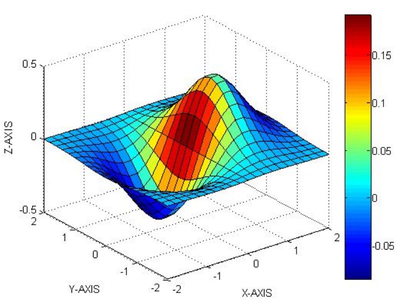
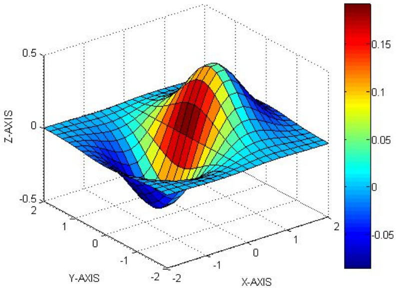
Лекция 5

Случайные процессы.



Содержание

- **Особенности моделирования случайных процессов.**
- События. Случайные величины.
- Случайные процессы.
- Моделирование случайных процессов.

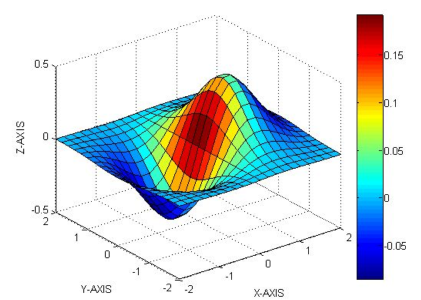


Объекты моделирования

	Дискретные	**Непрерывные**
Детерминированные	• Число состояний системы конечно. • Переходы строго определены	• Число состояний бесконечно • Динамика параметров строго определена
Стохастические	• Число состояний системы конечно • Переходы определены некоторым случайным законом	• Число состояний бесконечно • Динамика параметров задается случайными функциями

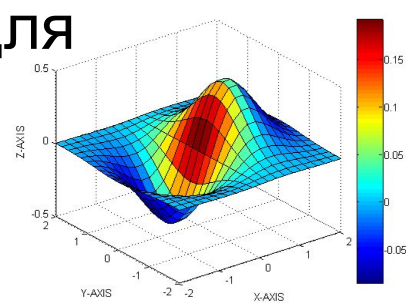
Вычислительная система – это **дискретный детерминированный** объект.

При моделировании решается задача описания любого объекта **дискретной детерминированной** схемой.



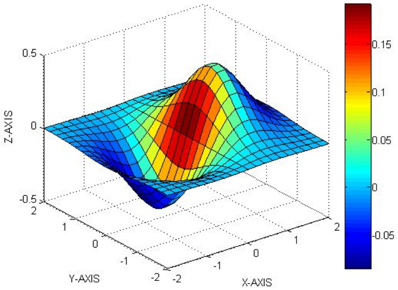
Основные вопросы

- Дискретизация непрерывной задачи
  - Сходимость = аппроксимация + устойчивость
  - Оптимизация алгоритма
- Описание стохастической задачи как детерминированной
  - Как вообще вычленить закономерности в «случайной» ситуации?
  - Адекватность: когда и почему решение детерминированной задачи «полезно» для решения стохастической.



Содержание

- Особенности моделирования случайных процессов.
- **События. Случайные величины.**
- Случайные процессы.
- Моделирование случайных процессов.



Некоторые определения

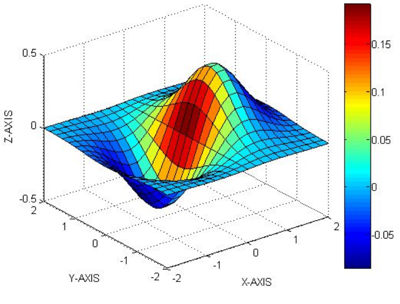
Событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Если условия опыта могут быть воспроизведены многократно, так что в принципе осуществима целая серия одинаковых и *независимых* друг от друга испытаний, то **вероятность** события A может быть вычислена:

$$\mathrm{P}(A) = m / n$$

где n – общее число взаимно исключающих друг друга исходов; m – число исходов, которые приводят к наступлению события A.



