

Раздел 7

Линейный анализ устойчивости



Теория устойчивости

- Запишем уравнение равновесия конструкции, к которой приложена система постоянных сил, в следующем виде:

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

- Рассмотрим эффект дифференциальной (геометрической) жесткости. **Дифференциальная жесткость** $[K_d]$ появляется в результате учета членов высокого порядка в зависимостях деформация-перемещение. Эти зависимости подразумевают, что перемещения в конструкции не зависят от интенсивности нагрузки.

Теория устойчивости (продолжение)

- Пусть λ произвольный скалярный множитель для другой "интенсивности" нагрузки.

$$([K] + \lambda [K_D]) \{u^*\} = \{\lambda P\}$$

- При нагружении конструкции данной силой с различной интенсивностью, могут быть найдены несколько положений неустойчивого равновесия. Эти положения равновесия являются решениями задачи на собственные значения.

$$([K] + \lambda [K_D]) \{\delta u^*\} = 0$$

Решение задачи на собственные значения

$$[K - \lambda K_d] \{\phi\} = 0 \quad (1)$$

- Решение нетривиально (отлично от нуля) только для определенных значений $\lambda = \lambda_i$ для $i = 1, 2, 3, \dots, n$, которые делают матрицу $[K - \lambda K_d]$ сингулярной.

Решение задачи на собственные значения (продолжение)

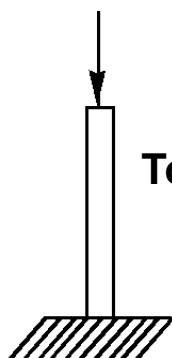
- Каждому собственному значению λ_i , соответствует единственный собственный вектор $\{ \varphi_i \}$.
- $\{ \varphi_i \}$ может быть масштабирован с помощью любого скалярного множителя и по прежнему оставаться решением уравнения (1).
- Компоненты вектора $\{ \varphi_i \}$ - вещественные числа.

Последовательности решений для задач устойчивости

- **SOL 105** Линейная устойчивость
- **SOL 106** Нелинейная устойчивость
- **Ограничения для SOL 105**
 - Требования к конструкции до потери устойчивости:
 - Перемещения должны быть малы.
 - Напряжения должны быть в упругой области (и линейно зависеть от деформаций).

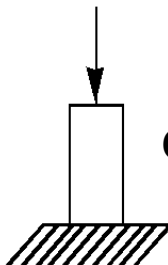
Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

- Пример: Три класса колонн (под центральной нагрузкой, материал без дефектов)



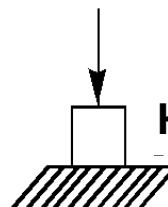
Тонкая

Теряет форму из-за потери устойчивости. Прогиб, при потере устойчивости мал и критическая нагрузка не достигает предела текучести материала. Это колонна Эйлера.



Средняя

Причина потери формы – комбинация текучести и потери устойчивости. Прогиб при потере устойчивости мал, но некоторые напряжения превышают предел упругости материала.



Короткая

Причина потери формы – текучесть (также, как при тестовом сжатии образца)

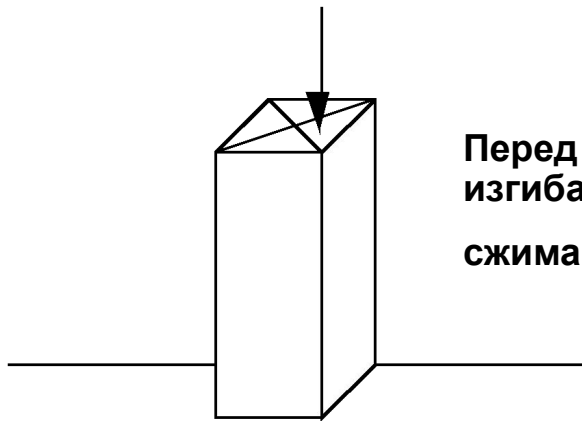
Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

- **Примечание:**

- SOL 105 может применяться для конструкций с небольшими дефектами материала или с очень малым эксцентриситетом нагрузки (например, когда нагрузка направлена не строго в центр и приводит к небольшому изгибу).
Здесь инженеру надо исходить из здравого смысла.
- Те же соображения применимы при анализе пластин.

