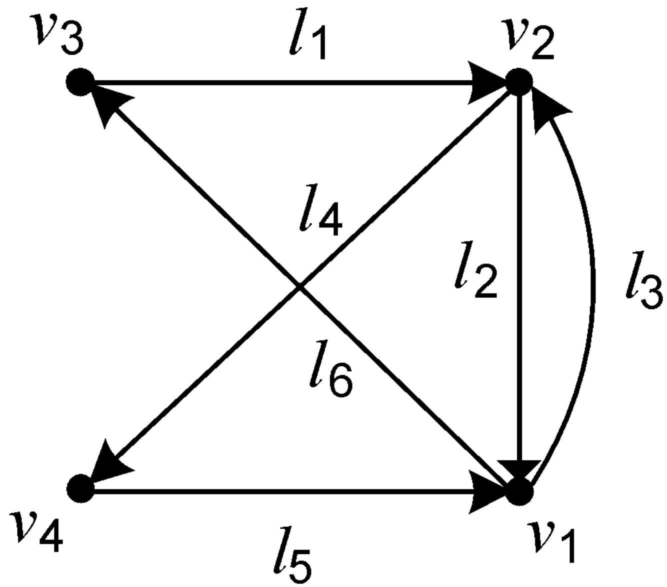
Лекция 6 – по курсу «Сетевые методы и графы в автоматизированном управлении»

Алгоритмы,формулы и рисунки

Ориентированный эйлеров граф

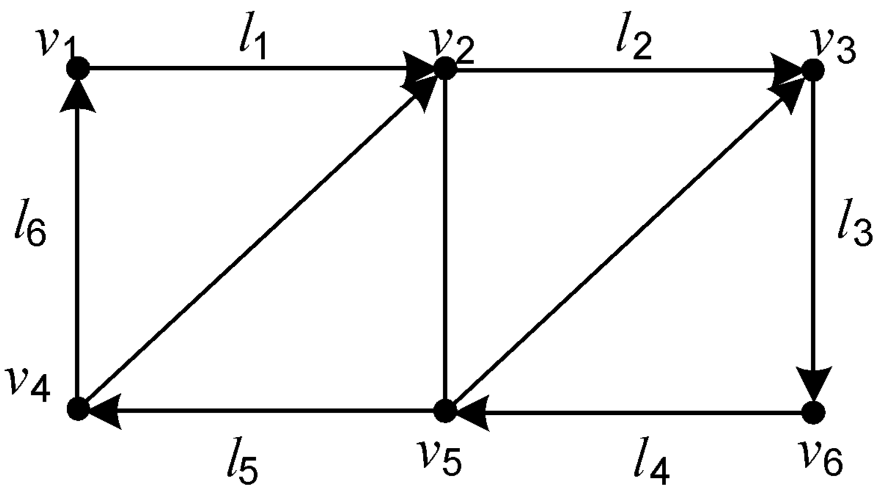


Теорема, сформулированная для неориентированных графов. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны.

Для ориентированных графов преобразуется в условие такое, что для любой вершины V справедливо:

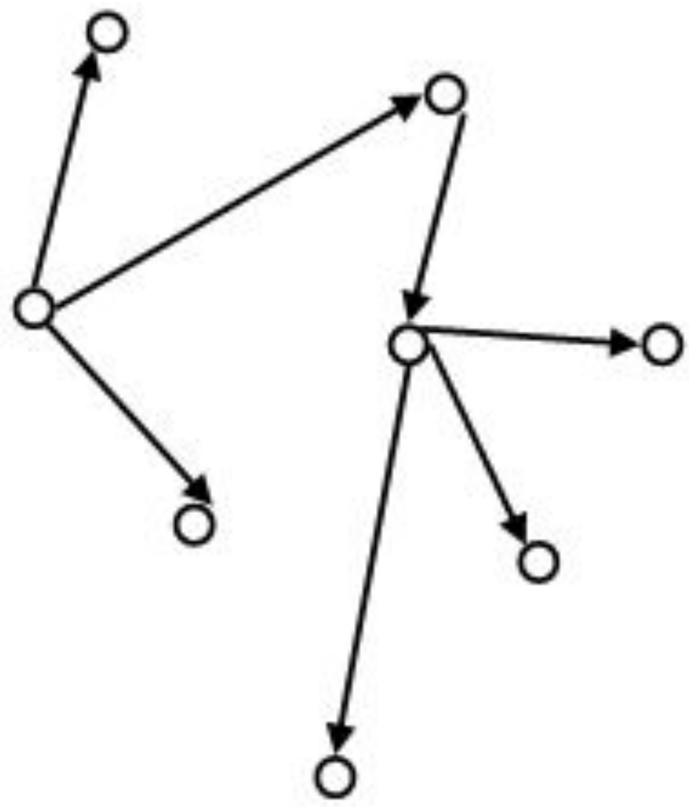
$$\mathbf{d^{-}(V)=d^{+}(V).}$$

Ориентированный гамильтонов граф



Сильносвязный полный ориентированный граф является гамильтоновым

Ациклический ориентированный граф



По отношению к ациклическому ориентированному графу справедливо следующее утверждение:

вершины ациклического ориентированного графа **G** с **n** вершинами

можно пометить таким образом целыми числами из множества **{ 1,2,…, n}**, что

если в графе имеется дуга **(i,j)**, то **i < j**,

т.е. каждая дуга направлена от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

Такое упорядочение вершин называется **топологической сортировкой**.

Топологическая сортировка

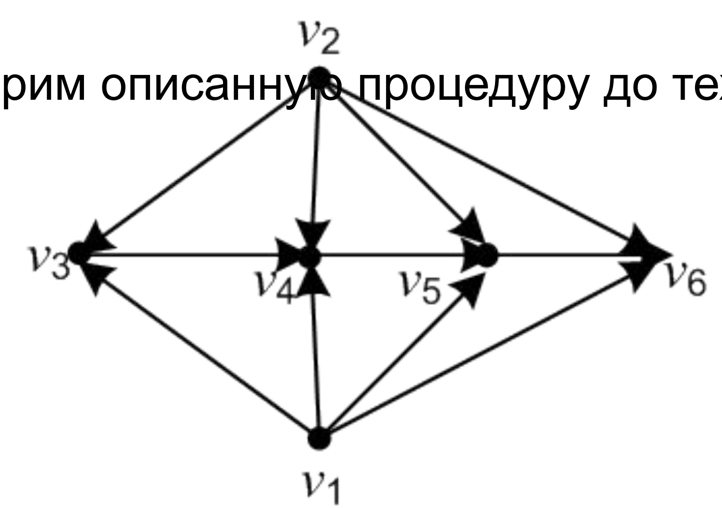
Теорема: в ациклическом ориентированном графе имеются по крайней мере
- одна вершина с нулевой полустепенью захода
- и одна вершина с нулевой полустепенью исхода.

Шаг 1: Выберем произвольную вершину с нулевой полустепенью исхода, пометим ее **n**.

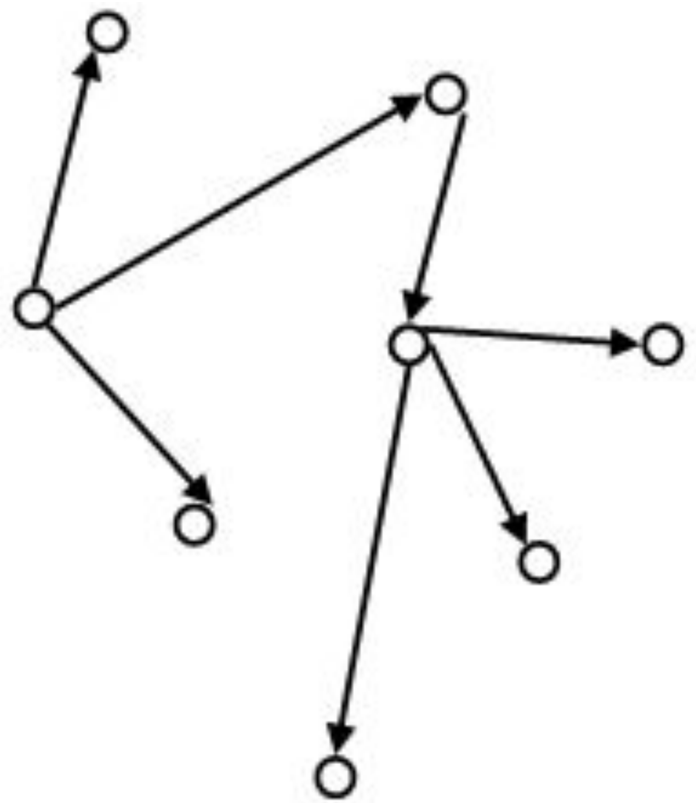
Шаг 2: Удалим из графа эту вершину и инцидентные ей дуги.