Некоторые определения

Несколько событий образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта должно непременно появиться хотя бы одно из них.

$$\sum_{\Omega} P(A_i) = 1$$

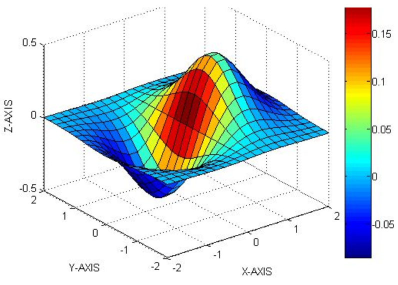
полная группа Ω –

Несколько событий называются ***несовместными*** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

$$P(A_i \cap A_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

События называются ***независимыми***, если появление одного из них не зависит от того, произошли ли другие события.

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) \quad \forall i \neq j$$



Некоторые определения

Случайной величиной называется величина, которая может принимать то или иное значение, *неизвестное заранее*.

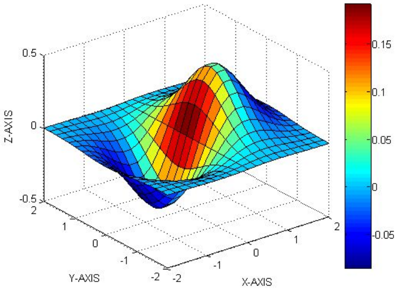
Случайные величины могут быть двух типов:

- **дискретные (прерывные)**, принимающие только отделённые друг от друга значения, которые можно пронумеровать;
- **непрерывные (аналоговые)**, которые могут принимать любое значение из некоторого промежутка.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчинена данному закону распределения.

$$X : x_1, x_2, \ldots x_n \qquad p_i = \mathrm{P}(X = x_i) \quad (i = \overline{1, n})$$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ в случае полной группы несовместных событий

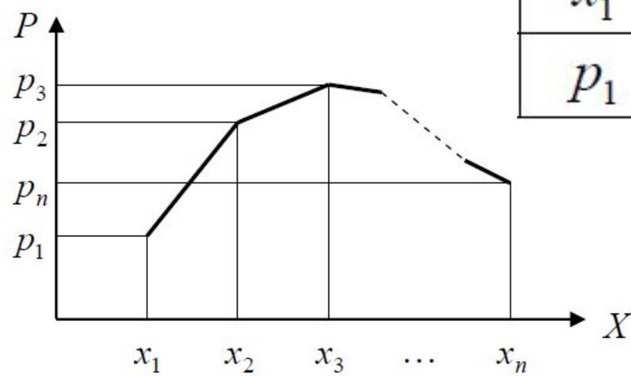


Распределение случайной величины

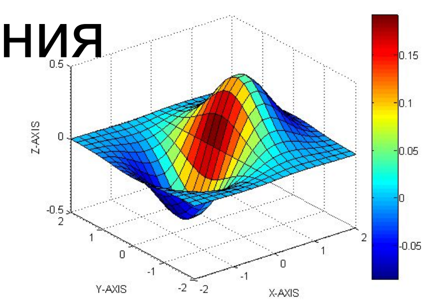
- Дискретная случайная величина
  - Аналитическое $p_i = f(x_i) \quad (i = \overline{1, n})$
  - Табличное

x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

  - Графическое



- Непрерывная случайная величина
  - Вероятность каждого конкретного значения **равна нулю** - ????



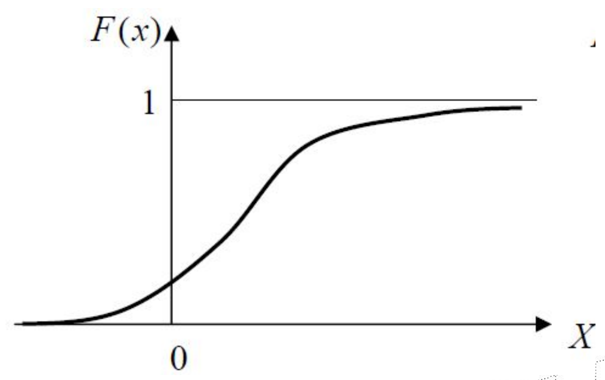
Распределение случайной величины

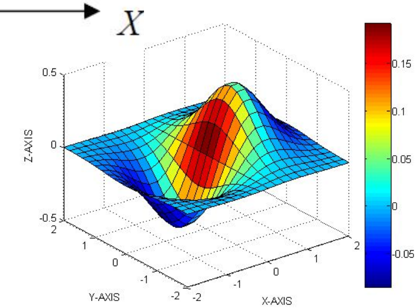
Функция распределения вероятностей (или просто функция распределения) $F(x)$ случайной величины X представляет собой *вероятность* того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем некоторое заданное значение x:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x)$$