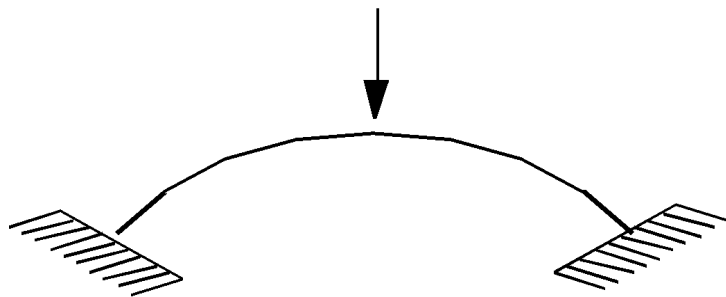
Примеры нелинейного анализа устойчивости

- Колонна под нагрузкой с большим эксцентриситетом



Перед потерей устойчивости возникают большие изгибающие напряжения, такие же как и сжимающие осевые напряжения.

- Процелкивание тонкой оболочки (подобно дну бака)



Перед потерей устойчивости возникают большие прогибы, и возможно не упругое поведение конструкции.

Правила для анализа устойчивости SOL 105

- (Для справки необходимо посмотреть *раздел 13, MSC NASTRAN Linear Statics Users Guide*)
- Секция CASE CONTROL должна содержать не менее двух SUBCASE.
- Запросы на вывод, которые относятся только к решению статической задачи должны быть помещены в первом SUBCASE.
- METHOD должен появиться в отдельном SUBCASE для выбора записей EIGB или EIGRL из секции BULK DATA для решения задач устойчивости.
- Если имеется несколько статических решений, тогда используйте команду STATSUB для выбора варианта одного из статических решений для дальнейшего решения задачи устойчивости.

Правила для анализа устойчивости SOL 105 (продолжение)

- Если необходимо, могут использоваться различные условия в SPC узлах в SUBCASE статического решения и SUBCASE решения задачи устойчивости.
- Запросы на вывод могут быть помещены в любом выбранном SUBCASE.
- Запросы на вывод, действующие одновременно и в статическом расчете и в анализе устойчивости могут быть помещены выше уровня SUBCASE.

Записи для линейного анализа устойчивости

- Секция EXECUTIVE CONTROL

SOL 105

- Секция CASE CONTROL

SUBCASE 1 LOAD = M	Определяет условия статического нагружения (LOAD, TEMP, DEFORM)
SUBCASE 2	Выбирает метод нахождения собственных значений
METHOD = N STATSUB = i	Выбирает SUBCASE статического решения чтобы использовать его для решения задачи устойчивости (по умолчанию берется первый SUBCASE)

Записи для линейного анализа устойчивости (продолжение)

- Секция **CASE CONTROL** должна содержать не менее двух **SUBCASE**.
- Секция **BULK DATA**
- **Определение условий статического нагружения**
- **EIGB** Данные для нахождения собственного значения
или
- **EIGRL** Данные для нахождения собственного значения
по методу Ланцоша.