Шаг 3: Получившийся граф также является ациклическим, поэтому в нем можно выбрать вершину с нулевой полустепенью исхода и пометим эту вершину **n-1**.

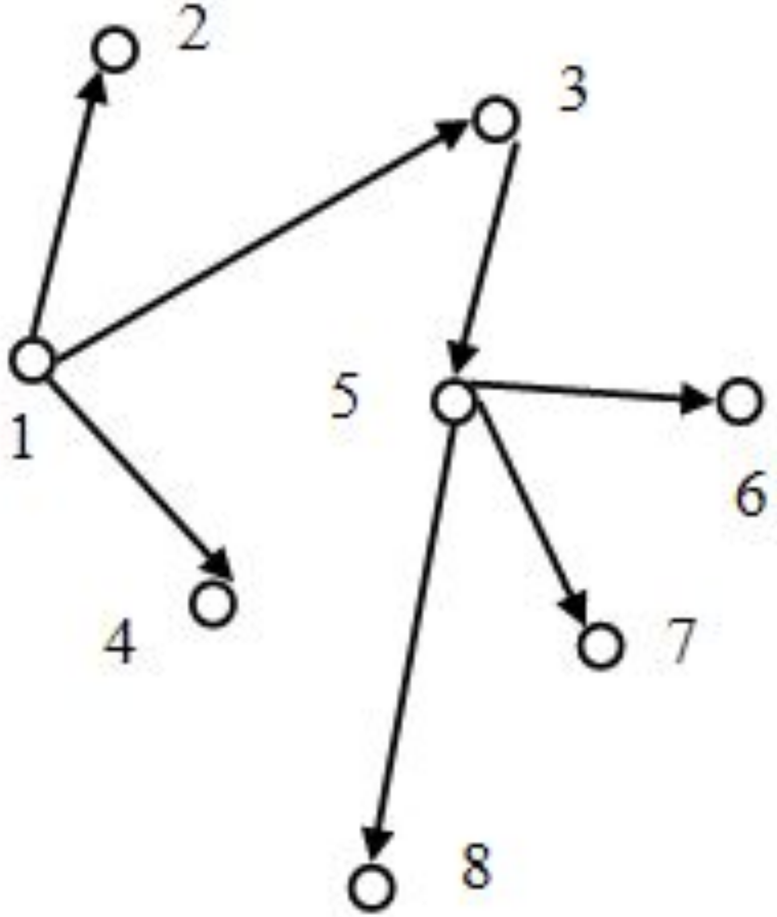
Повторим описанную процедуру до тех пор, пока не пометим все вершины.

