Конечные автоматы и формальные языки

Матросов А. В.

Оглавление

Лекция 2. ДКА: Таблица переходов

- Таблица переходов представляет собой табличное представление функции перехода δ(q,a) (в левом столбце - состояния, в первой строке – символы алфавита)

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

ДКА: Расширенная функция переходов

- Расширенная функция переходов $\hat{\delta}(q, w)$ в соответствие состоянию *q* и цепочке *w* состояние *p*, в которое попадет автомат из состояния *q*, обработав цепочку *w*.
- Базис: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$
  Индукция: пусть *w*=*xa*, тогда

$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

если $\hat{\delta}(q, x) = p$. $\hat{\delta}(q, w) = \delta(p, a)$

Пример

$L = \{w \mid w$ содержит четное число 0 и четное число 1$\}$

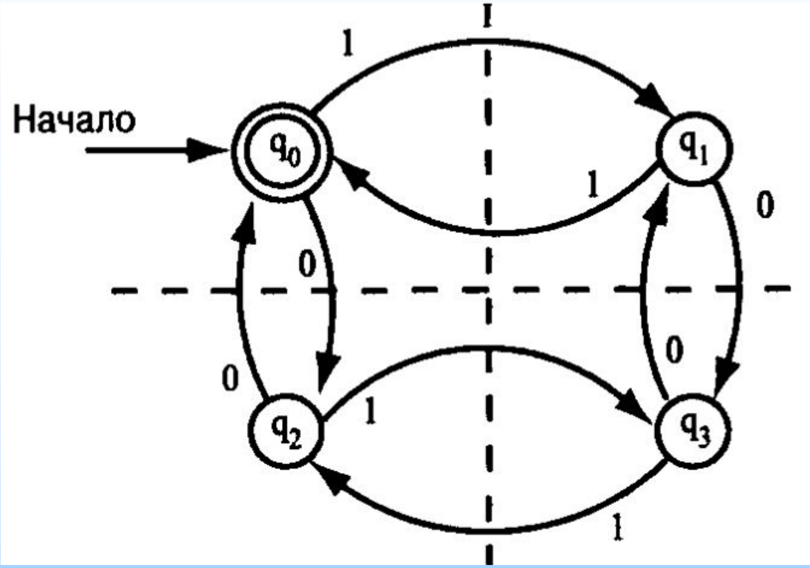
q_0 : Прочитано четное число 0 и четное число 1.

q_1 : Прочитано четное число 0 и нечетное число 1.

q_2 : Прочитано четное число 1 и нечетное число 0.

q_3 : Прочитано нечетное число 0 и нечетное число 1.

$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$.



	0	1
$* \rightarrow q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Пример (продолжение)