Запись EIGRL

- **EIGRL** Рекомендуемая запись для расчета устойчивости
 - Определяет данные, необходимые для проведения решения задачи на собственные значения и анализа устойчивости методом Ланцоша.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGRL	SID	V1	V2	ND	MSGLVL	MAXSET	SHFSCCL	NORM	
EIGRL	1	0.1	3.2	10					

Запись EIGRL (продолжение)

Поле

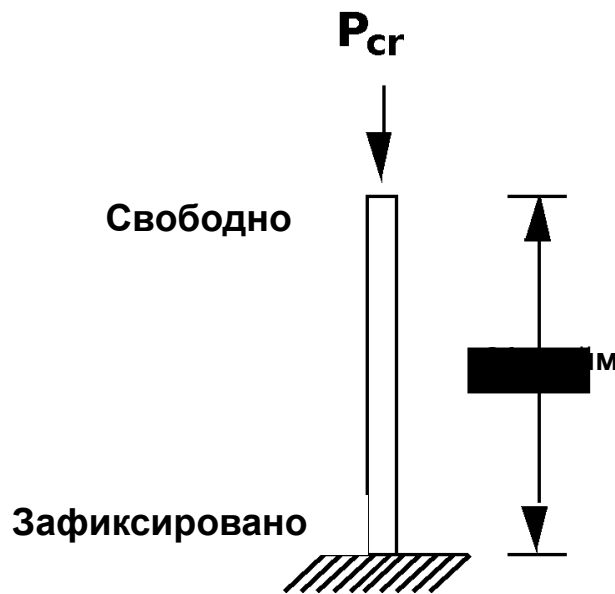
Содержание

- SID Идентификатор набора (уникальное целое число > 0)
- V1, V2 Анализ вибрации: диапазон интересующих частот.
Анализ устойчивости: диапазон интересующих I .
Если необходимы все моды ниже определенной частоты, то установите V2 на это значение и оставьте V1 пустым.
Не рекомендуется приравнивать V1 к нулю. Эффективнее использовать небольшое отрицательное значение или оставить его пустым.
- ND Число необходимых корней (целое > 0 или оставлять чистым)
- MSGLVL Уровень диагностики (целое, от 0 до 3 или оставлять чистым)
- MAXSET Число векторов в блоке (целое, от 1 до 15 или оставлять чистым)

Пример - простая колонна Эйлера

- **Задача:**

- Найти критическую нагрузку и соответствующую ей первую форму потери устойчивости цилиндрического стержня.



Круглое сечение

Диаметр = 0.25 дюйма

E = 30.E+6 фунтов/дюйм²

I = 1.917E-4 дюйм⁴

Площадь = 4.909E-2 дюйм²

Пример - простая колонна Эйлера (продолжение)

- Теоретическое решение

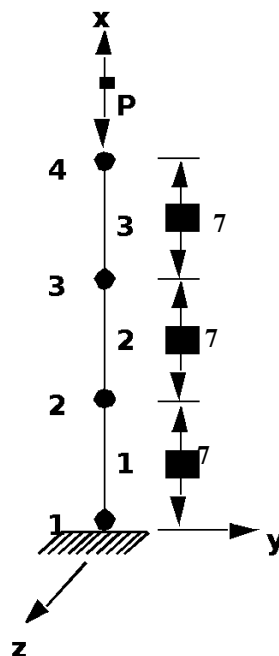
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} = 32,18 \text{ фунта}$$

где L_{eff} – эффективная длина колонны

$L_{eff} = 2L$ – для свободно опертой колонны

Пример - простая колонна Эйлера (продолжение)

- Модель MSC Nastran



Решение MSC Nastran

Значение силы в записи FORCE

$$P_{cr} = \square 32.18 \times 1.0 = \square 32.18 \text{ фунта}$$

Собственное значение

Пример – простая колонна Эйлера – входной файл

```

sol 105
cend
$
title = buckling of fixed-free beam
disp = all
$
echo = punch
spc = 10
subcase 1
  label = static subcase
  load = 5
subcase 2
  label = buckling subcase
  method = 100
$
begin bulk
$
CBEAM      1      1      1      2      0.      0.      1.
CBEAM      2      1      2      3      0.      0.      1.
CBEAM      3      1      3      4      0.      0.      1.
EIGRL      100      1
FORCE      5      4      1.      -1.
GRID       1      0.      0.      0.      345
GRID       2      7.      0.      0.      345
GRID       3      14.     0.      0.      345
GRID       4      21.     0.      0.      345
MAT1       2      30.E6      .33
PBEAM      1      2      4.909E-21.917E-41.917E-4      3.835E-4
SPC1       10     123456      1
enddata

