Раздел 7

Линейный анализ устойчивости

Теория устойчивости

- Запишем уравнение равновесия конструкции, к которой приложена система постоянных сил, в следующем виде:

$$[K] \{ u \} = \{ P \}$$

- Рассмотрим эффект дифференциальной (геометрической) жесткости. *Дифференциальная жесткость* $[K_d]$ появляется в результате учета членов высокого порядка в зависимостях деформация-перемещение. Эти зависимости подразумевают, что перемещения в конструкции не зависят от интенсивности нагрузки.

Теория устойчивости (продолжение)

- Пусть λ произвольный скалярный множитель для другой "интенсивности" нагрузки.

$$([K] + \lambda[K_D])\{u^*\} = \{\lambda P\}$$

- При нагружении конструкции данной силой с различной интенсивностью, могут быть найдены несколько положений неустойчивого равновесия. Эти положения равновесия являются решениями задачи на собственные значения.

$$([K] + \lambda[K_D])\{\delta u^*\} = 0$$

Решение задачи на собственные значения

$$[K - \lambda K_d] \{\varphi\} = 0 \qquad (1)$$

- Решение нетривиально (отлично от нуля) только для определенных значений $\lambda = \lambda_i$ для i = 1, 2, 3,…, n,

  которые делают матрицу $[K - \lambda K_d]$ сингулярной.

Решение задачи на собственные значения (продолжение)

- Каждому собственному значению λ_i, соответствует единственный собственный вектор $\{ \varphi_i \}$.
- $\{ \varphi_i \}$ может быть масштабирован с помощью любого скалярного множителя и по прежнему оставаться решением уравнения (1).
- Компоненты вектора $\{ \varphi_i \}$ - вещественные числа.

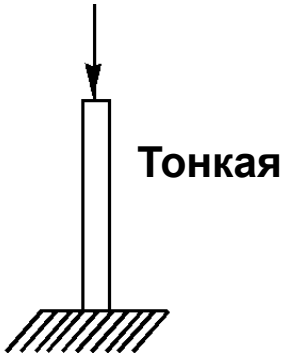
Последовательности решений для задач устойчивости

- **SOL 105 Линейная устойчивость**
- **SOL 106 Нелинейная устойчивость**

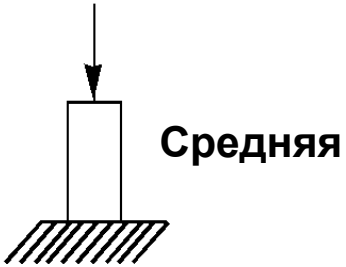
- **Ограничения для SOL 105**
  - Требования к конструкции до потери устойчивости:
    - Перемещения должны быть малы.
    - Напряжения должны быть в упругой области (и линейно зависеть от деформаций).

Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

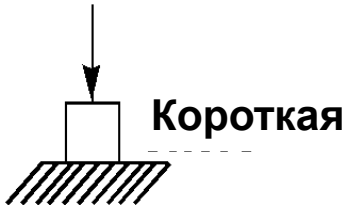
- Пример: Три класса колонн (под центральной нагрузкой, материал без дефектов)



Теряет форму из-за потери устойчивости. Прогиб, при потере устойчивости мал и критическая нагрузка не достигает предела текучести материала. Это колонна Эйлера.



Причина потери формы – комбинация текучести и потери устойчивости. Прогиб при потере устойчивости мал, но некоторые напряжения превышают предел упругости материала.