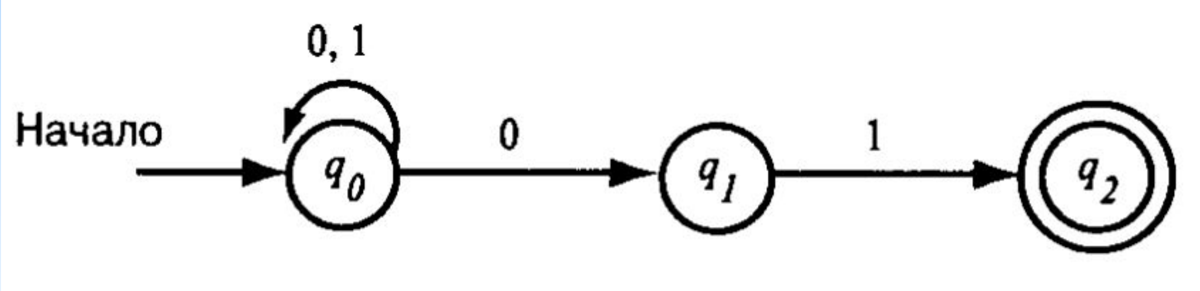
w=110101

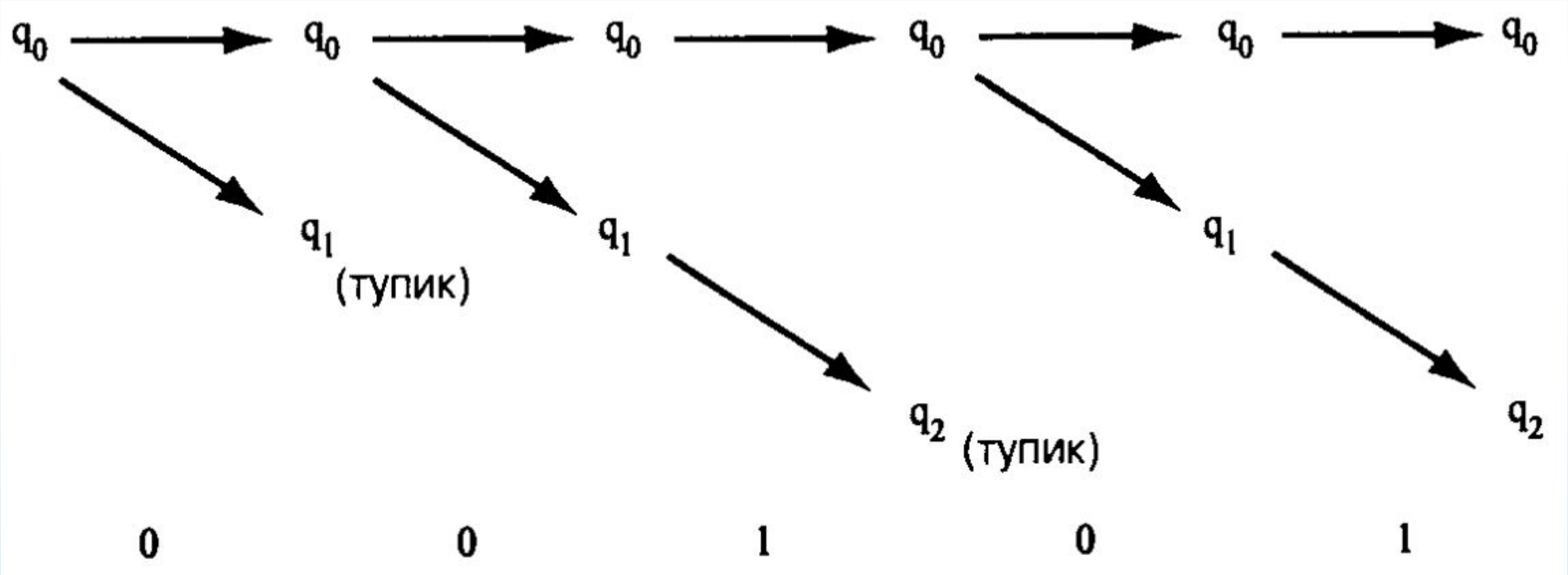
$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0.$$
$$\hat{\delta}(q_0, 1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1.$$
$$\hat{\delta}(q_0, 11) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 1), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0.$$
$$\hat{\delta}(q_0, 110) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 11), 0) = \delta(q_0, 0) = q_2.$$
$$\hat{\delta}(q_0, 1101) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 110), 1) = \delta(q_2, 1) = q_3.$$
$$\hat{\delta}(q_0, 11010) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 1101), 0) = \delta(q_3, 0) = q_1.$$
$$\hat{\delta}(q_0, 110101) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 11010), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0.$$

Язык ДКА (регулярный язык)

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ $\quad L(A) = \{\, w \mid \hat{\delta}(q_0, w)$ принадлежит $F\}$

Неформальное описание НКА





Формальное определение НКА

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F).$$

Эти обозначения имеют следующий смысл.

1. Q есть конечное множество *состояний*.
2. Σ есть конечное множество *входных символов*.
3. q_0, один из элементов Q, — *начальное состояние*.
4. F, подмножество Q, — множество *заключительных* (или *допускающих*) состояний.
5. δ, *функция переходов*, — это функция, аргументами которой являются состояние из Q и входной символ из Σ, а значением — некоторое подмножество множества Q. Заметим, что единственное различие между НКА и ДКА состоит в типе значений функции δ. Для НКА — это множество состояний, а для ДКА — одиночное состояние.

$$(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\}),$$

	0	1
$\to q_0$	$\{q_2, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

НКА: Расширенная функция переходов

- Расширенная функция переходов став $\hat{\delta}(q, w)$ ответствие состоянию *q* и цепочке *w* множество состояний *p*, в которое попадет автомат из состояния *q*, обработав цепочку *w*.
- Базис: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$

  Индукци *а,* тогда

  $$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

  если $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ и $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

  то

  $$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$$

Пример

w=00101

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}.$$

$$\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}.$$

Язык НКА

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

Конструкция подмножеств

ДКА обладают всеми возможностями НКА

$N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ -> $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ **$L(D)=L(N)$**

- Q_D есть множество всех подмножеств Q_N, или *булеан* множества Q_N. Отметим, что если Q_N содержит n состояний, то Q_D будет содержать уже 2^n состояний. Однако часто не все они достижимы из начального состояния автомата D. Такие недостижимые состояния можно "отбросить", поэтому фактически число состояний D может быть гораздо меньше, чем 2^n.
- F_D есть множество подмножеств S множества Q_N, для которых $S \cap F_N \neq \varnothing$, т.е. F_D состоит из всех множеств состояний N, содержащих хотя бы одно допускающее состояние N.
- Для каждого множества $S \subseteq Q_N$ и каждого входного символа a из Σ

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \text{ из } S} \delta_N(p, a).$$

Конструкция подмножеств (пример)

$Q_N=\{q_0, q_1, q_2\}$ $|Q_D| = 2^3 = 8$

	0	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$^*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$^*\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

	0	1
A	A	A
$\rightarrow B$	E	B
C	A	D
$^*D$	A	A
E	E	F
$^*F$	E	B
$^*G$	A	D
$^*H$	E	F

«Ленивый» алгоритм

Базис. Мы точно знаем, что одноэлементное множество, состоящее из начального состояния N, является достижимым.

Индукция. Предположим, мы установили, что множество состояний S является достижимым. Тогда для каждого входного символа a нужно найти множество состояний $\delta_D(S, a)$. Найденные таким образом множества состояний также будут достижимы.