```

Пример – простая колонна Эйлера – выходной файл

- Первое собственное значение:
 $P_{cr} = \lambda_1 \times 10 \text{ фунтов} = 32.18 \text{ фунта}$
- Первый собственный вектор
(дает форму потери устойчивости)

```

BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG:
                                                         SUBCASE 2
MODE      EXTRACTION      EIGENVALUE      REAL EIGENVALUES      GENERALIZED      GENERALIZED
NO.       ORDER           RADIANS         CYCLES              MASS             STIFFNESS
   1         1         3.217839E+01    5.672600E+00    9.028223E-01    5.873539E-02    1.890010E+00
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG:
                                                         SUBCASE 2
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG:
BUCKLING SUBCASE                                          SUBCASE 2
EIGENVALUE = 3.217839E+01
REAL EIGENVECTOR NO. 1
POINT ID.  TYPE      T1          T2          T3          R1          R2          R3
   1         G         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
   2         G         4.118373E-18 1.339746E-01 0.0         0.0         0.0         3.739763E-02
   3         G         7.290629E-18 5.000000E-01 0.0         0.0         0.0         6.477460E-02
   4         G         8.820291E-18 1.000000E+00 0.0         0.0         0.0         7.479527E-02
  
```

Литература по анализу устойчивости

- **MSC Seminar Notes**, “*MSC NASTRAN Material and Geometric Nonlinear Analysis*”:
- **MSC Nastran Linear Static Analysis Users Guide, Section 13.**
- **MSC Nastran Verification Problem Manual** (*Version 64, January 1986 Edition*):
 - Problem 3.0501A, “Lateral Buckling of a Cantilever Beam”
 - Problem 3.0502A, “Simple Frame Analysis with Buckling”
 - Problem 3.7701S, “Euler Buckling of a Simply Supported Beam”

Литература по анализу устойчивости

(продолжение)

- **MSC Nastran Demonstration Problem Manual**
(*Version 64, March 1985 Edition*):
 - Under Elastic Stability Analysis, see Demonstration Problem D0504A, “Flexural Buckling of a Beam”
- **MSC Nastran Application Notes**
 - October 1978 “Buckling and Real Eigenvalue Analysis of Laminated Plates”
 - September 1979 “Static Stability of Structures with Nonlinear Differential Stiffness”
 - February 1982 “Elastic-Plastic Buckling of a Thin Spherical Shell”
 - November 1985 “Nonlinear Buckling Analysis”