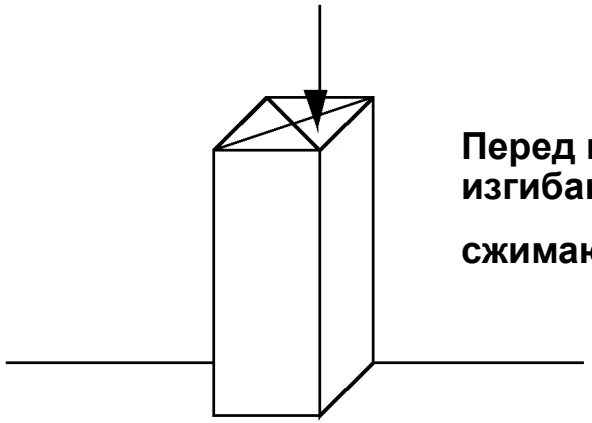
Причина потери формы – текучесть (также, как при тестовом сжатии образца)

Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

- **Примечание:**
  - SOL 105 может применяться для конструкций с небольшими дефектами материала или с очень малым эксцентриситетом нагрузки (например, когда нагрузка направлена не строго в центр и приводит к небольшому изгибу).
    Здесь инженеру надо исходить из здравого смысла.
  - Те же соображения применимы при анализе пластин.

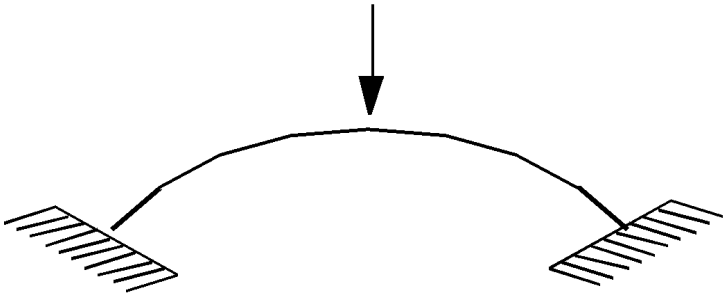
Примеры нелинейного анализа устойчивости

- Колонна под нагрузкой с большим эксцентриситетом



Перед потерей устойчивости возникают большие изгибающие напряжения, такие же как и сжимающие осевые напряжения.

- Процелкивание тонкой оболочки (подобно дну бака)



Перед потерей устойчивости возникают большие прогибы, и возможно не упругое поведение конструкции.

Правила для анализа устойчивости SOL 105

- **(Для справки необходимо смотреть** *раздел 13, MSC NASTRAN Linear Statics Users Guide***)**
- **Секция CASE CONTROL должна содержать не менее двух SUBCASE.**
- **Запросы на вывод, которые относятся только к решению статической задачи должны быть помещены в первом SUBCASE.**
- **METHOD должен появиться в отдельном SUBCASE для выбора записей EIGB или EIGRL из секции BULK DATA для решения задач устойчивости.**
- **Если имеется несколько статических решений, тогда используйте команду STATSUB для выбора варианта одного из статических решений для дальнейшего решения задачи устойчивости.**

Правила для анализа устойчивости SOL 105 (продолжение)

- Если необходимо, могут использоваться различные условия в SPC узлах в SUBCASE статического решения и SUBCASE решения задачи устойчивости.
- Запросы на вывод могут быть помещены в любом выбранном SUBCASE.
- Запросы на вывод, действующие одновременно и в статическом расчете и в анализе устойчивости могут быть помещены выше уровня SUBCASE.

Записи для линейного анализа устойчивости

- Секция EXECUTIVE CONTROL

SOL 105

- Секция CASE CONTROL

SUBCASE 1 LOAD = M	Определяет условия статического нагружения (LOAD, TEMP, DEFORM)
SUBCASE 2	Выбирает метод нахождения собственных значений
METHOD = N STATSUB = i	Выбирает SUBCASE статического решения чтобы использовать его для решения задачи устойчивости (по умолчанию берется первый SUBCASE)

Записи для линейного анализа устойчивости (продолжение)

- **Секция CASE CONTROL должна содержать не менее двух SUBCASE.**

- **Секция BULK DATA**
- **Определение условий статического нагружения**
- **EIGB** Данные для нахождения собственного значения

или

- **EIGRL** Данные для нахождения собственного значения по методу Ланцоша.