Свойства функции распределения:

- если $x_j > x_i$, то $F(x_j) \geq F(x_i)$;
- $F(-\infty) = 0$;
- $F(+\infty) = 1$.
- $\mathrm{P}(a < x < b) = F(b) - F(a)$.

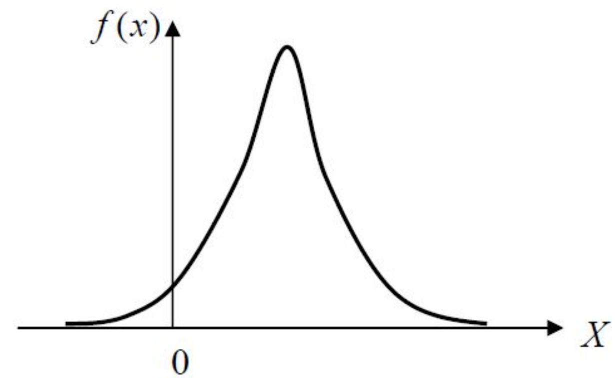




Распределение случайной величины

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ определяется как *производная* от функции распределения $F(x)$ по x:

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

Свойства плотности распределения:

- плотность распределения есть функция *неотрицательная*: $f(x) \geq 0$;
- интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен *единице*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Моменты
случайной величины

- ***Начальный момент s-го порядка*** $\alpha_s[X]$

$$\alpha_s[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,s}\, p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\, dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

- ***Математическое ожидание*** $M[X] = \alpha_1[X]$

- ***Центральный момент s-го порядка*** $\beta_s[X]$

$$\beta_s[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}[X])^s\, p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^s f(x)\, dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Моменты случайной величины

- ***Математическое ожидание*** *– средневзвешенное значение случайной величины*

$$M[X] = \alpha_1[X]$$

- ***Дисперсия*** *– разброс значений случайной величины относительно математического ожидания*

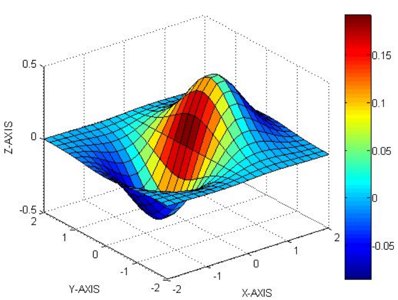
$$\mathrm{D}[X] = \beta_2[X]$$

- ***Среднеквадратичное отклонение***

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{D}[X]}$$

- ***Коэффициент вариации***

$$\nu[X] = \frac{\sigma[X]}{\mathrm{M}[X]}$$



Типовые распределения

- Распределение Пуассона

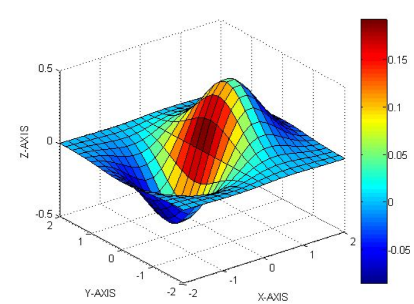
$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

где a – некоторая положительная величина, называемая *параметром* распределения Пуассона.