1. $\delta_D(\{q_0\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ и $\delta_D(\{q_0\}, 1) = \{q_0\}$ — Строка 2 таблицы

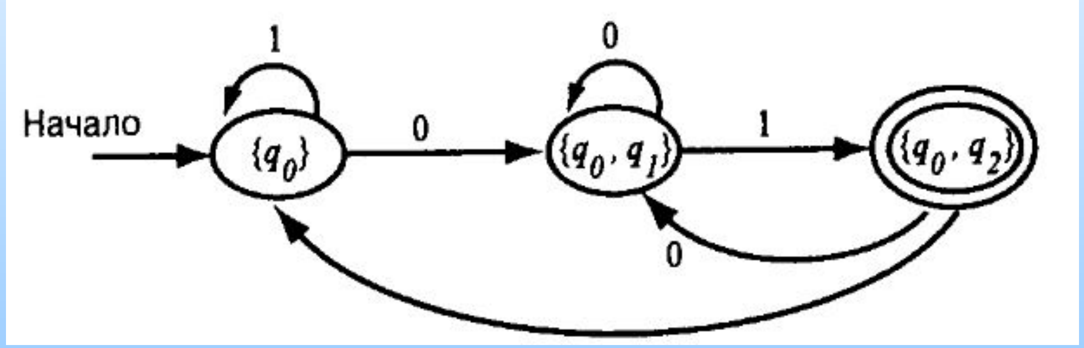
2. $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ и $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_2\}$ — Строка 5 таблицы

$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$

3.

$$\delta_D(\{q_0, q_2\}, 0) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\},$$

$$\delta_D(\{q_0, q_2\}, 1) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_2, 1) = \{q_0\} \cup \varnothing = \{q_0\}.$$



Строка 6 таблицы

Конструкция подмножеств

Теорема 2.11. Если ДКА $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_0, F_D)$ построен по НКА $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ посредством конструкции подмножеств, то $L(D) = L(N)$.

Доказательство. Вначале с помощью индукции по $|w|$ покажем, что

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w).$$

Базис: $|w|=0$ -> $w=\varepsilon$ -> (по базису определения) $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \varepsilon) = \hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$

Индукция: $|w| = n+1$, $w = xa$ и $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$

По индуктивной части определения для НКА

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a). \tag{2.2}$$

С другой стороны, конструкция подмножеств дает

$$\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a). \tag{2.3}$$

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \delta_D(\hat{\delta}_D(q_0, x), a)) = \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a). \tag{2.4}$$

из уравнений (2.2) и (2.4) видно, что $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$

1 $L(D) = L(N)$

Теорема

Теорема 2.12. Язык L допустим некоторым ДКА тогда и только тогда, когда он допускается некоторым НКА.

Доказательство. *Достаточность* следует из конструкции подмножеств и теоремы 2.11.

(*Необходимость*) Доказательство этой части не представляет трудности; нам нужно лишь перейти от ДКА к идентичному НКА. Диаграмму переходов для некоторого ДКА можно рассматривать неформально как диаграмму переходов для некоторого НКА, причем последний имеет по любому входному символу лишь один переход. Точнее, пусть $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ есть некоторый ДКА. Определим $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ как эквивалентный ему НКА, где δ_N определена следующим правилом.

- Если $\delta_D(q, a) = p$, то $\delta_N(q, a) = \{p\}$.

Индукцией по $|w|$ легко показать, что, если $\hat{\delta}_D(q, w) = p$, то

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{p\}.$$

Доказательство предоставляется читателю. Как следствие, D допускает w тогда и только тогда, когда N допускает w, т.е. $L(D) = L(N)$. □