Запись EIGRL

- **EIGRL Рекомендуемая запись для расчета устойчивости**
  - Определяет данные, необходимые для проведения решения задачи на собственные значения и анализа устойчивости методом Ланцоша.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGRL	**SID**	**V1**	**V2**	**ND**	**MSGLVL**	**MAXSET**	**SHFSCL**	**NORM**	
EIGRL	**1**	**0.1**	**3.2**	**10**					

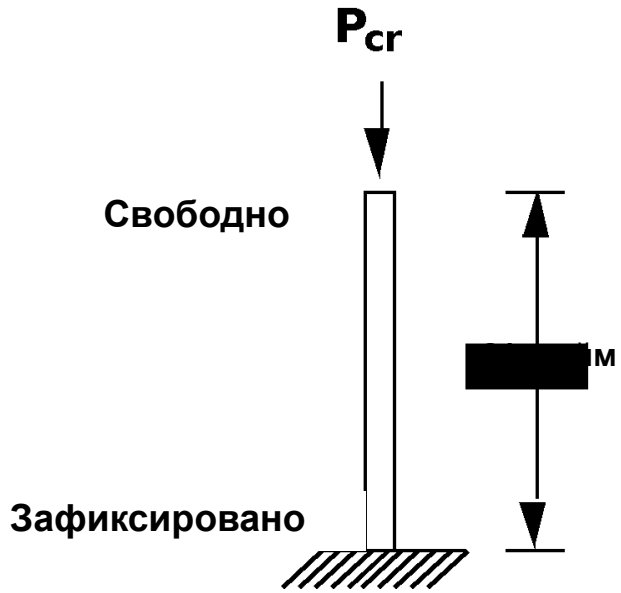
Запись EIGRL (продолжение)

Поле **Содержание**

- SID Идентификатор набора (уникальное целое число > 0)
- V1, V2 Анализ вибрации: диапазон интересующих частот.
  Анализ устойчивости: диапазон интересующих l.
  Если необходимы все моды ниже определенной частоты, то установите V2 на это значение и оставьте V1 пустым.
  Не рекомендуется приравнивать V1 к нулю. Эффективнее использовать небольшое отрицательное значение или оставить его пустым.
- ND Число необходимых корней (целое > 0 или оставлять чистым)
- MSGLVL Уровень диагностики (целое, от 0 до 3 или оставлять чистым)
- MAXSET Число векторов в блоке (целое, от 1 до 15 или оставлять чистым)

Пример - простая колонна Эйлера

- **Задача:**
  - Найти критическую нагрузку и соответствующую ей первую форму потери устойчивости цилиндрического стержня.



Круглое сечение

Диаметр = 0.25 дюйма

E **= 30.E+6 фунтов/дюйм^2**

I **= 1.917E-4 дюйм^4**

Площадь = 4.909E-2 дюйм^2

Пример - простая колонна Эйлера (продолжение)

- Теоретическое решение

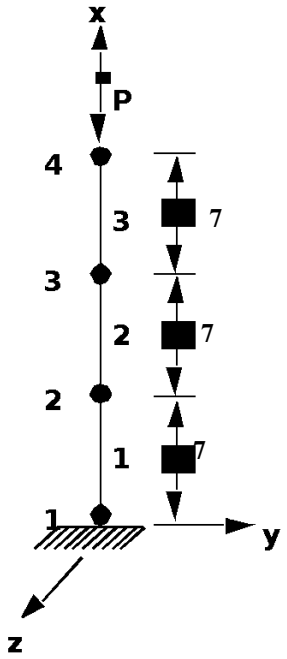
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} = 32{,}18 \text{ фунта}$$

где L_{eff} – эффективная длина колонны

$L_{eff} = 2L$ – для свободно опертой колонны

Пример - простая колонна Эйлера
(продолжение)