- Геометрическое распределение

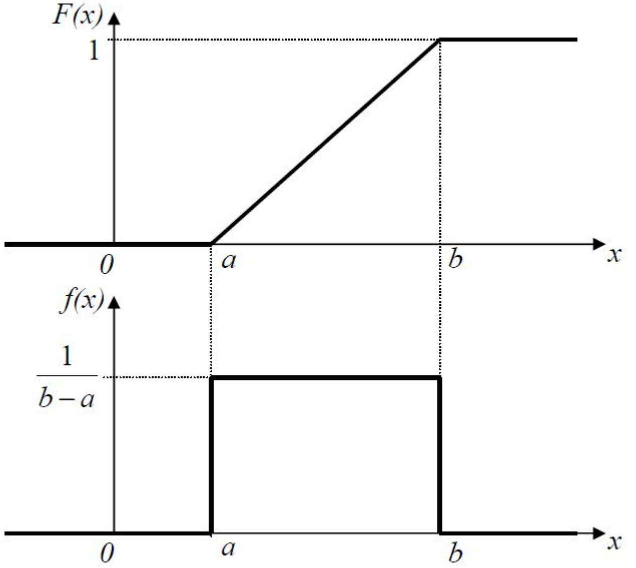
$$p_k = P(X = k) = \rho^k (1 - \rho) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

где ρ - *параметр* распределения $(0 < \rho < 1)$



Типовые распределения

- Равномерное распределение



- Экспоненциальное распределение

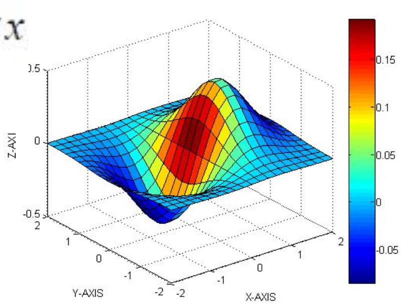
$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \qquad f(x) = \alpha e^{-\alpha x},$$

$$\alpha > 0 \qquad x \geq 0 \qquad \nu_{эксп}[X] = 1$$

- Распределение Эрланга

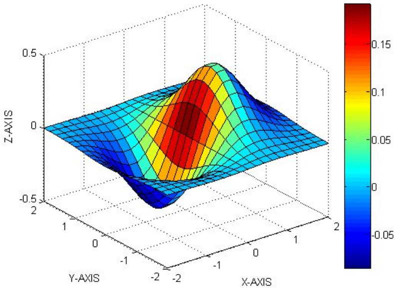
$$F_k(x) = 1 - e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^i}{i!} \qquad f_k(x) = \frac{\alpha(\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha x}$$

$$\alpha \geq 0; \;\; k = 1, 2, \ldots \qquad x \geq 0$$



Содержание

- Особенности моделирования случайных процессов.
- События. Случайные величины.
- **Случайные процессы.**
- Моделирование случайных процессов.

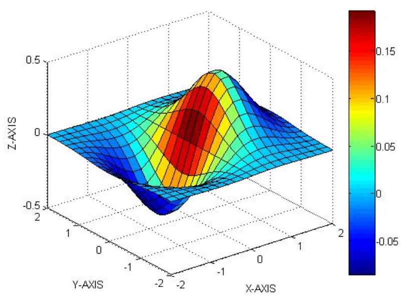


Случайный процесс

Случайный процесс находится в некотором ***состоянии***, если он полностью описывается значениями переменных, которые задают это состояние.

Процесс совершает ***переход*** из одного состояния в другое, если описывающие ее переменные изменяются от значений, задающих одно состояние, на значения, которые определяют другое состояние.

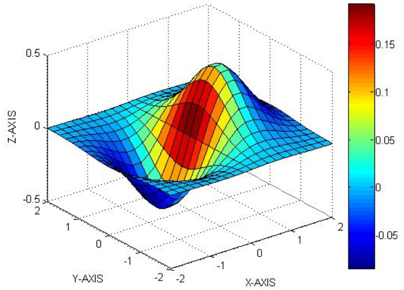
Случайный процесс состоит в том, что с течением времени процесс переходит из одного состояния в другое *заранее не известное состояние*.



Случайный процесс

Если множество состояний, в которых может находиться процесс *счётное*, то есть все возможные состояния могут быть пронумерованы, то соответствующий процесс называется ***случайным процессом с дискретными состояниями*** или просто ***дискретным случайным процессом***.