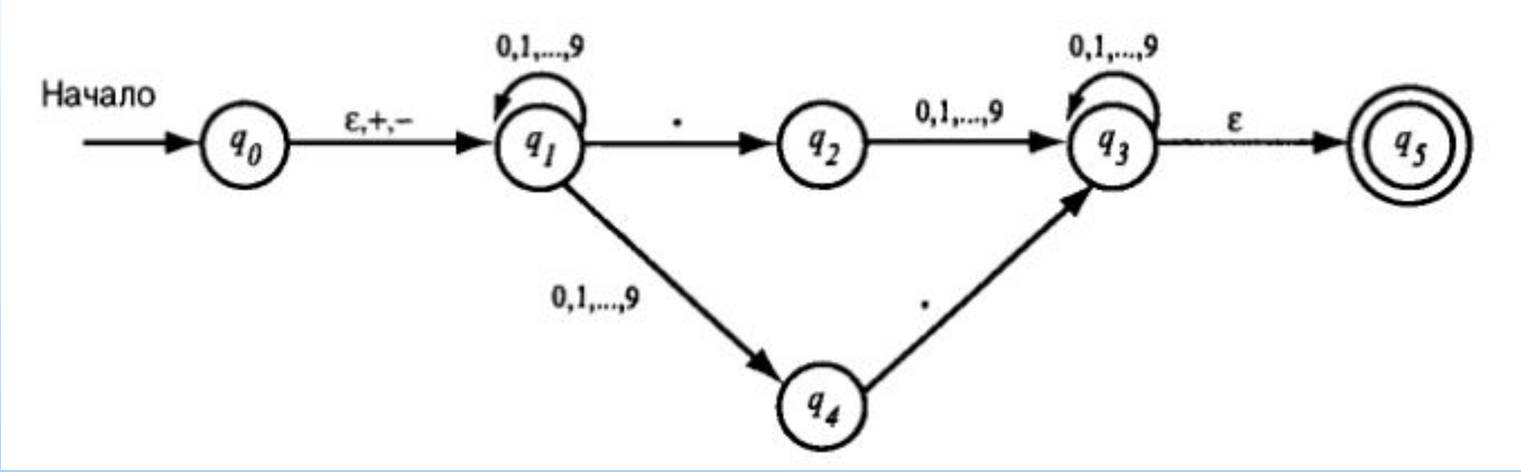
Лекция 3.
НКА с ε-переходами

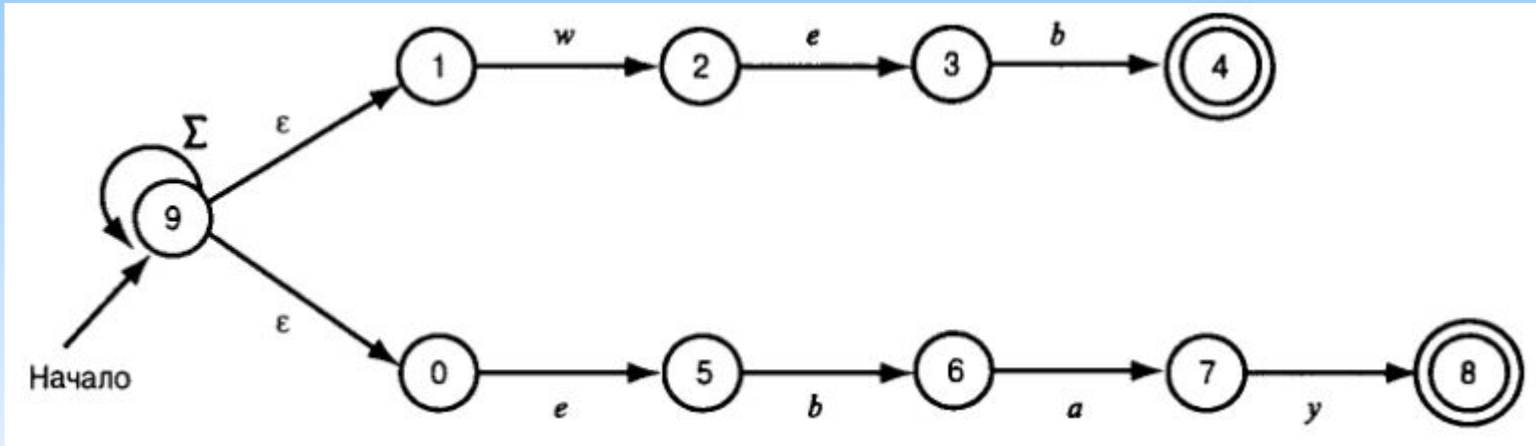
- Добавим возможность перехода по пустой цепочке

Неформальное определение ε-НКА

1. Необязательный знак + или –
2. Цепочка цифр (возможно пустая)
3. Разделяющая десятичная точка .
4. Цепочка цифр (возможно пустая)

Цепочки 2 и 4 одновременно не могут быть пустыми





Формальное определение ε-НКА

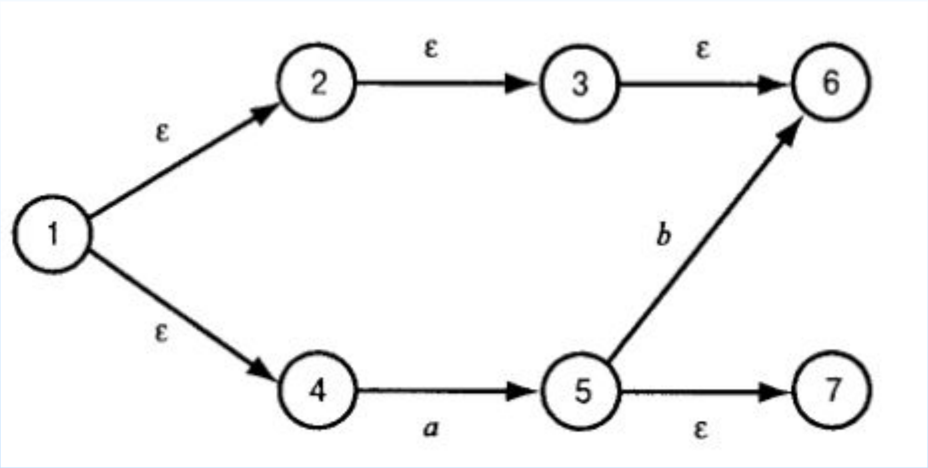
$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ δ аргументы из Q и $\Sigma \bigcup \{\varepsilon\}$

$$E = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

	ε	$+, -$	.	$0, 1, \ldots, 9$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

ε-замыкание

- Базис: ECLOSE(q) содержит q
- Индукция: если ECLOSE(q) содержит состояние p и существует переход, отмеченный ε из p в r, то ECLOSE(q) содержит r.



ECLOSE(1)={1,2,3,4,6}
ECLOSE(2)={2,36}
ECLOSE(5)={5,7}
ECLOSE(4)={4}

ε-НКА: Расширенная функция переходов

- Базис: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q)$
- Индукция: пусть *w*=*xa*, *a* из Σ

1. Пусть $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ есть $\hat{\delta}(q, x)$, т.е. p_i — это все те и только те состояния, в которые можно попасть из q по пути, отмеченному x. Этот путь может оканчиваться одним или несколькими ε-переходами, а также содержать и другие ε-переходы.

