§3. Полные системы. Примеры полных систем (с доказательством полноты).

Определение.

Множество функций алгебры логики A называется полной системой
 (в P2), если любую функцию алгебры логики можно выразить формулой над A.

Теорема 3.

Система *A = { V, &, ¬} является полной.*

Доказательство.

Если функция алгебры логики f отлична от тождественного нуля, то f выражается в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы, в которую входят лишь дизъюнкция, конъюнкция и отрицание. Если же $f \equiv 0$, то $f = x \cdot x$ ♦

Лемма 2.

Если система A — полная, и любая функция системы A может быть выражена формулой над некоторой другой системой B, то B — также полная система.

Теорема 4. Следующие системы являются полными в P_2:

1) $\{x \vee y, \overline{x}\}$;
2) $\{x \cdot y, \overline{x}\}$;
3) $\{x \mid y\}$;
4) $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Доказательство. 1) Известно (теорема 3), что система $A = \{x \vee y, x \cdot y, \overline{x}\}$ полна. Покажем, что полна система $B = \{x \vee y, \overline{x}\}$. Действительно, из закона де Моргана $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ получаем, что $x \cdot y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$, то есть конъюнкция выражается через дизъюнкцию и отрицание, и все функции системы A выражаются формулами над системой B. Согласно лемме 2 система B полна.

2) Аналогично пункту 1: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \Leftrightarrow x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$ и из леммы 2 следует истинность утверждения пункта 2.

3) $x \mid x = \overline{x}$, $x \cdot y = \overline{x \mid y} = (x \mid y) \mid (x \mid y)$ и согласно лемме 2 система полна.

4) $\overline{x} = x \oplus 1$ и согласно лемме 2 система полна.

Схемы из функциональных элементов

СХЕМА ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ - математическая модель реальных объектов, связанных с переработкой информации, в которых допускается многократное использование промежуточных результатов.

Множество функциональных символов или связок, используемых для пометки внутренних вершин СФЭ, называется *базисом схемы*.

Схемой из функциональных элементов (СФЭ) в базисе *B* называется размеченный ориентированный граф без циклов, в котором

1. вершины, являющиеся истоками, помечены символами переменных и называются *входами* (разным вершинам соответствуют разные переменные);
2. каждая вершина, в которую входит $k \geq 1$ дуг, помечена функцией из базиса *B*, зависящей от *k* переменных (такие вершины называются *функциональными элементами* или *вентилями*);
3. некоторые вершины выделены как *выходы* (входные вершины могут быть и

Изображение функциональных элементов на функциональных схемах

Изображение элемента “И”

Изображение элемента “ИЛИ”

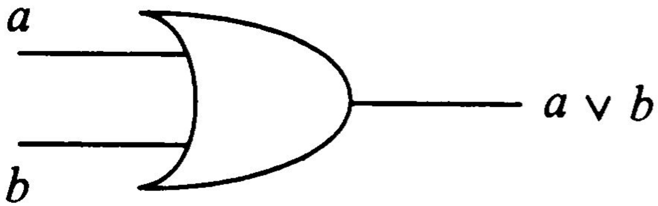
Изображение элемента “И-НЕ” (Шеффера)

Изображение элемента “ИЛИ-НЕ” (Пирса)

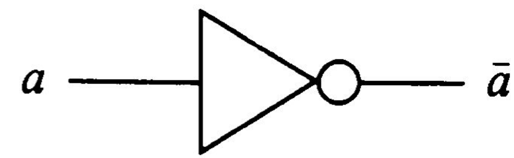
Изображение элемента “НЕ”

Изображение элемента “⊕” (сумма по модулю 2)

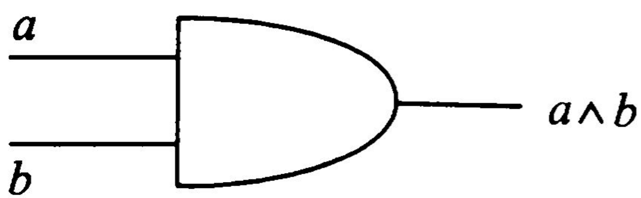
Альтернативное изображение



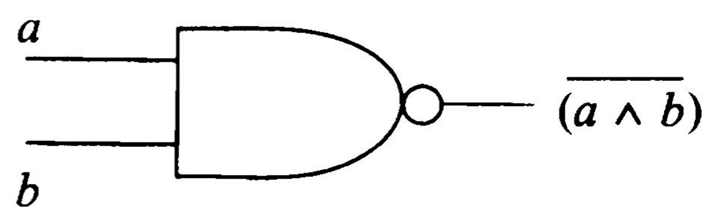
ИЛИ



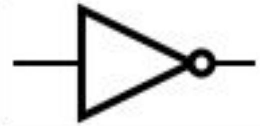
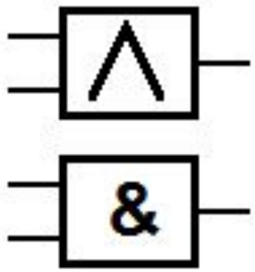
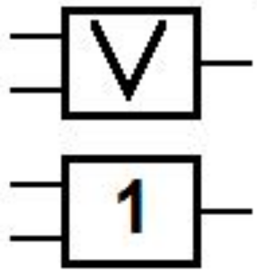
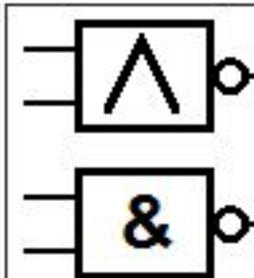
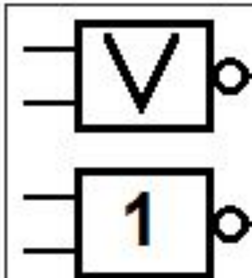
НЕ



И



НЕ-И

Тип элемента	И	ИЛИ	НЕ	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса
Традиционная форма					
Прямоугольная форма					

Сложностью схемы из функциональных элементов называется число функциональных элементов в схеме.