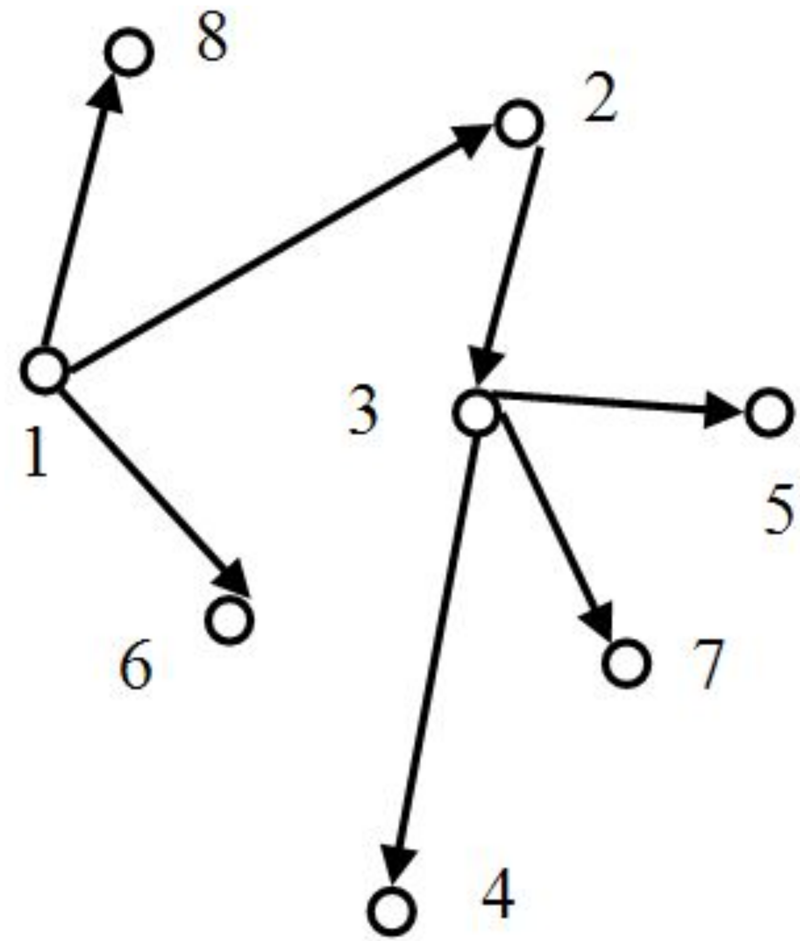


Задание: выполнить топологическую сортировку для графа



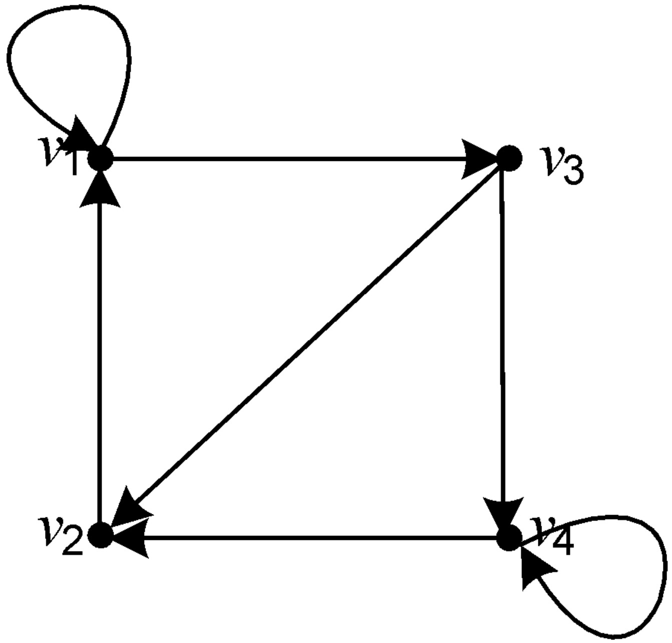
Результат топологической сортировки





Матрица смежности ориентированного графа

Пусть **G=(V, E)** – ориентированный граф без параллельных дуг, в котором **V={V_1,V_2,…,Vn}**.



Матрица смежности **A**=[**a_{ij}**] графа называется матрица порядка **n×n** элементы, которой **a_{ij}** определяются следующим образом:

$$\mathbf{a_{ij}}=\begin{cases}1,\text{если } (v_i, v_j)\in E\\ 0,\text{в противном случае.}\end{cases}$$