2. Пусть $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ есть множество $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, т.е. нужно совершить все переходы, отмеченные символом a, из тех состояний, в которые мы можем попасть из q по пути, отмеченному x. Состояния r_i — лишь *некоторые* из тех, в которые мы можем попасть из q по пути, отмеченному w. В остальные такие состояния можно попасть из состояний r_i посредством переходов с меткой ε, как описано ниже в (3).

3. $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$. На этом дополнительном шаге, где мы берем замыкание и добавляем все выходящие из q пути, отмеченные w, учитывается возможность существования дополнительных дуг, отмеченных ε, переход по которым может быть совершен после перехода по последнему "непустому" символу a.

Пример

Пример 2.20. Вычислим δ $(q_0, 5\,.\,6)$ для ε-НКА на рис. 2.18. Для этого выполним следующие шаги.

- $\hat{\delta}$ (q_0, ε) = ECLOSE(q_0) = $\{q_0, q_1\}$.
- Вычисляем $\hat{\delta}$ $(q_0, 5)$ следующим образом.

1. Находим переходы по символу 5 из состояний q_0 и q_1, полученных при вычислении $\hat{\delta}$ (q_0, ε): $\delta(q_0, 5) \cup \delta(q_1, 5) = \{q_1, q_4\}$.
2. Находим ε-замыкание элементов, вычисленных на шаге (1). Получаем: ECLOSE$(q_1) \cup$ ECLOSE$(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$, т.е. множество $\hat{\delta}$ $(q_0, 5)$.

Эта двушаговая схема применяется к следующим двум символам.

- Вычисляем $\hat{\delta}$ $(q_0, 5\,.)$.
   1. Сначала $\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$.
   2. Затем $\hat{\delta}$ $(q_0, 5\,.)$ = ECLOSE$(q_2) \cup$ ECLOSE$(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$.
- Наконец, вычисляем $\hat{\delta}$ $(q_0, 5\,.\,6)$.
   1. Сначала $\delta(q_2, 6) \cup \delta(q_3, 6) \cup \delta(q_5, 6) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \varnothing = \{q_3\}$.
   2. Затем $\hat{\delta}$ $(q_0, 5\,.\,6)$ = ECLOSE$(q_3) = \{q_3, q_5\}$.

$$L(E) = \{w \mid \hat{\delta}(q, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

Устранение ε-переходов

Пусть $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E)$. эквивалентный ДКА $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$

1. Q_D есть множество ε-замкнутых подмножеств Q_E

   $S \subseteq Q_E$. $S = \mathrm{ECLOSE}(S)$

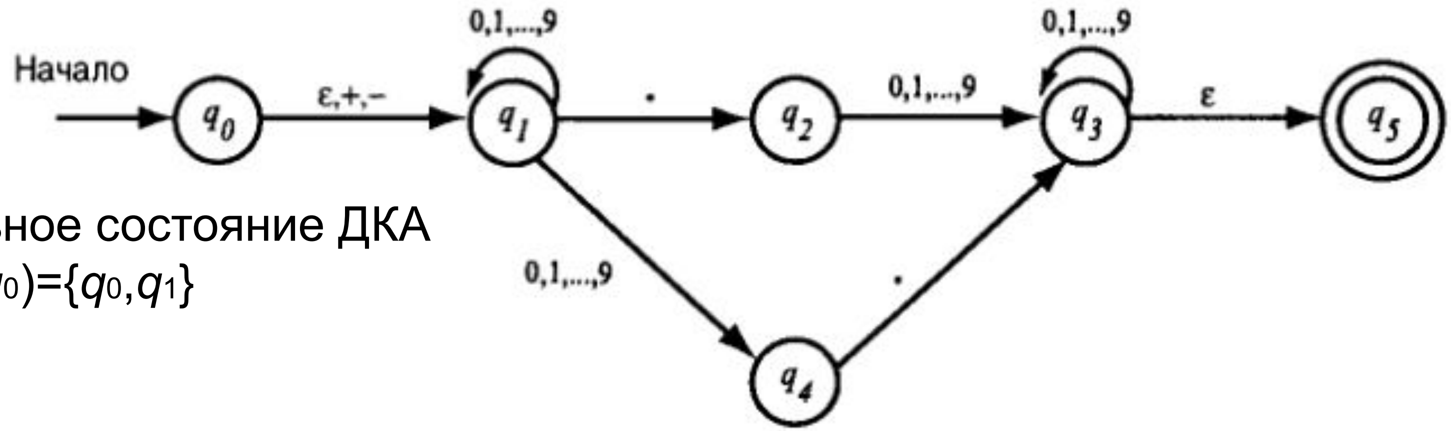
2. $q_D = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$.
3. $F_D = \{S \mid S$ принадлежит Q_D и $S \cap F_E \neq \varnothing\}$
4. $\delta_D(S, a)$

а) пусть $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$;

б) вычислим $\bigcup_{i=1}^{k} \delta\,(p_i, a)$; пусть это будет множество $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$;

в) тогда $\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$.

