КВАНТОВЫЕ ИГРЫ

и теоретико-игровые основания прагматики

В.Л.Васюков
профессор
кафедры онтологии, логики
и теории познания
НИУ ВШЭ
vasyukov4@gmail.com

Кубиты и все такое…

$$\psi = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi \;= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$|\,\alpha\,|^2 + |\,\beta\,|^2 = 1$$

кубит

***n*-кубитный регистр**

$$|\psi\rangle = \sum\nolimits_{\propto\in[0,1]^n} \alpha_x\,|x\rangle$$
$$\sum\nolimits_{\propto\in[0,1]^n} \;|\alpha|^2 = 1$$

$$|\psi_1\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\alpha_2\\\beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2\\\alpha_1\beta_2\\\beta_1\alpha_2\\\beta_1\beta_2\end{bmatrix}$$

Переключатель знака состояния

$$\mathrm{Z} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

NOT

регистры Паули

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

Преобразование Адамара

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Алгоритм квантового компьютера

- Приготовь начальное состояние (обычно берется $|00\ldots0\rangle$)
- Примени последовательность унитарных преобразований
- Проделай измерение для считывания состояния

Основы квантовых игры

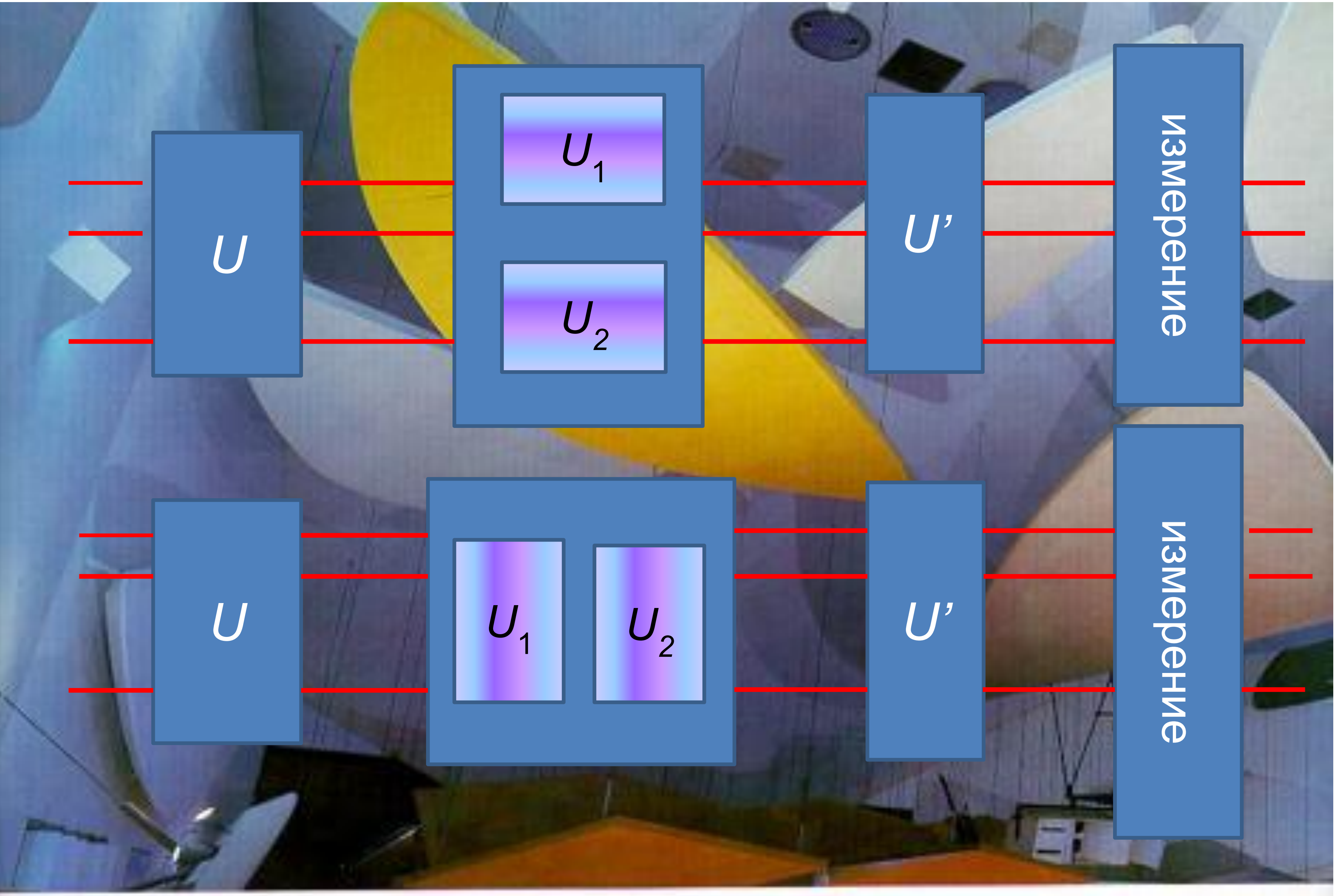
