

Информатика

Институт информатики, инноваций и бизнес-систем

Кафедра информатики, инженерной и компьютерной графики

Черкасова Евгения Анатольевна

Тема 9. Логические основы компьютеров

Логические основы компьютеров

1. Логические выражения и операции
2. Преобразование логических выражений
3. Логические элементы компьютера

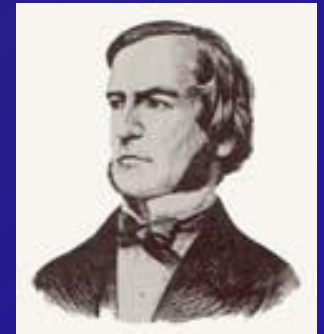
1 Логические выражения и операции

Булева алгебра

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



Почему "логика"?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Логические высказывания

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Жирафы летят на север.
- История – интересный предмет.
- У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь.
B – Форточка открыта.

простые высказывания
(элементарные)



Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) "и", "или", "не", "если ... то", "тогда и только тогда" и др.

A и B Сейчас идет дождь и открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если A, то B Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

не A и B Сейчас нет дождя и форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание A истинно, то "не A " ложно, и наоборот.

| A | не A |
|-----|--------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

также: \bar{A} ,
`not A` (Паскаль),
`! A` (Си)

таблица
истинности
операции НЕ

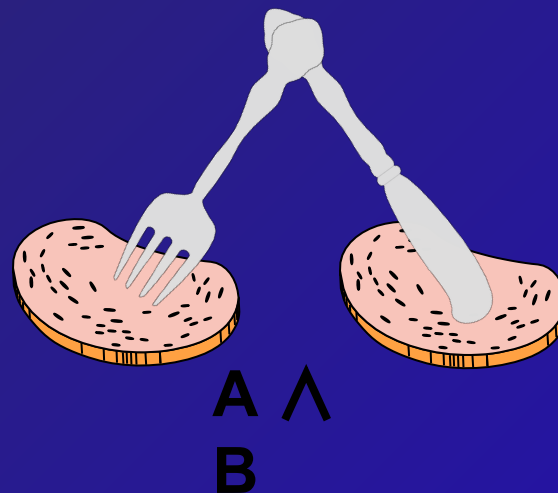
Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

Высказывание "А и В" истинно тогда и только тогда, когда А и В истинны одновременно.

| | А | В | А и В |
|---|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |

также: $A \cdot B$, $A \wedge B$,
A and B (Паскаль),
A && B (Си)



КОНЪЮНКЦИЯ – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание "А или В" истинно тогда, когда истинно А или В, или оба вместе.

| A | B | A или B |
|---|---|---------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

также: $A+B$, $A \vee B$,
A or B (Паскаль),
A || B (Си)

дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

Операция "исключающее ИЛИ"

Высказывание " $A \oplus B$ " истинно тогда, когда истинно A или B , но *не оба одновременно*.

| A | B | $A \oplus B$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

также:
 $A \text{ xor } B$ (Паскаль),
 $A \wedge B$ (Си)

Свойства операции "исключающее ИЛИ"

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$(A \oplus B) \oplus B = ?$$

$$A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$$

| A | B | $A\bar{B}$ | $\bar{A}B$ | $A\bar{B} + \bar{A}B$ | $A \oplus B$ |
|---|---|------------|------------|-----------------------|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Импликация ("если ..., то ...")

Высказывание " $A \rightarrow B$ " истинно, если не исключено, что из A следует B .

A – "Работник хорошо работает".

B – "У работника хорошая зарплата".

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

Эквиваленция ("тогда и только тогда, ...")

Высказывание " $A \leftrightarrow B$ " истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = AB + \overline{A}\overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И

ИЛИ

НЕ

базовый набор
операций

Логические формулы

Система имеет три датчика и может работать, если два из них исправны.

A – "Датчик № 1 неисправен".

B – "Датчик № 2 неисправен".

C – "Датчик № 3 неисправен".

Аварийный сигнал:

X – "Неисправны два датчика".

X – "Неисправны датчики № 1 и № 2" или
"Неисправны датчики № 1 и № 3" или
"Неисправны датчики № 2 и № 3".