Пример



1. Начальное состояние ДКА

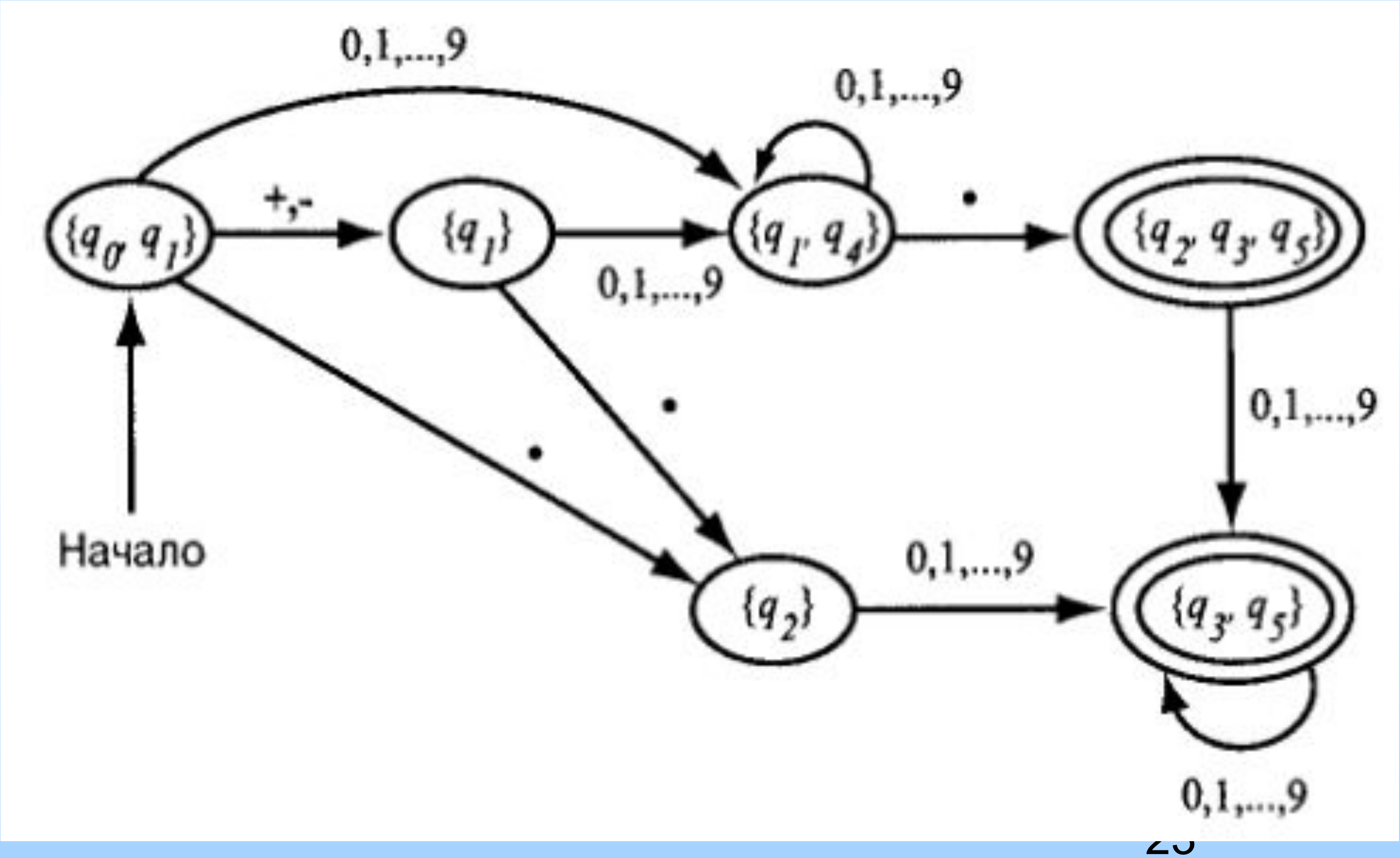
ECLOSE(q_0)={q_0,q_1}

	+	-	.	0-9
->{q_0,q_1}	{q_1}	{q_1}	{q_2}	{q_1,q_4}
{q_1}	Ø	Ø	{q_2}	{q_1,q_4}
{q_2}	Ø	Ø	Ø	{q_3,q_5}
{q_1,q_4}	Ø	Ø	{q_2,q_3,q_5}	{q_1,q_4}
*{q_3,q_5}	Ø	Ø	Ø	{q_3,q_5}
*{q_2,q_3,q_5}	Ø	Ø	Ø	{q_3,q_5}

ЛЗ-2013 конец

Пример

Еще есть «дьявольское состояние» Ø - переход в него по символам, отсутствующим на рисунке. У состояния Ø переход по любому символу в себя.



Л4-2013
начало

Теорема

Теорема 2.22. Язык L допускается некоторым ε-НКА тогда и только тогда, когда L допускается некоторым ДКА.

Необходимость. Пусть существует ДКА D с языком L=L(D). Преобразуем D в ε-НКА E. Добавим переходы $\delta(q, \varepsilon) = \varnothing$ для всех состояний автомата D. Преобразуем все $\delta_D(q, a) = p$ в $\delta_E(q, a) = \{p\}$

Достаточность. Пусть $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E)$ некоторый ε-НКА. Используем модифицированную конструкцию подмножеств для построения ДКА $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$. Доказать: L(D)=L(E). Покажем: $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_0, w)$.