Классические игры

- $G(n, S, u)$
- n – количество игроков
- $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, *где* S_i, $i = 1,\ldots,n$ – *пространства стратегий*
- $u = u_1 \times \ldots \times u_n$, *где* $u_i(s_1,\ldots,s_n)$, $i = 1,\ldots,n$ – функции выигрыша, $s_n \in S_i$

Квантовые игры

- $G(n, \Theta(\mathbb{H}), \rho, S, u)$
- n – количество игроков
- $\mathbb{H}$ - двумерное гильбертово пространство
- $\Theta(\mathbb{H})$ – пространство состояний игры
- $\rho \in \Theta(\mathbb{H})$ – начальное состояние
- $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ – пространство стратегий
- $u = u_1 \times \ldots \times u_n$,- функция полезности, где u_i: $\Theta(\mathbb{H}) \to \mathfrak{R}$ для игрока i

Статические и динамические квантовые игры



Переворачивание монеты

P против Q

Классический случай

Ходы:

- судья кладет монету орлом вверх
- Q либо переворачивает ее (F), либо нет (N)
- затем P либо переворачивает монету (F) либо нет (N)
- и наконец Q делает финальный ход либо переворачивая монету (F) либо нет (N)

Если в конце монета лежит орлом вверх, то выигрывает P с выигрышем +1, а проигрыш Q составляет -1. В противном случае Q получает +1, а P получает -1.