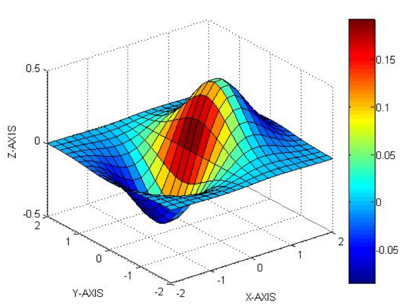
Если множество состояний не может быть пронумеровано, то имеем ***случайный процесс с непрерывными состояниями*** или просто ***непрерывный случайный процесс***, для которого характерен плавный переход из состояния в состояние и который задаётся в виде непрерывной функции времени.



Случайный процесс

Случайный процесс $Z(t)$ называется ***случайным процессом с дискретным временем***, если переходы из состояния в состояние возможны только в строго *определенные заранее фиксированные моменты времени*, которые можно пронумеровать: $t_1, t_2, \ldots$.

Если промежуток времени между переходами из состояния в состояние является *случайным* и переход возможен в любой заранее не известный момент времени t, то процесс называется ***случайным процессом с непрерывным временем***.



Марковские процессы

Случайный процесс называется ***марковским***, если вероятность любого состояния в будущем зависит только от его состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом процесс оказался в этом состоянии.

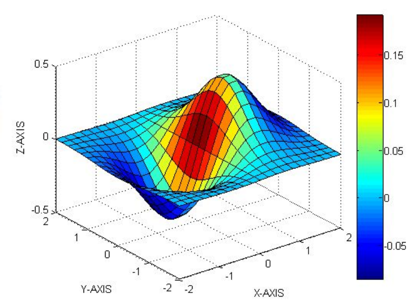
Описывающий поведение системы процесс $Z(t)$ называется **цепью Маркова**.

Для того чтобы случайный процесс *с непрерывным временем* был *марковским*, необходимо, чтобы интервалы времени между соседними переходами из состояния в состояние были распределены по *экспоненциальному закону*.

$$F_{ij}(\tau) = 1 - e^{-\alpha_{ij}\tau}$$

$$P_{ij}(\Delta\tau \mid \tau \geq \tau_0) = \Pr(\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau \mid \tau \geq \tau_0) =$$

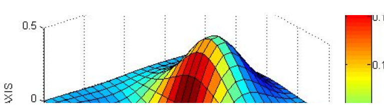
$$= \frac{\Pr(\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau)}{\Pr(\tau \geq \tau_0)} = \frac{F(\tau_0 + \Delta\tau) - F(\tau_0)}{1 - F(\tau_0)} = 1 - e^{-\alpha_{ij}\Delta\tau}$$



Марковские процессы

Для описания марковского случайного процесса с дискретными состояниями используется следующая совокупность параметров:

- **перечень состояний** $\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n$, в которых может находиться случайный процесс;
- **матрица переходов**, описывающая переходы случайного процесса между состояниями в виде:
  - *матрицы вероятностей переходов* **Q** для процессов *с дискретным временем*;
  - *матрицы интенсивностей переходов* **G** для процессов *с непрерывным временем*;
- **начальные вероятности** $p_1(0),\ldots,p_n(0)$.



Марковские процессы

Цепь Маркова называется ***однородной***, если вероятности переходов не зависят от момента времени t_k, и ***неоднородной***, если вероятности переходов являются функциями t_k, то есть $q_{ij} = q_{ij}(k)$.

Вероятности переходов задаются в виде квадратной ***матрицы вероятностей переходов*** $\mathbf{Q} = [q_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}]$, элементы которой удовлетворяют условиям:

$$0 \le q_{ij} \le 1; \quad \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1 \qquad (i, j = \overline{1, n}).$$

Матрица, элементы которой удовлетворяют указанным условиям, называется ***стохастической***.

Процессы с непрерывным временем

Для случайных процессов с непрерывным временем время между переходами из одного состояния в другое случайно. Это означает, что вероятность перехода из одного состояния в другое не может быть задана, поскольку вероятность такого перехода точно в произвольный момент времени t равна нулю.

Интенсивность перехода g_{ij} из состояния $\mathbf{E}_i$ в состояние $\mathbf{E}_j$ определяется как предел отношения вероятности перехода $P_{ij}(\Delta\tau)$ системы за промежуток времени $\Delta\tau$ из $\mathbf{E}_i$ в $\mathbf{E}_j$ к длине этого промежутка:

$$g_{ij} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \qquad (i, j = \overline{1, n};\ i \neq j).$$

Отсюда следует, что вероятность перехода за бесконечно малый промежуток времени $\Delta\tau$ равна: $g_{ij}\Delta\tau \quad (i \neq j)$. Вероятность двух и более переходов за время $\Delta\tau$ имеет порядок $(\Delta\tau)^2$ и выше и предполагается бесконечно малой величиной.

