

§3. Полные системы. Примеры полных систем (с доказательством полноты).

Определение.

Множество функций алгебры логики A называется полной системой

(в P_2), если любую функцию алгебры логики можно выразить формулой над A .

Теорема 3.

Система $A = \{ \vee, \&, \neg \}$ является полной.

Доказательство.

Если функция алгебры логики f отлична от тождественного нуля, то f выражается в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы, в которую входят лишь дизъюнкция, конъюнкция и отрицание. Если же $f \equiv 0$, то $f = x \cdot x$ ♦

Лемма 2.

Если система A — полная, и любая функция системы A может быть выражена формулой над некоторой другой системой B , то B — также полная система.

Теорема 4. Следующие системы являются полными в P_2 :

1) $\{x \vee y, \bar{x}\}$;

2) $\{x \cdot y, \bar{x}\}$;

3) $\{x | y\}$;

4) $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Доказательство. 1) Известно (теорема 3), что система $A = \{x \vee y, x \cdot y, \bar{x}\}$ полна. Покажем, что полна система $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$. Действительно, из закона де Моргана $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ получаем, что $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$, то есть конъюнкция выражается через дизъюнкцию и отрицание, и все функции системы A выражаются формулами над системой B . Согласно лемме 2 система B полна.

2) Аналогично пункту 1: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \Leftrightarrow x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ и из леммы 2 следует истинность утверждения пункта 2.

3) $x | x = \bar{x}$, $x \cdot y = \overline{x | y} = (x | y) | (x | y)$ и согласно лемме 2 система полна.

4) $\bar{x} = x \oplus 1$ и согласно лемме 2 система полна.

Схемы из функциональных элементов

СХЕМА ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ -
математическая модель реальных объектов, связанных с
переработкой информации, в которых допускается
многократное использование промежуточных результатов.

Множество функциональных символов или связей, используемых для пометки внутренних вершин СФЭ, называется *базисом схемы*.

Схемой из функциональных элементов (СФЭ)

в базисе B называется размеченный ориентированный граф без циклов, в котором

1. вершины, являющиеся истоками, помечены символами переменных и называются *входами* (разным вершинам соответствуют разные переменные);
2. каждая вершина, в которую входит $k \geq 1$ дуг, помечена функцией из базиса B , зависящей от k переменных (такие вершины называются *функциональными элементами* или *вентильями*);
3. некоторые вершины выделены как *выходы* (входные вершины могут быть и

Изображение функциональных элементов на функциональных схемах

Изображение элемента “И”



Изображение элемента “ИЛИ”



Изображение элемента “И-НЕ” (Шеффера)



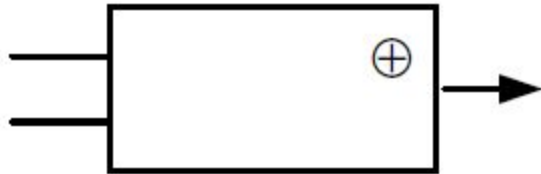
Изображение элемента “ИЛИ-НЕ” (Пирса)



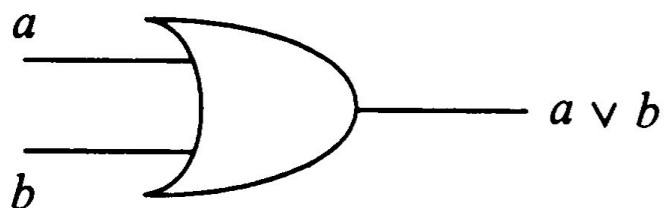
Изображение элемента “НЕ”



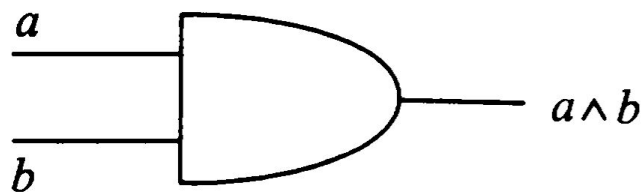
Изображение элемента “ \oplus ” (сумма по модулю 2)



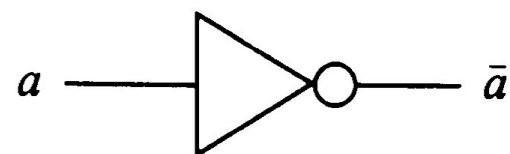
Альтернативное изображение



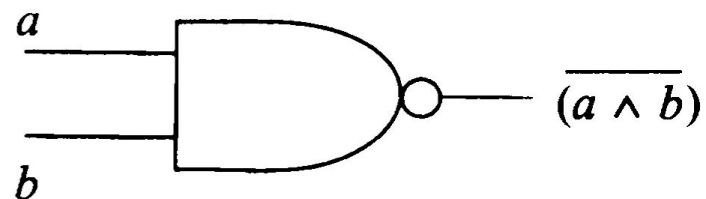
ИЛИ





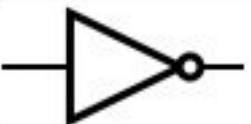









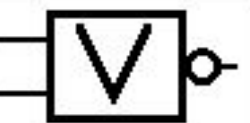

И



НЕ



НЕ-И

Тип элемента	И	ИЛИ	НЕ	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса
Традиционная форма					
Прямоугольная форма	 	 		 	 

Сложностью схемы из функциональных элементов называется число функциональных элементов в схеме.