Матрица выигрышей

Q	NN	NF	FN	FF
P:N	(−1, +1)	(+1, −1)	(+1, −1)	(−1, +1)
P:F	(+1, −1)	(−1, +1)	(−1, +1)	(+1,

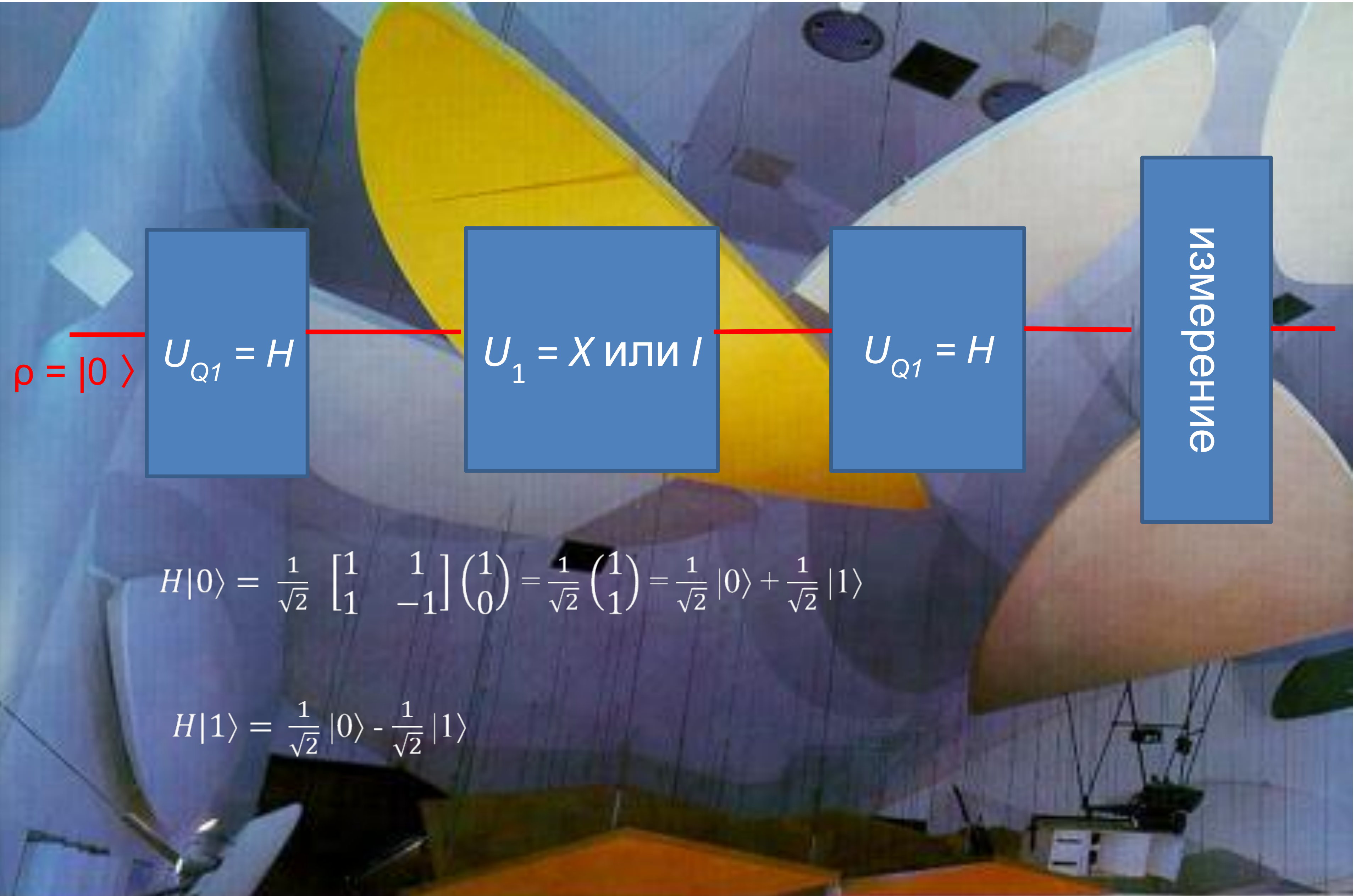
Квантовый случай

- Q применяет квантовую стратегию
- P обречен на классическую стратегию
- $|0\rangle$ - орел
- $|1\rangle$ - решка
- состояние игры представляется кубитом $\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- начальное состояние игры $\rho = |0\rangle$
- первый ход – тождественное преобразование *U*
- переворачивание F и непереворачивание N представляются преобразованиями *X* и *I* соответственно
- P может сыграть либо *X*, либо *I*, а Q может выбрать любое унитарное преобразование (используется преобразование Адамара)
- игра характеризуется как

$$G(n = 2, \Theta(\mathbb{H}) = \mathbb{H}, \rho = |0\rangle, S_1 \times S_2, u)$$

- $S_1 = \{X, I\}$, S_2 есть множество всех унитарных матриц
- *U* совпадает с классическим случаем

PQ – переворачивание монеты



$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Логика квантовых вычислений QCL

Регистры Тоффоли

$T^{(1,1,1)}: \otimes^3\mathbb{H} \longrightarrow \otimes^3\mathbb{H}$

$T^{(1,1,1)}(|x\rangle\otimes|y\rangle\otimes|z\rangle) = |x\rangle\otimes|y\rangle\otimes|\min(x,y)\otimes z\rangle$

$Q^{(1,1,1)}: \otimes^3\mathbb{H} \longrightarrow \otimes^3\mathbb{H}$

$Q^{(1,1,1)}(|x\rangle\otimes|y\rangle\otimes|z\rangle) = |x\rangle\otimes|y\rangle\otimes|\max(x,y)\otimes z\rangle$

Аксиоматизируема ли QCL?