Дифференциальная матрица

Интенсивности переходов задаются в виде квадратной матрицы $\mathbf{G} = [g_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}]$, называемой ***матрицей интенсивностей переходов***, диагональные элементы которой определяются из условия:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

откуда

$$g_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g_{ij} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Матрица, в которой сумма элементов в каждой строке равна нулю, называется ***дифференциальной***.

Вектор состояний системы

- Состояния системы: $\mathbf{E}_1, \ \ldots, \ \mathbf{E}_n$
- Вероятности нахождения системы в состоянии: $p_i(t) = \Pr\{Z(t) = E_i\}$
- Нормировочное условие: $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$
- Стохастический вектор состояний системы: $P(t) = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$

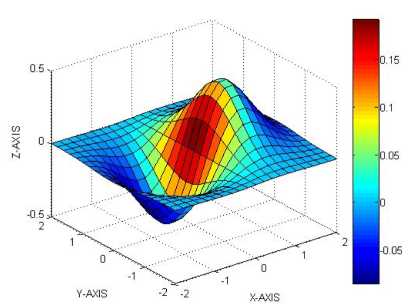
Вектор состояний $P(t) = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$ является основной характеристикой марковского случайного процесса. На основе полученных значений вероятностей состояний случайного процесса, протекающего в исследуемой системе, могут быть рассчитаны представляющие интерес реальные характеристики системы, например для системы массового обслуживания могут быть рассчитаны длины очередей заявок.

Эргодические процессы

Если по истечении достаточно большого промежутка времени вероятности состояний стремятся к предельным значениям $p_1,\ldots,p_n$, не зависящим от начальных вероятностей $p_1(0),\ldots,p_n(0)$ и от текущего момента времени t, то говорят, что случайный процесс обладает ***эргодическим свойством***. Таким образом, для процессов, обладающих эргодическим свойством:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P(\infty) = \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P} = (p_1,\ldots,p_n)$ – вектор вероятностей состояний системы, называемых ***стационарными вероятностями***.



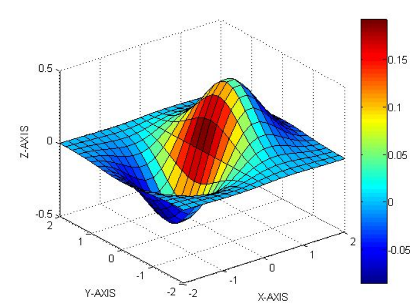
Эргодические процессы

Случайный процесс *с дискретным временем* обладает *эргодическим свойством*, если матрица вероятностей переходов **не является** *периодической* или *разложимой*.

Матрица является **разложимой**, если она может быть приведена к одному из следующих видов:

$$1)\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \qquad 2)\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \qquad 3)\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

где **A, B, C, D**– ненулевые квадратные подматрицы; **0** – нулевая квадратная подматрица.



Эргодические процессы

В первом случае состояния, соответствующие подмножествам **A** и **D**, называются **замкнутыми**, так как система, находясь в каком-то состоянии одного из этих подмножеств, никогда не сможет перейти в какое-либо состояние другого подмножества. Состояния, соответствующие подмножеству **D** во втором случае и подмножеству **A** в третьем случае, называются **невозвратными**, поскольку после того, как процесс покинет эти состояния, невозможен обратный переход в эти состояния из состояний, соответствующих другим подмножествам.

Эргодические процессы

Матрица является **периодической**, если она может быть приведена к виду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Случайный процесс в этом случае будет по очереди переходить из состояний, соответствующих **B**, в состояния, соответствующие **C**.

Марковские процессы с дискретным временем

Для однородного марковского процесса с дискретным временем вероятности состояний на момент времени t_k

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\, q_{ij} \quad (j = \overline{1,n};\ k = 1,\ 2,\ldots)$$

Если рассматриваемый марковский процесс обладает эргодическим свойством, то

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{ij} \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Система линейных алгебраических уравнений для расчёта стационарных вероятностей состояний марковского процесса, которая обладает единственным решением, если **Q** – эргодическая матрица.