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая
формула

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

| | A | B | $A \cdot B$ | $\bar{A} \cdot B$ | \bar{B} | X |
|---|---|---|-------------|-------------------|-----------|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Логические выражения могут быть:

- тождественно истинными (всегда 1, тавтология)
- тождественно ложными (всегда 0, противоречие)
- вычислимыми (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

0
1
2
3
4
5
6
7

| A | B | C | AB | AC | BC | X |
|---|---|---|----|----|----|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

2 Преобразование логических выражений

Законы алгебры логики

| название | для И | для ИЛИ |
|------------------------|--|--|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$ | $A + 0 = A, A + 1 = 1$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| поглощения | $A \cdot (A + B) = A$ | $A + A \cdot B = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| правила де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \rightarrow \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}, \quad \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \bar{N} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{N} = (M + \bar{M}) \cdot X \cdot \bar{N} = X \cdot \bar{N}$$

$$X = (B \rightarrow A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \rightarrow C)$$

раскрыли \rightarrow

$$= (\bar{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\bar{A} + C)$$

формула де Моргана

$$= (\bar{B} + A) \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

распределительный

$$= (\bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

повторения

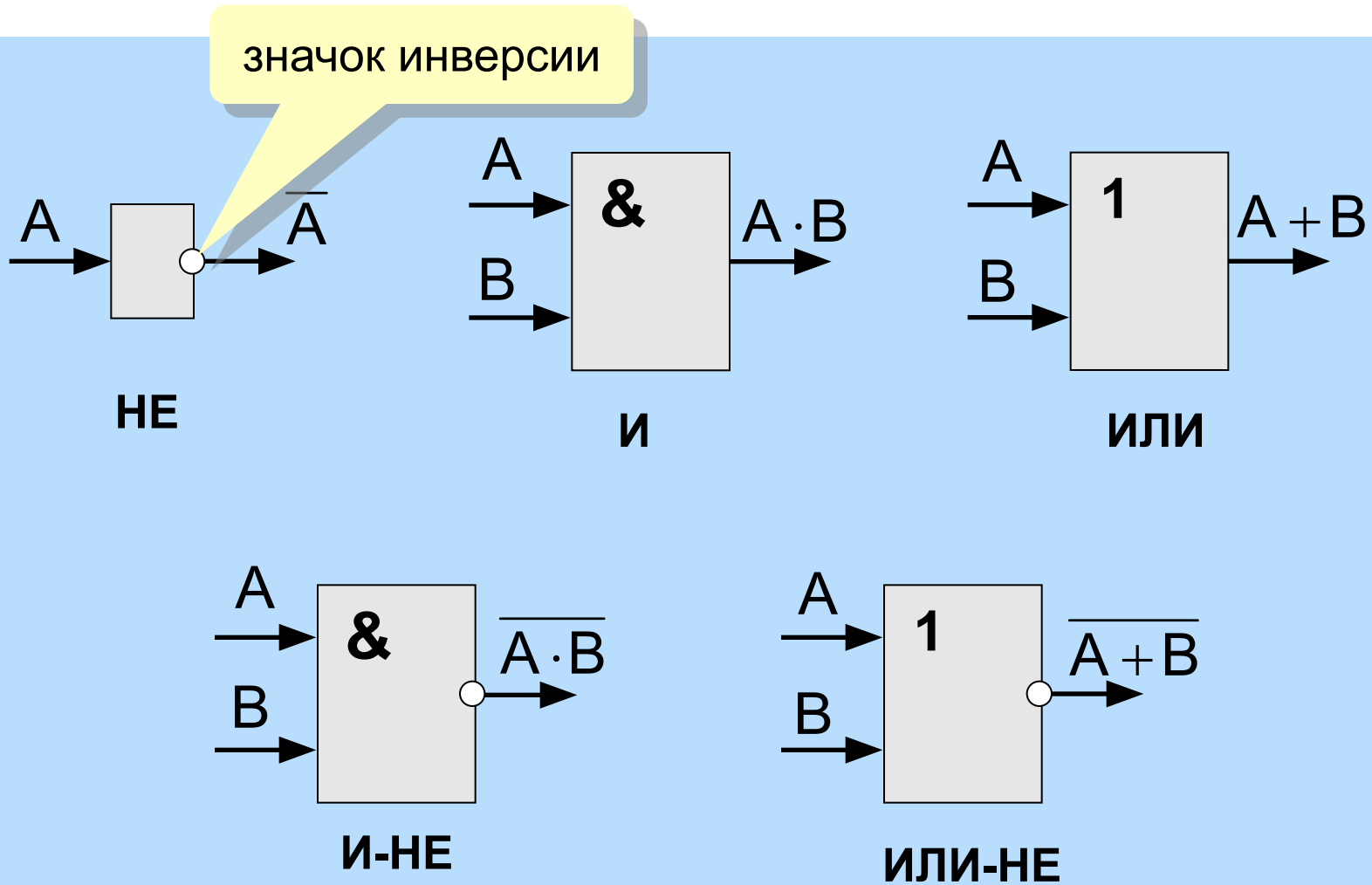
$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot (\bar{A} + C)$$