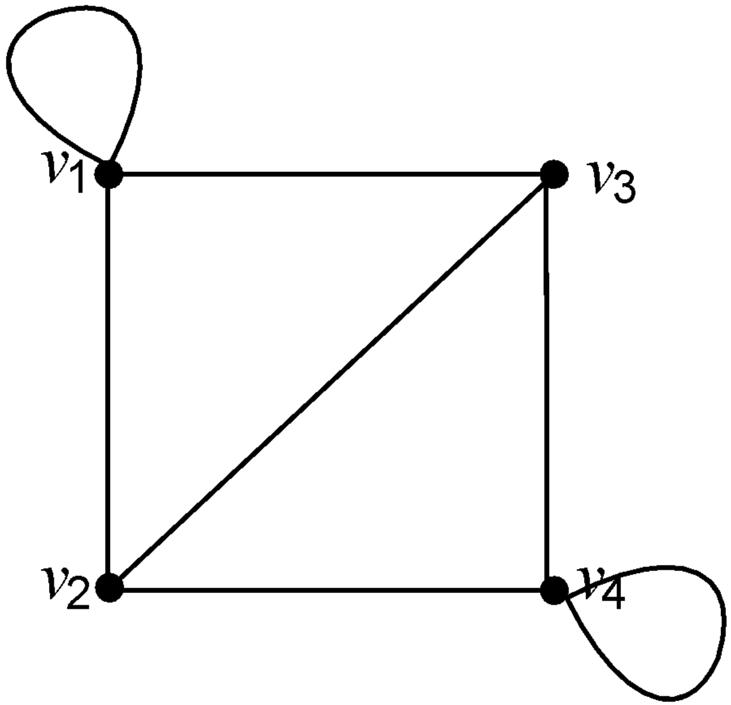
	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	0	1	0
V_2	1	0	0	0
V_3	0	1	0	1
V_4	0	1	0	1

Сумма всех элементов строки **V_i** матрицы дает полустепень исхода вершины **V_i** ,

а сумма элементов столбца **V_i** – полустепень захода вершины **V_i**.

Матрица смежности неориентированного графа

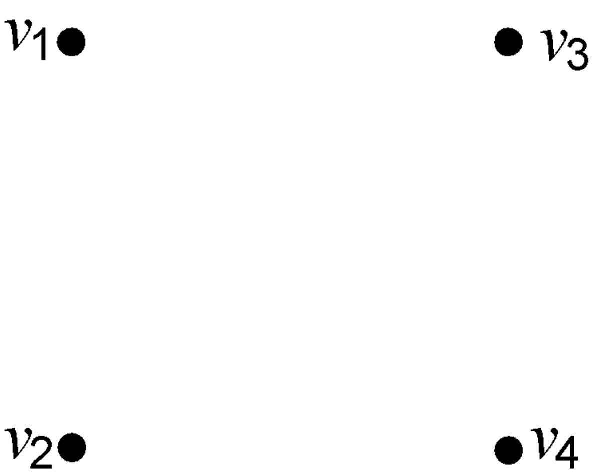
В случае неориентированного графа a_{ij}**=1** тогда и только тогда, когда существует ребро, соединяющее вершины V_i и V_j



	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	1	1	0
V_2	1	0	1	1
V_3	1	1	0	1
V_4	0	1	1	1

Сумма всех элементов строки V_i матрицы равна сумме элементов столбца V_i и равна степени вершины V_i.

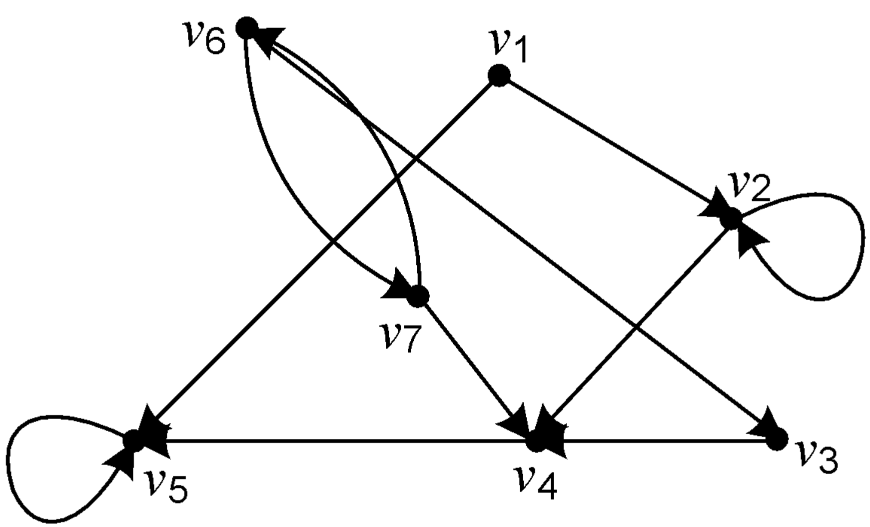
Матрицей смежности несвязного графа является нулевая матрица порядка **n×n**