Базис. |w|=0 => w= ε. По определению $\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$. По определению начального состояния ДКА D $q_D = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$. Для любого состояния p ДКА $\hat{\delta}(p, \varepsilon) = p$ => $\hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$ => $\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon)$.

Индукция. Пусть $w = xa$, причем $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x)$ и равняются $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

По определению $\hat{\delta}$ для ε-НКА находим $\hat{\delta}_E(q_0, w)$ следующим образом.

1. Пусть $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a)$ есть $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.
2. Тогда $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$.

$\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a)$ совпадает с $\hat{\delta}_E(q_0, w)$.

Лекция 4.
Регулярные выражения (РВ)

- Алгебраическое описание регулярных языков
  - Grep
  - Lex, Flex вход: РВ, выход: ДКА

Операции над языками

1. *Объединение* языков *L* и *M* (*L* U *M*) - множество цепочек, содержащихся либо в *L,* либо в *M*, либо в обоих языках.
   L={001,10,111}, *M*={ ε,001} *L* U *M*={ ε,10,001,111}
2. *Конкатенация* языков *L* и *M* (*L*.*M* или *LM*) - множество цепочек, которые можно образовать путем дописывания к любой цепочке из *L* в ее конец любой цепочки из *M*.
   LM={001,10,111,001001,10001,111001}

Операции над языками

3. *Итерация* («*звездочка*», *замыкание Клини* – S. C. Kleene) языка *L* (*L**) представляет множество цепочек, образованных путем конкатенации любого (и нулевого) количества цепочек из *L*. При этом допускаются повторения цепочек – одна и та же цепочка может быть выбрана для конкатенации более одного раза.

$L=\{0,1\}$, L^* - все битовые цепочки, в том числе и пустая ε

$L=\{0,11\}$, L^* - битовые цепочки, в том числе и пустая, содержащие четное число единиц

$L^* = \bigcup_{i>=0} L^i$, где $L^0=\{\varepsilon\}$, $L^1=L$ и $L^i=LL\ldots L$ (конкатенация i копий L) для i>=0

$L=\{0,11\}$: $L^0=\{\varepsilon\}$, $L^1=\{0,11\}$, $L^2=\{00,011,110,1111\}$

$L^3=\{000,0011,0110,01111,1100,11011,11110,111111\}$

L – множество всех нулевых цепочек: $L^i=L$ i>0 => $L^*=L$

$\varnothing^*=\{\varepsilon\}$

Построение РВ

- Базис:
  - константы Ø и ε суть РВ, определяющие языки Ø и {ε}
  - если *a* символ алфавита, то **a** РВ, определяющее язык {*a*} (чаще сам символ используют в качестве РВ)
- Индукция:
  - E и F суть РВ => E+F тоже РВ, определяющее объединение языков *L*(E) и *L*(F): *L*(E) U *L*(F)
  - E и F суть РВ => EF тоже РВ, определяющее конкатенацию языков *L*(E) и *L*(F): *L*(E)*L*(F)
  - E есть РВ => E* тоже РВ, определяющее итерацию языка *L*(E): *L*(E*)=(*L*(E))*
  - E есть РВ => (E) тоже РВ, определяющее тот же язык *L*(E), что и выражение E: *L*((E))=*L*(E)

Пример

- РВ для множества цепочек из чередующихся нулей и единиц
  - **01** -> {01}
  - (**01**)* -> {w: w=(01)^n, n>=0}
  - (**01**)*+ (**10**)*+ **0**(**10**)*+ **1**(**01**)*
  - к (**01**)* допишем слева ε+**1**, а справа ε+**0**
  - $L(\varepsilon+\mathbf{1})=L(\varepsilon) \cup L(\mathbf{1})=\{\varepsilon, \mathbf{1}\}$
  - (ε+**1**)(**01**)*(ε+**0**)

Приоритеты операций РВ

- Замыкание Клини (применяется к наименьшей последовательности символов слева от нее и являющейся РВ)
- Конкатенация (ассоциативная)
- Объединение (ассоциативная)
- Для изменения приоритета используются скобки