поглощения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A}$$

3 Логические элементы компьютера

Логические элементы компьютера

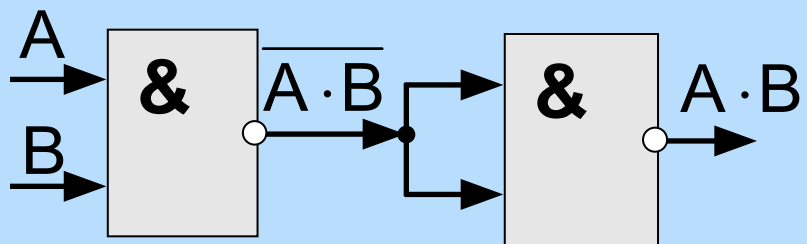
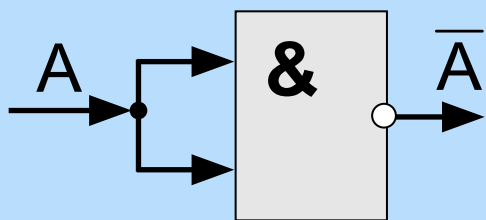


Логические элементы компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ**.

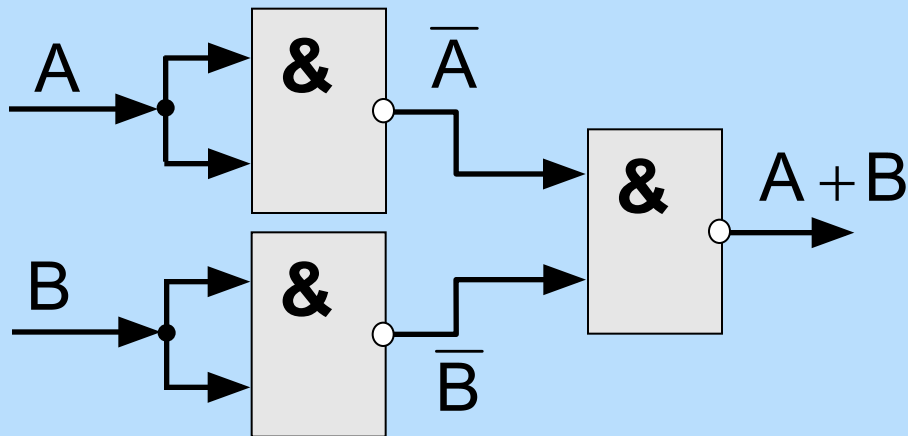
НЕ: $\bar{A} = \bar{A} + \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{A}$

И: $A \cdot B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$



ИЛИ:

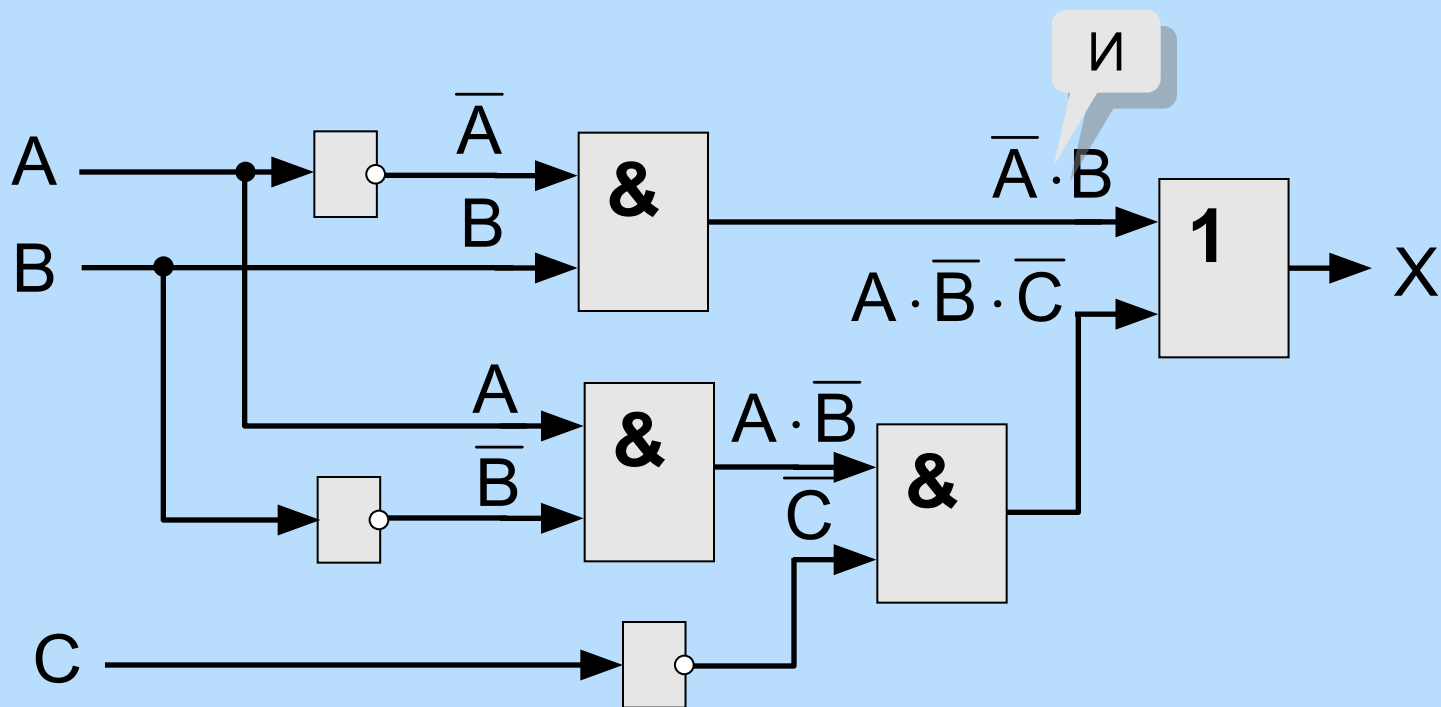
$A + B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$