	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	0	0	0
V_2	0	0	0	0
V_3	0	0	0	0
V_4	0	0	0	0

Матрица достижимостей $R=[r_{ij}]$

$$r_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если вершина } v_i \text{ достижиа из } v_j \\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$$



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	1	1	0	1	1	0	0
V_2	0	1	0	1	1	0	0
V_3	0	0	1	1	1	0	0
V_4	0	0	0	1	1	0	0
V_5	0	0	0	0	1	0	0
V_6	0	0	1	1	1	1	1
V_7	0	0	1	1	1	1	1

Все диагональные элементы в матрице **R** равны 1, поскольку каждая вершина достижима из себя самой.

Вопрос 1. Как будет выглядеть матрица достижимости для неоринтированного графа?

Вопрос 2. Как будет выглядеть матрица достижимости для несвязного графа?

Матрица инциденций $B=[b_{ij}]$

Рассмотрим граф **G** на **n** вершинах и **m** ребрах

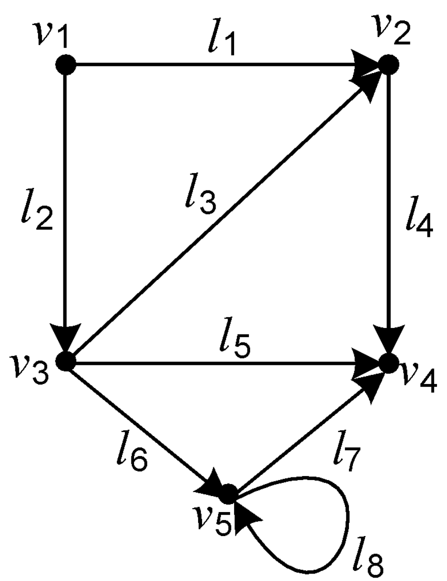
Если граф G ориентированный

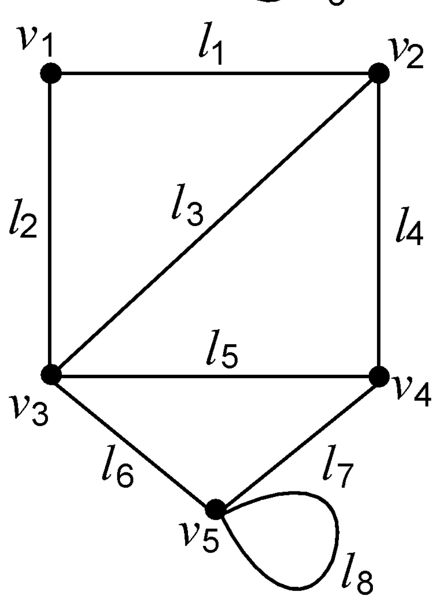
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ яявляетс начальной вершиной дуги } l_i \\ -1, \text{если } v_i \text{ яявляетс конечной вершиной дуги } l_i \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Если граф G неориентированный

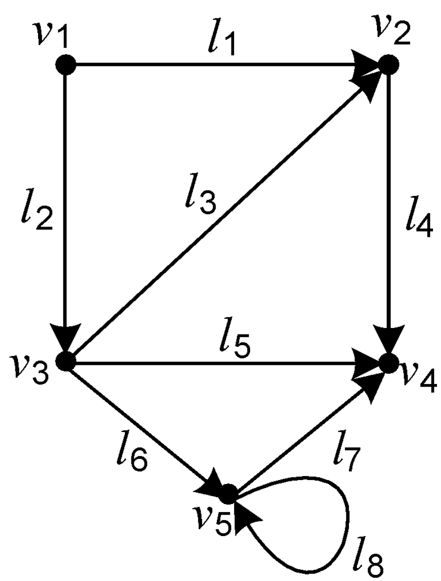
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если ребро } l_i \text{ инцидентно вершине } v_i \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Построить матрицы инциденций для графов:

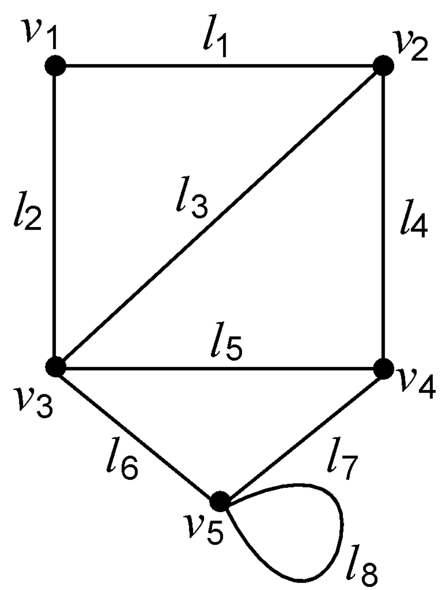




Построить матрицы инциденций для графов:



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
V_1	1	1	0	0	0	0	0	0
V_2	-1	0	-1	1	0	0	0	0
V_3	0	-1	1	0	1	1	0	0
V_4	0	0	0	-1	-1	0	-1	0
V_5	0	0	0	0	0	-1	1	0



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
V_1	1	1	0	0	0	0	0	0
V_2	1	0	1	1	0	0	0	0
V_3	0	1	1	0	1	1	0	0
V_4	0	0	0	1	1	0	1	0
V_5	0	0	0	0	0	1	1	0

Свойства матриц инциденций для графов:

Свойства матрицы инцидентности неориентированного графа.

1. Сумма элементов матрицы на i-й строке равна степени вершины i.
2. Сумма элементов матрицы по i-му столбцы равна 2.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
V_1	1	1	0	0	0	0	0	0
V_2	1	0	1	1	0	0	0	0
V_3	0	1	1	0	1	1	0	0
V_4	0	0	0	1	1	0	1	0
V_5	0	0	0	0	0	1	1	0

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
V_1	1	1	0	0	0	0	0	0
V_2	-1	0	-1	1	0	0	0	0
V_3	0	-1	1	0	1	1	0	0
V_4	0	0	0	-1	-1	0	-1	0
V_5	0	0	0	0	0	-1	1	0

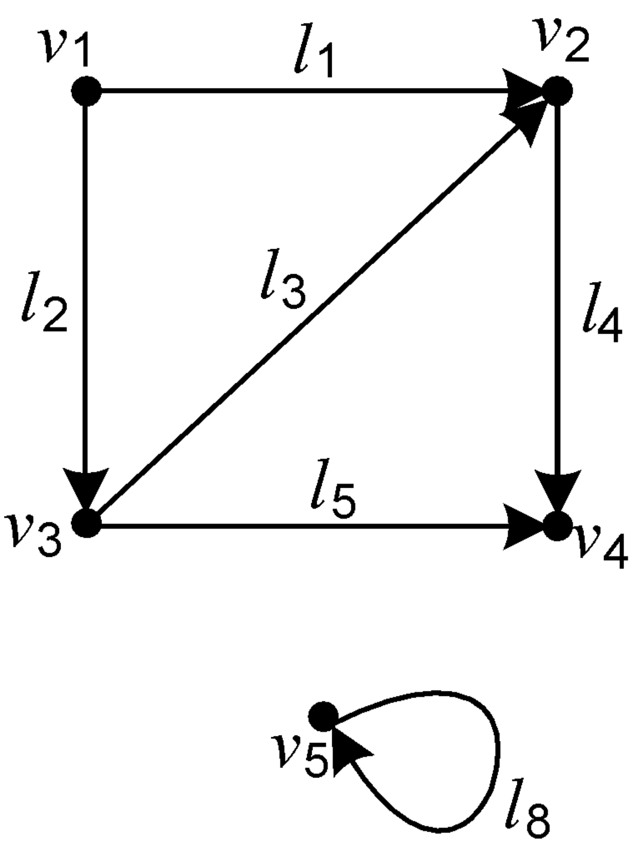
Свойства матрици инцидентности орграфа.