Марковские процессы с непрерывным временем

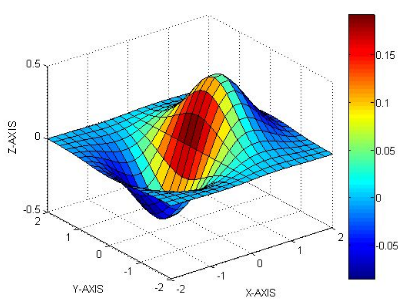
Для однородного марковского процесса с непрерывным временем вероятности состояний на произвольный момент времени t определяются из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, g_{ij} \quad (j = \overline{1,n};\ \ t > 0)$$

с учетом начальных условий $p_1(0), \ldots, p_n(0)$.

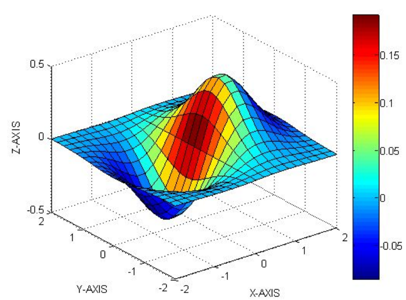
Для систем обладающих эргодическим свойством

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$



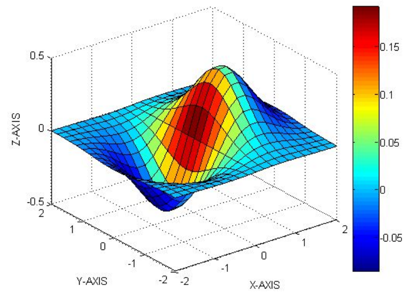
Содержание

- Особенности моделирования случайных процессов.
- События. Случайные величины.
- Случайные процессы.
- **Моделирование случайных процессов.**



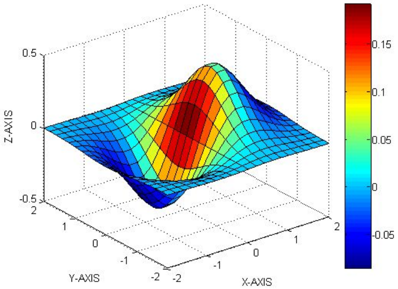
Моделирование марковских процессов

Правило 1 (по графу переходов). В левой части каждого уравнения записывается вероятность рассматриваемого состояния, умноженная на сумму интенсивностей переходов из данного состояния во все другие состояния. Правая часть уравнения представляет собой сумму членов, число которых равно числу входящих в данное состояние дуг, и каждый такой член представляет собой произведение интенсивности перехода, соответствующей данной дуге, на вероятность состояния, из которого исходит эта дуга.



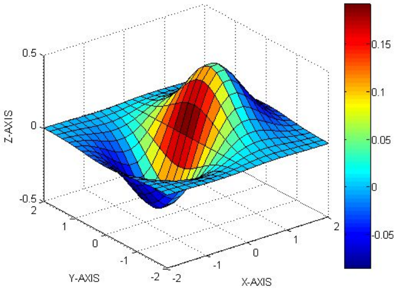
Моделирование марковских процессов

$$
\begin{cases}
\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \\
(\lambda_1 + \mu_1) p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 \\
\ldots \\
(\lambda_k + \mu_k) p_k = \lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1} \\
\ldots \\
\mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} \\
p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1
\end{cases}
$$



Моделирование марковских процессов

Правило 2 (по матрице интенсивностей переходов). Для каждого столбца матрицы интенсивностей переходов составляется соответствующее уравнение как сумма произведений интенсивностей переходов на стационарную вероятность состояния с номером соответствующей строки, приравненная нулю.



Моделирование марковских процессов

$$\begin{cases} -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0 \\ -(\lambda_1 + \mu_1) p_1 + \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = 0 \\ \ldots \\ -(\lambda_k + \mu_k) p_k + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1} = 0 \\ \ldots \\ -\mu_n p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1} = 0 \\ p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1 \end{cases}$$