Пример 9

Анализ устойчивости пластины



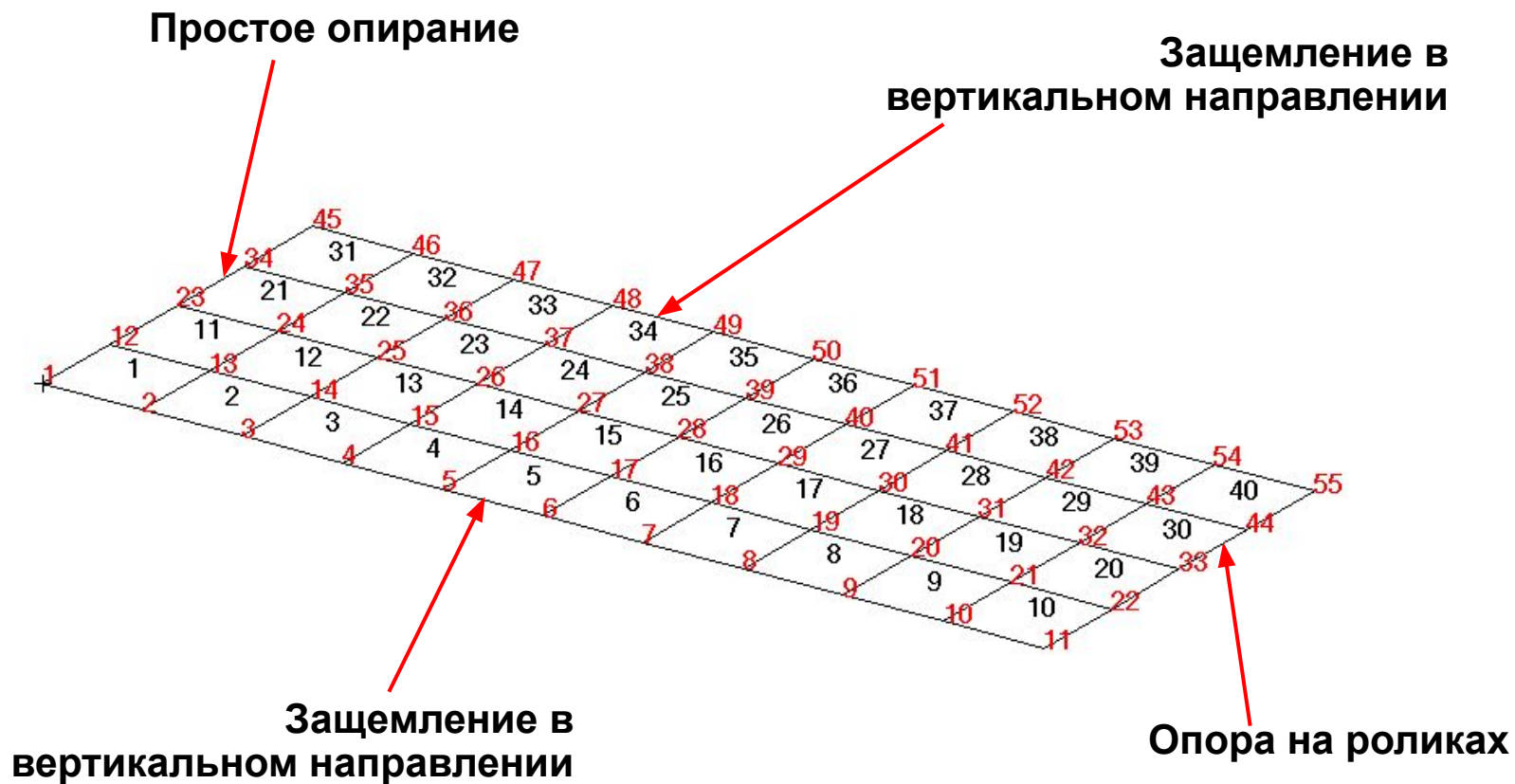
Пример 9 (продолжение)

- **Описание модели**

- Та же самая модель панели, что и в примере 5, без подкреплений.
- В этой модели применены следующие граничные условия:
 - Опираение на левом конце
 - “Ролики” на правом конце
 - Нулевые вертикальные перемещения на верхней и нижней гранях
- Приложим 100 фунт/дюйм² сжимающие нагрузки к правому краю пластины
 - Общая нагрузка на правой стороне = $(100) (8) (.01) = 8$
 - Приложим 1 фунт в каждый из узлов 11 и 55 сетки
 - Приложим 2 фунта в каждый из узлов 22, 33 и 44 сетки