AND$(|\phi\rangle,|\psi\rangle) = T^{(1,1,1)}(|\phi\rangle\otimes|\psi\rangle\otimes|0\rangle)$

NOT$(|\phi\rangle) = T^{(1,1,1)}(|\phi\rangle\otimes|1\rangle\otimes|1\rangle)$

OR$(|\phi\rangle,|\psi\rangle) = Q^{(1,1,1)}(|\phi\rangle\otimes|\psi\rangle\otimes|0\rangle)$

QUB: *Form*$^L \rightarrow \bigcup_n \otimes^3\mathbb{H}$

$|\neg\beta|$ = NOT$(|\beta\rangle) \in \otimes^n\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$

$|\beta\wedge\gamma|$ = AND$(|\beta\rangle,|\gamma\rangle) \in \otimes^n\mathbb{H}\otimes(\otimes^m\mathbb{H})\otimes\mathbb{H}$

$|\beta\vee\gamma|$ = OR$(|\beta\rangle,|\gamma\rangle) \in \otimes^n\mathbb{H}\otimes(\otimes^m\mathbb{H})\otimes\mathbb{H}$

Логика Дишканта LQ

- Г.Дишкант [1978] предложил включить аксиомы Макки в исчисление Лукасевича $Ł_{\aleph_0}$ и построил модальное расширение логики, обогатив систему модальным символом Q и четырьмя модальными правилами вывода. Высказывание Q*A* при этом означает «*A* подтверждается экспериментом», а наиболее специфическое правило вывода можно сформулировать так: для совместных измерений импликация эквивалентна подтверждению материальной импликации.

Логика Дишканта ŁQ

- $I{:}W^0 \to S$ есть ŁQ - интерпретация, если она удовлетворяет следующим условиям:
- (I) $I(A \to B) = \min(1, 1 - I(A) + I(\mathrm{B}))$;
- (II) $I(\neg A) = 1 - I(A)$;
- (III) $I(\mathrm{Q}A) = q(I(A))$;
- для любых $A,B \in W^0$, где W^0 – множество формул ŁQ.
- При этом $1{:}\psi \to \{1\}$, где ψ - множество всех состояний объекта, причем состояние, как обычно, представляет собой вектор гильбертова пространства, а любая функция g: $\psi \to [0,1]$ называется обобщенным вопросом. Далее, $P \subseteq S$, где S - множество всех обобщенных вопросов, а P − множество обычных квантовологических вопросов («да-нет»-измерений), и функция q: $S \to P$ определяется условиями:
- a1. $g \le h \Rightarrow q(g) \le q(h)$;
- a2. $q(p) = p$;
- для любых $g,h \in S$; $p \in P$.
- Очевидным образом при таком определении для модальных формул ŁQ функция q играет ту же роль, что и функция p у Макки, ставящая в соответствие каждой тройке (A,α,E) (где $A \in \boldsymbol{A}$, $\alpha \in S$, $E \in \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ − множество наблюдаемых, S - множество состояний, $\boldsymbol{B}$ – множество всех борелевских подмножеств действительной числовой прямой) число $p(A,\alpha,E)$, $0 \le p(A,\alpha,E) \le 1$. Роль множества наблюдаемых выполняет W^0, множества состояний – $\mathrm{dom}(S)$, множества $\boldsymbol{B}$ – $\mathrm{rng}(S)$.