- **Модель MSC Nastran**



Решение MSC Nastran

Значение силы в записи FORCE

$$P_{cr} = \square 32.18 \times 1.0 = \square 32.18 \text{ фунта}$$

Собственное значение

Пример – простая колонна Эйлера – входной файл

```
sol 105
cend
$
title = buckling of fixed-free beam
disp = all
$
echo = punch
spc = 10
subcase 1
 label = static subcase
 load = 5
subcase 2
 label = buckling subcase
 method = 100
$
begin bulk
$
CBEAM    1        1        1        2        0.       0.       1.
CBEAM    2        1        2        3        0.       0.       1.
CBEAM    3        1        3        4        0.       0.       1.
EIGRL    100                        1
FORCE    5        4                1.       -1.
GRID     1                 0.       0.       0.                 345
GRID     2                 7.       0.       0.                 345
GRID     3                 14.      0.       0.                 345
GRID     4                 21.      0.       0.                 345
MAT1     2        30.E6              .33
PBEAM    1        2        4.909E-21.917E-41.917E-4             3.835E-4
SPC1     10       123456   1
enddata
```

Пример – простая колонна Эйлера – выходной файл

- **Первое собственное значение:**
  Pcr = λ_1 x 10 фунтов = 32.18 фунта
- **Первый собственный вектор**
  (дает форму потери устойчивости)

```
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                    OCTOBER  17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00   PAG

                                                                                                  SUBCASE 2

                                        R E A L   E I G E N V A L U E S
MODE    EXTRACTION      EIGENVALUE          RADIANS            CYCLES          GENERALIZED        GENERALIZED
 NO.       ORDER                                                                  MASS             STIFFNESS
    1         1        3.217839E+01       5.672600E+00       9.028223E-01       5.873539E-02       1.890010E+00
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                    OCTOBER  17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00   PAG

                                                                                                  SUBCASE 2
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                    OCTOBER  17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00   PAG

 BUCKLING SUBCASE                                                                                 SUBCASE 2
 EIGENVALUE =  3.217839E+01
                                  R E A L   E I G E N V E C T O R   N O .        1

 POINT ID.   TYPE          T1              T2              T3              R1              R2              R3
       1      G       0.0             0.0             0.0             0.0             0.0             0.0
       2      G       4.118373E-18    1.339746E-01    0.0             0.0             0.0             3.739763E-02
       3      G       7.290629E-18    5.000000E-01    0.0             0.0             0.0             6.477460E-02
       4      G       8.820291E-18    1.000000E+00    0.0             0.0             0.0             7.479527E-02
```

Литература по анализу устойчивости

- **MSC Seminar Notes, “***MSC NASTRAN Material and Geometric Nonlinear Analysis***”:**
- **MSC Nastran Linear Static Analysis Users Guide, Section 13.**
- **MSC Nastran Verification Problem Manual (***Version 64, January 1986 Edition***):**
  - Problem 3.0501A, “Lateral Buckling of a Cantilever Beam”
  - Problem 3.0502A, “Simple Frame Analysis with Buckling”
  - Problem 3.7701S, “Euler Buckling of a Simply Supported Beam”

Литература по анализу устойчивости (продолжение)

- **MSC Nastran Demonstration Problem Manual (*Version 64, March 1985 Edition*):**
  - Under Elastic Stability Analysis, see Demonstration Problem D0504A, “Flexural Buckling of a Beam”
- **MSC Nastran Application Notes**
  - October 1978 “Buckling and Real Eigenvalue Analysis of Laminated Plates”
  - September 1979 “Static Stability of Structures with Nonlinear Differential Stiffness”
  - February 1982 “Elastic-Plastic Buckling of a Thin Spherical Shell”
  - November 1985 “Nonlinear Buckling Analysis”