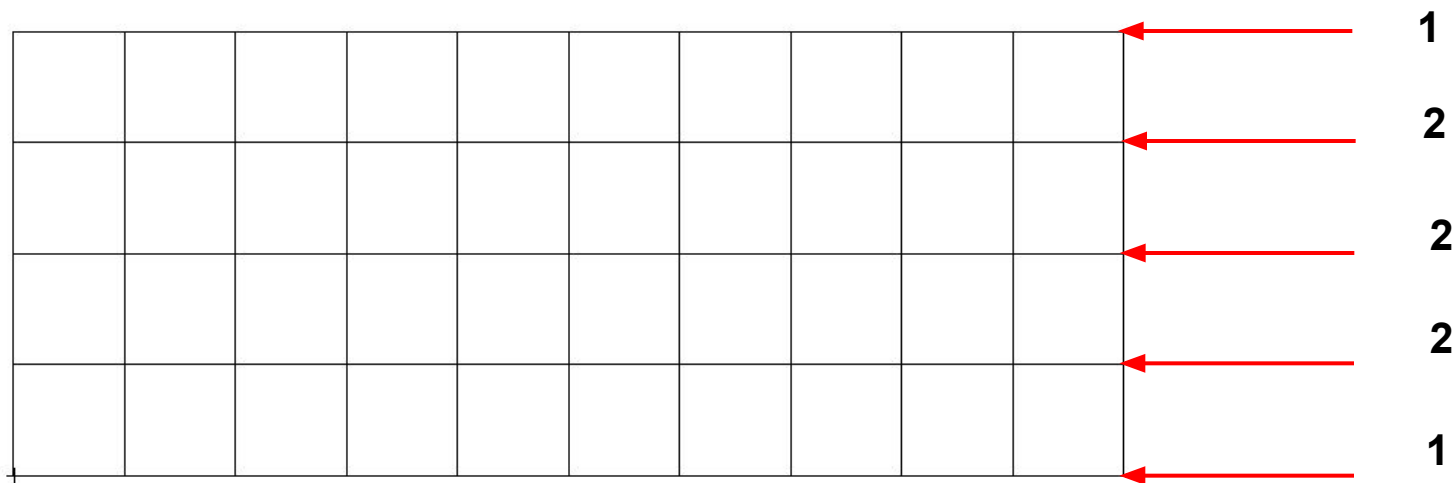
Пример 9 (продолжение)

– Граничные условия



Пример 9 (продолжение)

– Приложенные нагрузки



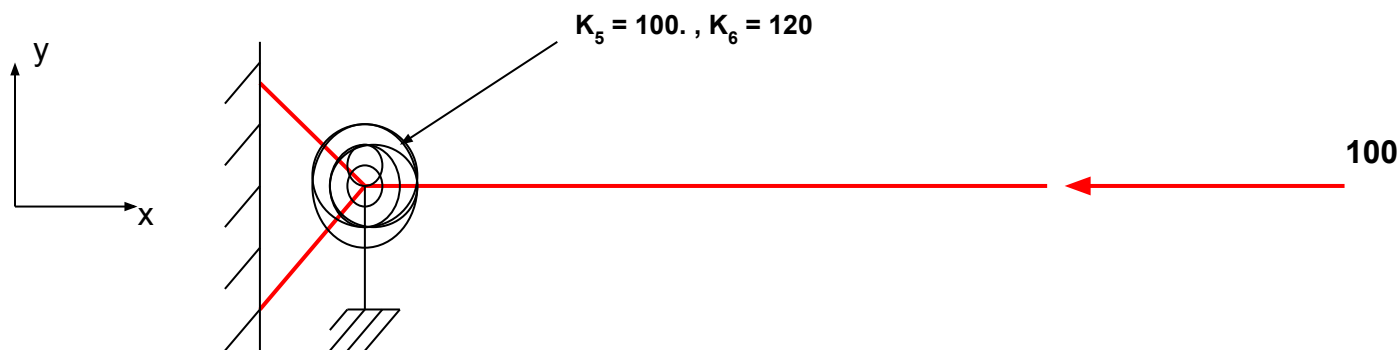
Жесткие элементы Лагранжа

- Новые жесткие элементы Лагранжа поддерживают дифференциальную жесткость
- Новые жесткие элементы Лагранжа поддерживают задачи на устойчивость
- В настоящее время решение SOL 105 (линейная задача устойчивости) поддерживает только метод исключений Лагранжа (error 1-11842201)