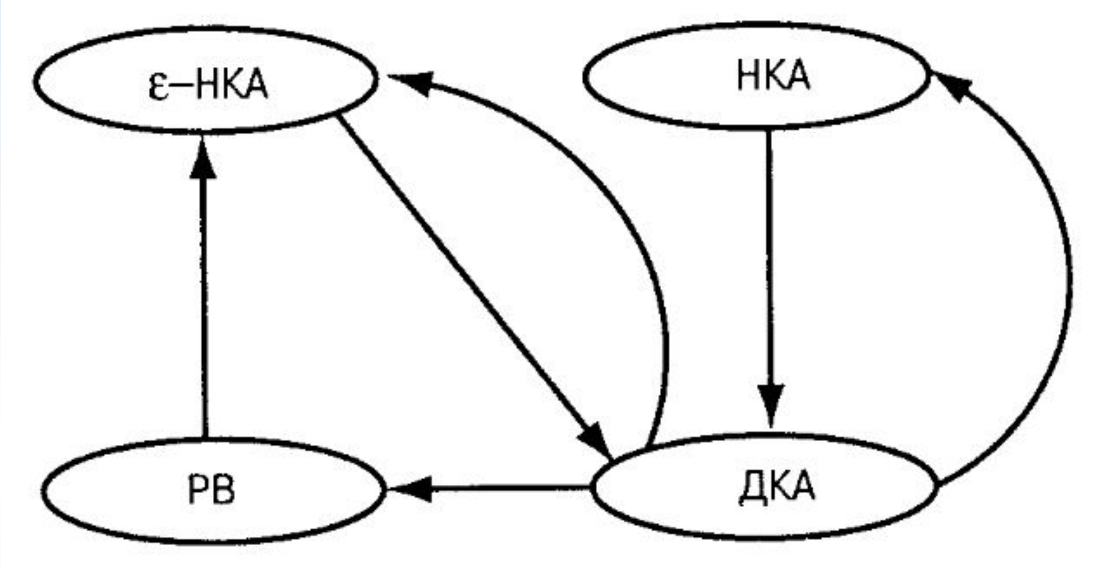
Пример

01*+1 ⇔ (0(1*))+1
?

(01)*+1 ?

0(1*+1) ?

Лекция 5. КА и РВ



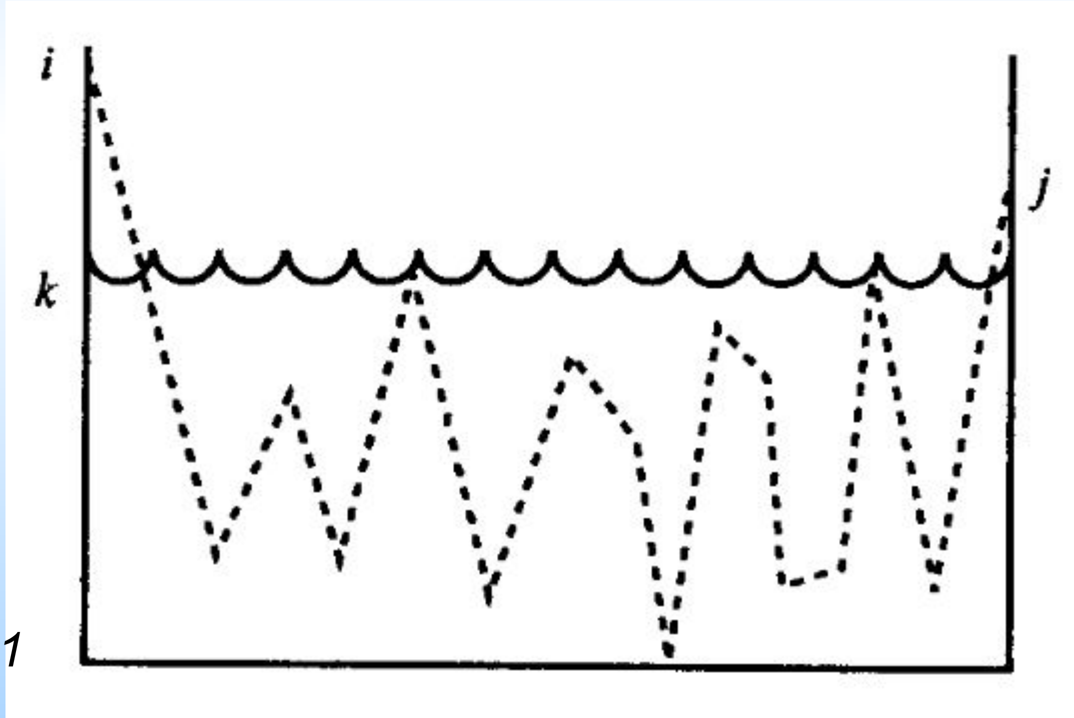
От ДКА к РВ

Теорема 3.4. Если $L = L(A)$ для некоторого ДКА A, то существует регулярное выражение R, причем $L = L(R)$.

Теорема 3.4 Доказательство

- Перенумеруем множество состояний ДКА {1,2,…,*n*}
- Обозначим через $R_{ij}^{(k)}$ РВ, язык которого состоит из множества меток (цепочек) *w*, ведущих от состояния *i* к состоянию *j* ДКА и не имеющих промежуточных состояний с номерами > *k*

состояниеn



состояние1

движение вдоль пути от i к j ->

Теорема 3.4 Доказательство

- Для построения $R_{ij}^{(k)}$ используем индуктивное определение от *k*=0 до *k*=*n*
- **Базис**: *k*=0 (у пути нет промежуточных состояний)
  - дуга из *i* в *j*
  - путь длины 0, состоящий из вершины *i*
- $i \neq j$ => возможен только первый случай
  - если таких дуг нет, то $R_{ij}^{(0)} = \varnothing$
  - одна дуга, помеченная символом *a*, то $R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}$
  - несколько дуг, помеченных $a_1, a_2, \ldots, a_k$
- *i*=*j* => путь длины 0 и петли в состоянии *i*

ε $\varepsilon + \mathbf{a}$ $\varepsilon + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_k$

Л4-2013
конец

Теорема 3.4 Доказательство

- Индукция: путь из состояния *i* в состояние *j*, не проходящий через состояния с номерами > *k*
  - путь вообще не проходит через состояние *k* => метка пути принадлежит языку $R_{ij}^{(k-1)}$
  - путь проходит через состояние *k* по меньшей мере один раз $R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)} \quad => \quad R_{ij}^{(n)}$$

РВ для языка ДКА: объединение РВ $R_{1j}^{(n)}$ для всех допускающих *j*