Пример 9

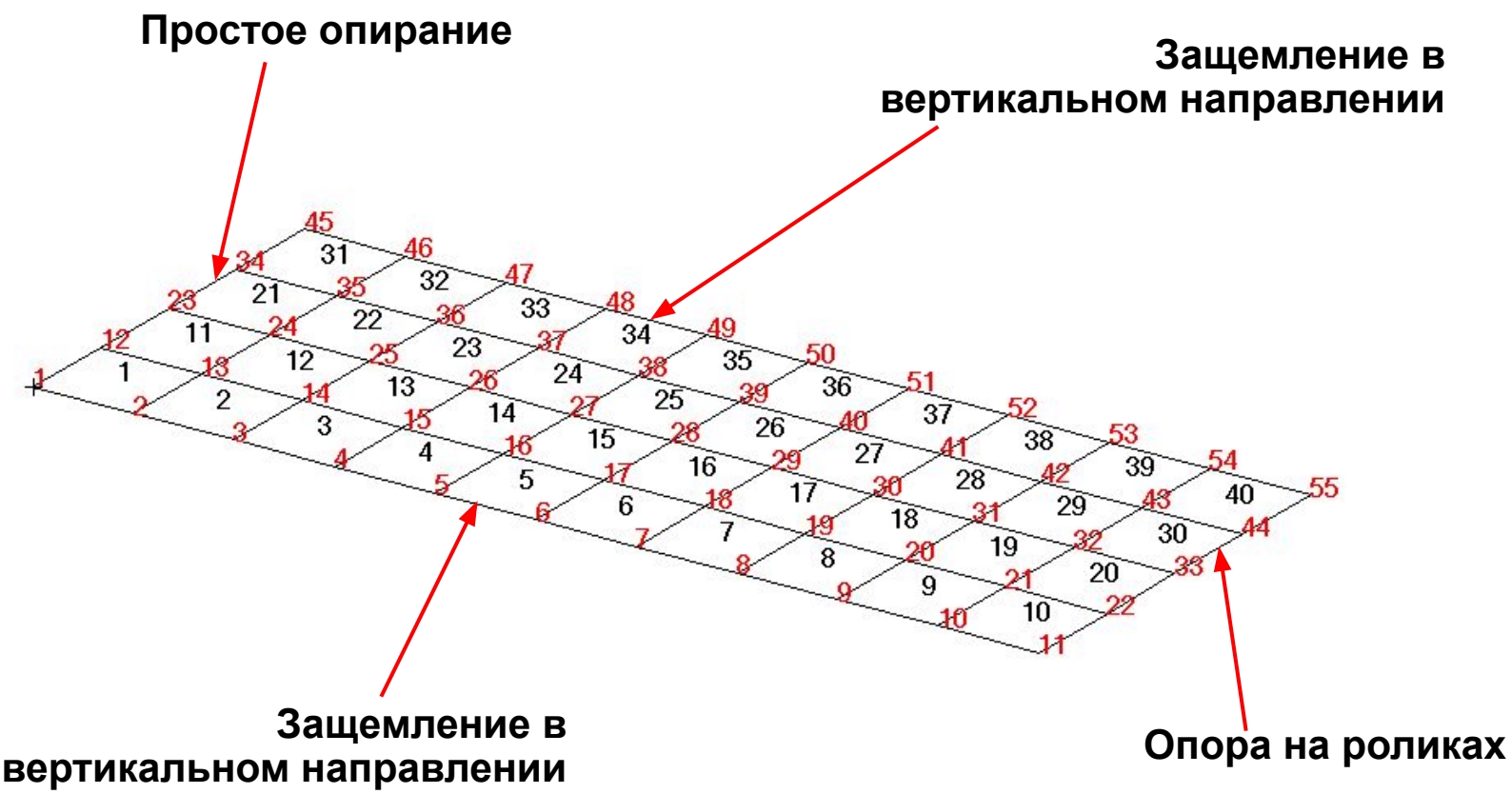
Анализ устойчивости пластины

Пример 9 (продолжение)

