычисляет число y_B, которое передает корреспонденту А.

А, приняв от В y_B, вычисляет

$$K_A = (y_B)^{x_A} \bmod p = (\alpha^{x_B})^{x_A} \bmod p = \alpha^{x_B x_A} \bmod p .$$

В, приняв y_A, вычисляет

$$K_B = (y_A)^{x_B} \bmod p = (\alpha^{x_A})^{x_B} \bmod p = \alpha^{x_A x_B} \bmod p .$$

$$K_A = K_B = K .$$

Ключ K может быть использован в симметричной системе шифрования.

Гибридные системы шифрования