Усовершенствования жестких элементов (продолжение)

- Пример:

Анализ устойчивости модели двумя методами



- Жесткие элементы Лагранжа
- Жесткая балка

Усовершенствования жестких элементов

(продолжение)

Входной файл (элементы Лагранжа)

```

$
$ lagrange1.dat
$
SOL 105
CEND
TITLE = BUCKLING ANALYSIS - RBAR
SUBTI = LAGRANGE ELIMINATION METHOD
DISP = ALL
SPC = 10
RIGID = LGELIM
SUBCASE 1
LABEL=STATIC PRELOAD CASE
LOAD = 100
SUBCASE 2
LABEL = BUCKLING CASE
METHOD = 10
BEGIN BULK
EIGRL,10,,10
FORCE,100,4 ,0,-100.0,1.0,0.0,0.0
CELAS2,101,100.0,3,5
CELAS2,102,120.0,3,6
GRID, 3 ,,2.0,0.0,0.0
GRID, 4 ,,4.0,0.0,0.0
RBAR, 3,3,4,123456, , ,123456
SPC1,10,1234,3
ENDDATA

```

Входной файл (жесткие балки)

```

$
$ lagrange2.dat
$
SOL 105
CEND
TITLE = BUCKLING ANALYSIS - USE STIFF BEAM
DISP = ALL
SPC = 10
SUBCASE 1
LABEL=STATIC PRELOAD CASE
LOAD = 100
SUBCASE 2
LABEL = BUCKLING CASE
METHOD = 10
BEGIN BULK
EIGRL,10,,10
FORCE,100,4 ,0,-100.0,1.0,0.0,0.0
CELAS2,101,100.0,3,5
CELAS2,102,120.0,3,6
CBEAM,100,100,3,4,0.,0.,1.
PBEAM,100,1,100.,100.,100.,100.
MAT1,1,1.E7,,32
GRID, 3 ,,2.0,0.0,0.0
GRID, 4 ,,4.0,0.0,0.0
SPC1,10,1234,3
ENDDATA

```

Усовершенствования жестких элементов (продолжение)

• Результаты (жесткие элементы Лагранжа)

```

0      STATIC PRELOAD CASE                                          SUBCASE 1

                                D I S P L A C E M E N T   V E C T O R

POINT ID.  TYPE      T1      T2      T3      R1      R2      R3
    3      C          0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
    4      G          0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
101000004  L          0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0

                                R E A L   E I G E N V A L U E S
MODE      EXTRACTION  EIGENVALUE      REAL      EIGENVALUES      GENERALIZED      GENERALIZED
NO.      ORDER      EIGENVALUE      RADIANS      CYCLES      MASS      STIFFNESS
    1      1          5.000000E-01      7.071068E-01      1.125395E-01      2.000000E+02      1.000000E+02
    2      2          6.000000E-01      7.745967E-01      1.232809E-01      2.000000E+02      1.200000E+02
  
```

• Результаты (жесткие балки)

```

1      BUCKLING ANALYSIS - USE STIFF BEAM                          JUNE  5, 2003  MSC.NASTRAN  6/ 2/03  PAGE  12
0                                                                                                         SUBCASE 2

                                R E A L   E I G E N V A L U E S
MODE      EXTRACTION  EIGENVALUE      REAL      EIGENVALUES      GENERALIZED      GENERALIZED
NO.      ORDER      EIGENVALUE      RADIANS      CYCLES      MASS      STIFFNESS
    1      1          4.999999E-01      7.071067E-01      1.125395E-01      5.000000E+01      2.500000E+01
    2      2          5.999998E-01      7.745966E-01      1.232809E-01      5.000000E+01      2.999999E+01
  
```