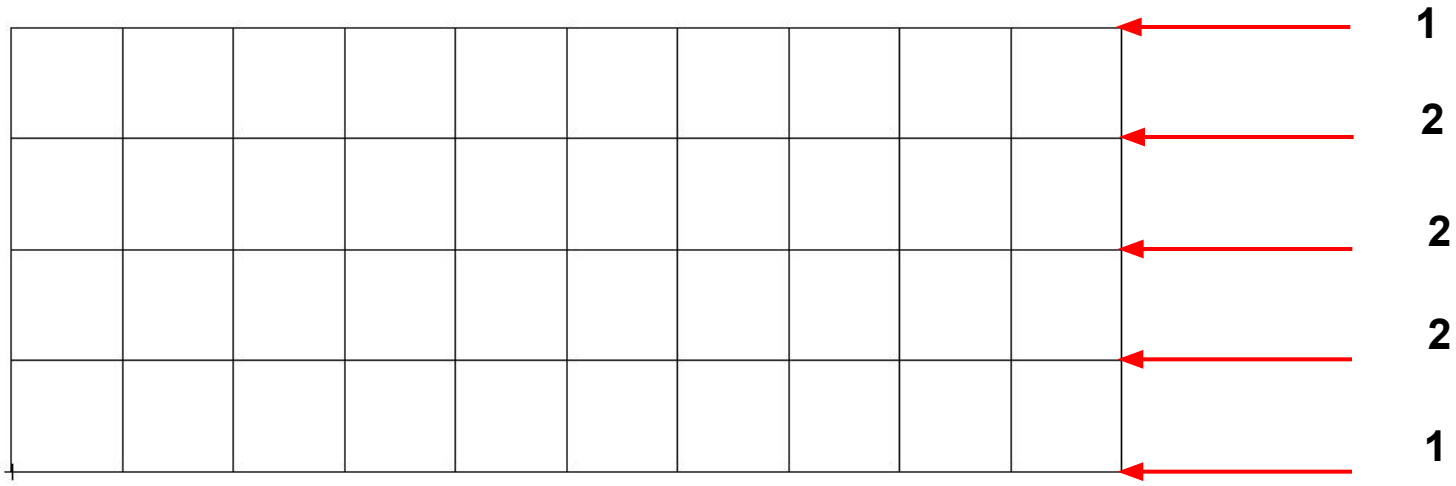
- **Описание модели**
  - Та же самая модель панели, что и в примере 5, без подкреплений.
  - В этой модели применены следующие граничные условия:
    - Опирание на левом конце
    - “Ролики” на правом конце
    - Нулевые вертикальные перемещения на верхней и нижней гранях
  - Приложим 100 фунт/дюйм2 сжимающие нагрузки к правому краю пластины
    - Общая нагрузка на правой стороне = (100) (8) (.01) = 8
      - Приложим 1 фунт в каждый из узлов 11 и 55 сетки
      - Приложим 2 фунта в каждый из узлов 22, 33 и 44 сетки

Пример 9 (продолжение)