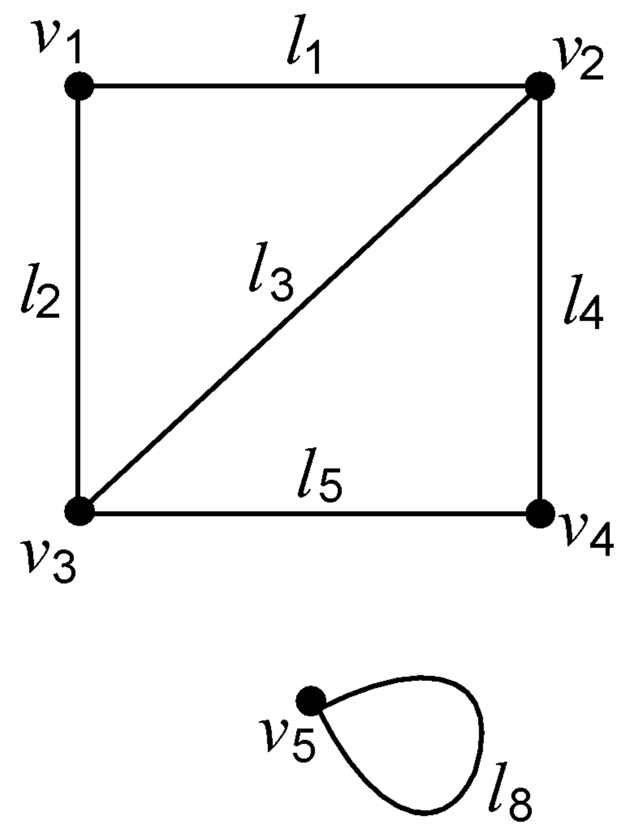
1. Сумма строк матрицы B(G) является нулевой строкой.
2. Любая строка матрицы B(G) является линейной комбинацией остальных строк.
3. Ранг матрицы B(G) равен p-1.

В случае **связных орграфов** <u>ранг матрицы инциденций</u> **B** равен **n-1**.

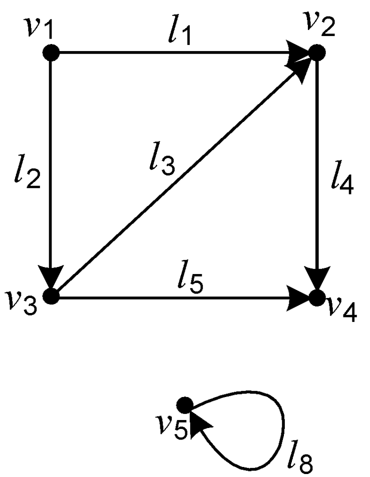
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
V_1	1	1	0	0	0	0	0	0
V_2	0	1	-1	1	0	0	0	0
V_3	0	0	0	1	1	1	0	0
V_4	0	0	0	0	0	1	-1	0
V_5	0	0	0	0	0	0	0	0

Построить матрицы инциденций для графов:



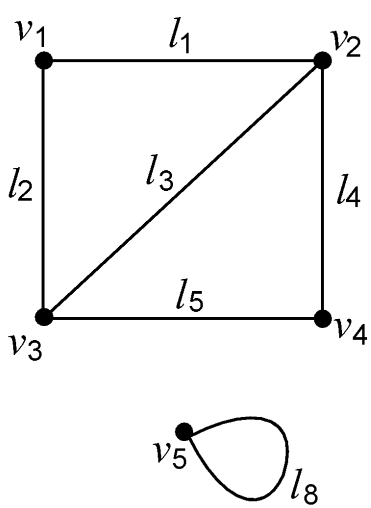


Построить матрицы инциденций для графов:



	e1	e2	e3	e4	e5	e8
V1	1	1	0	0	0	0
V2	-1	0	-1	1	0	0
V3	0	-1	1	0	1	0
V4	0	0	0	-1	-1	0
V5	0	0	0	0	0	0

	e1	e2	e3	e4	e5	e8
V1	1	1	0	0	0	0
V2	0	1	-1	1	0	0
V3	0	-1	1	0	1	0
V4	0	0	0	0	0	0
V5	0	0	0	0	0	0



	e1	e2	e3	e4	e5	e8
V1	1	1	0	0	0	0
V2	1	0	1	1	0	0
V3	0	1	1	0	1	0
V4	0	0	0	1	1	0
V5	0	0	0	0	0	0