Логика Дишканта LQ

- **A1.** $A \to (B \to \mathrm{A})$
- **A2.** $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- **A3.** $((A \to B) \to B) \to ((\mathrm{B} \to A) \to A)$
- **A4.** $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
- **B5.** $\underline{A,\ \ A \to B}$
- $\qquad B$
- **B6.** $\underline{\ \ A}$
- $\qquad \mathrm{Q}A$
- **B7.** $\underline{\ \ \ \ A}$
- $\qquad \neg\mathrm{Q}\neg A$
- **B8.** $\underline{\ \ A \to B}$
- $\qquad \mathrm{Q}A \to \mathrm{Q}B$
- **B9.** $\underline{\qquad \mathrm{Q}A \to \mathrm{Q}B}$
- $(\mathrm{Q}B \to \mathrm{Q}A) \leftrightarrow \mathrm{Q}(\mathrm{Q}B \supset \mathrm{Q}A)$
- **D4.** $A \supset B =_{def} \neg A \vee B$

К приведенным аксиомам может быть добавлена еще одна:

A10. $\mathrm{Q}A \leftrightarrow \neg\mathrm{Q}\neg A$

Логика Дишканта LQ

Ł-фрейм $\langle O,K,R,*\rangle$,
где K есть непустое множество, $O\in K$,
R - тернарное отношение достижимости на K
и * - унарная операция на K.

- **p1. $ROaa$**
- **p2. $Raaa$**
- **p3. $R^2abcd \Rightarrow R^2acbd$**
- **p4. $R^2Oabc \Rightarrow Rabc$**
- **p5. $Rabc \Rightarrow Rac^*b^*$**
- **p6. $a^{**} = a$**
- **p7. $ROab \veebar ROb$**
- **d1. $a < b =_{def} Roab$**
- **d2. $R^2abcd =_{def}$**

$\exists x(Rabx \ \&\ Rxcd \ \&\ x\in K)$

v есть оценка в Ł-фрейме, т.е. v является функцией $v{:}S\times K\rightarrow S_{[0,1]}$ (S есть множество пропозициональных переменных и $S_{[0,1]}$ есть обычная логическая матрица для $Ł_{\aleph 0}$), которая для всякого $p\in S$ и всяких $a,b\in K$ удовлетворяет следующему условию:
(1) $a < b \ \&\ v(p,a) \neq 0 \Rightarrow v(p,b) \neq 0$;

I есть интерпретация, ассоциированная с v, т.е. I есть функция I: $F\times K \rightarrow S_{[0,1]}$ (F есть множество формул), удовлетворяющая —для всякого $p\in S$, всяких $A,B\in F$ и всякого $a\in K$ —следующим условиям:

- $I(p,a) = v(p,a)$;
- $I(\neg A,a) = 1\text{-}x$ тогда и только тогда, когда $I(A,a^*) = x$;
- $I(A\rightarrow B,a) = min(1,1-x+y)$ тогда и только тогда, когда для всяких $b,c\in K$ $Rabc$ и $I(A,b) = x \Rightarrow I(B,c) = y$.
- **$I(QA,a) = inf\{I(A,c)$: for any $b\in K(ROab) \Rightarrow c\in K(R0bc \Rightarrow I(A,c) \neq 0)\}$**

Логика Дишканта LQ

- (R1) Если $1^{й}$ игрок принимает $A \rightarrow B$ в точке *a,* то всякий раз как $2^{й}$ игрок пытается опровергнуть это утверждение, полагая *A* в точке *b*, $1^{й}$ должен также принимать *B* в точке *c*, где точки выбираются согласно приведенным ранее условиям. (И наоборот, т.е. когда $1^{й\ и}\ 2^{й}$ меняются ролями.)

- (R¬) Если $1^{й}$ игрок принимает ¬A в точке *a,* то $2^{й}$ игрок пытается опровергнуть это утверждение, полагая *A* точке *a** где точки выбираются согласно приведенным ранее условиям. (И наоборот, т.е. когда $1^{й\ и}\ 2^{й}$ меняются ролями.)

- (RQ) Если $1^{й}$ игрок принимает Q*A,* то $1^{й}$ игрок также должен принимать *A* (его интерпретация должна быть отлична от 0) в любой точке, которую $2^{й}$ игрок может выбрать, используя приведенные ранее условия. И наоборот, т.е. когда $1^{й\ и}\ 2^{й}$ меняются ролями.)

Благодарю за внимание