– Граничные условия



Пример 9 (продолжение)
– Приложенные нагрузки



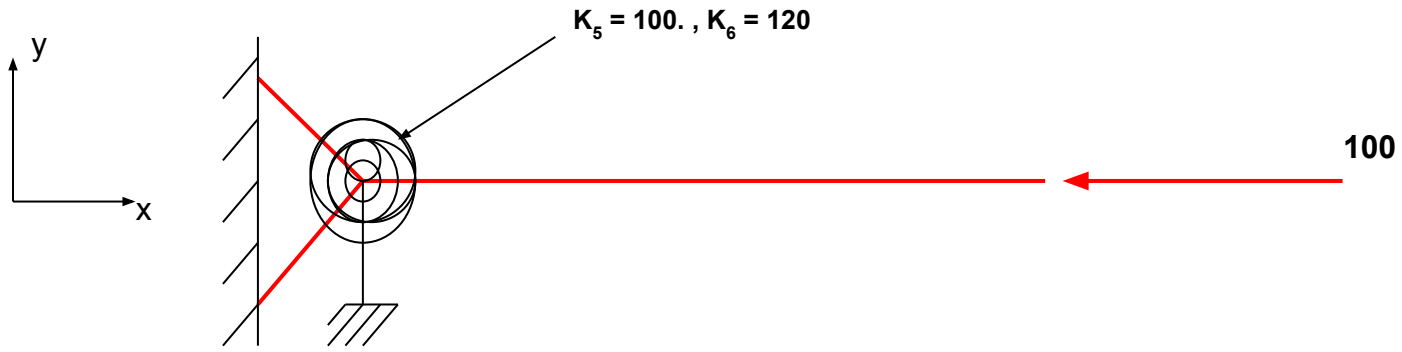
Жесткие элементы Лагранжа

- Новые жесткие элементы Лагранжа поддерживают дифференциальную жесткость
- Новые жесткие элементы Лагранжа поддерживают задачи на устойчивость
- В настоящее время решение SOL 105 (линейная задача устойчивости) поддерживает только метод исключений Лагранжа (error 1-11842201)

Усовершенствования жестких элементов (продолжение)

- **Пример:**

Анализ устойчивости модели двумя методами



- **Жесткие элементы Лагранжа**
- **Жесткая балка**

Усовершенствования жестких элементов (продолжение)

Входной файл (элементы Лагранжа)

```
$
$   lagrange1.dat
$
SOL 105
CEND
TITLE = BUCKLING ANALYSIS - RBAR
SUBTI = LAGRANGE ELIMINATION METHOD
DISP = ALL
SPC  = 10
RIGID = LGELIM
SUBCASE 1
LABEL=STATIC PRELOAD CASE
 LOAD = 100
SUBCASE 2
LABEL = BUCKLING CASE
 METHOD = 10
BEGIN BULK
EIGRL,10,,,10
FORCE,100,4 ,0,-100.0,1.0,0.0,0.0
CELAS2,101,100.0,3,5
CELAS2,102,120.0,3,6
GRID, 3 ,,2.0,0.0,0.0
GRID, 4 ,,4.0,0.0,0.0
RBAR, 3,3,4,123456, , ,123456
SPC1,10,1234,3
ENDDATA
```

Входной файл (жесткие балки)

```
$
$   lagrange2.dat
$
SOL 105
CEND
TITLE = BUCKLING ANALYSIS - USE STIFF BEAM
DISP = ALL
SPC  = 10
SUBCASE 1
LABEL=STATIC PRELOAD CASE
 LOAD = 100
SUBCASE 2
LABEL = BUCKLING CASE
 METHOD = 10
BEGIN BULK
EIGRL,10,,,10
FORCE,100,4 ,0,-100.0,1.0,0.0,0.0
CELAS2,101,100.0,3,5
CELAS2,102,120.0,3,6
CBEAM,100,100,3,4,0.,0.,1.
PBEAM,100,1,100.,100.,100.,,100.
MAT1,1,1.E7,,.32
GRID, 3 ,,2.0,0.0,0.0
GRID, 4 ,,4.0,0.0,0.0
SPC1,10,1234,3
ENDDATA
```

Усовершенствования жестких элементов (продолжение)

- **Результаты (жесткие элементы Лагранжа)**

0 STATIC PRELOAD CASE SUBCASE 1

D I S P L A C E M E N T V E C T O R

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
3	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
101000004	L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

R E A L E I G E N V A L U E S

MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	RADIANS	CYCLES	GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
1	1	5.000000E-01	7.071068E-01	1.125395E-01	2.000000E+02	1.000000E+02
2	2	6.000000E-01	7.745967E-01	1.232809E-01	2.000000E+02	1.200000E+02

-

- **Результаты (жесткие балки)**

1 BUCKLING ANALYSIS - USE STIFF BEAM JUNE 5, 2003 MSC.NASTRAN 6/ 2/03 PAGE 12

0 SUBCASE 2

R E A L E I G E N V A L U E S

MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	RADIANS	CYCLES	GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
1	1	4.999999E-01	7.071067E-01	1.125395E-01	5.000000E+01	2.500000E+01
2	2	5.999998E-01	7.745966E-01	1.232809E-01	5.000000E+01	2.999999E+01