Составление схем

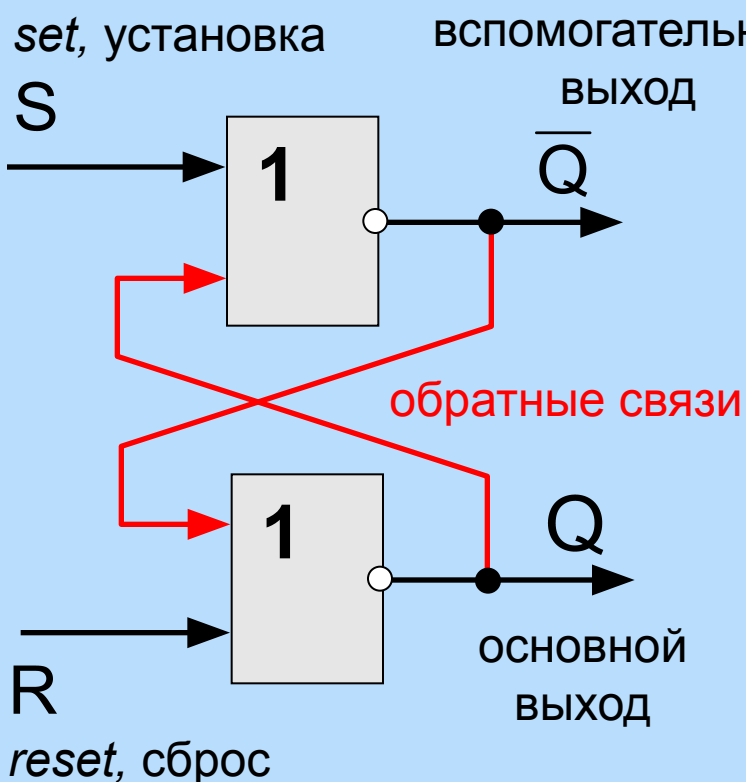
последняя операция - ИЛИ

$$X = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$



Триггер (англ. *trigger* – защёлка)

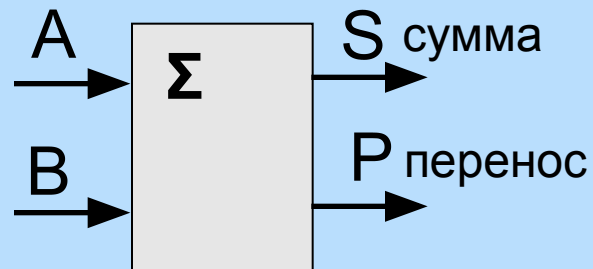
Триггер – это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах **ИЛИ-НЕ** или на 2-х элементах **И-НЕ**.



| S | R | Q | \bar{Q} | режим |
|---|---|---|-----------|-------------|
| 0 | 0 | Q | \bar{Q} | хранение |
| 0 | 1 | 0 | 1 | сброс |
| 1 | 0 | 1 | 0 | установка 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | запрещен |

Полусумматор

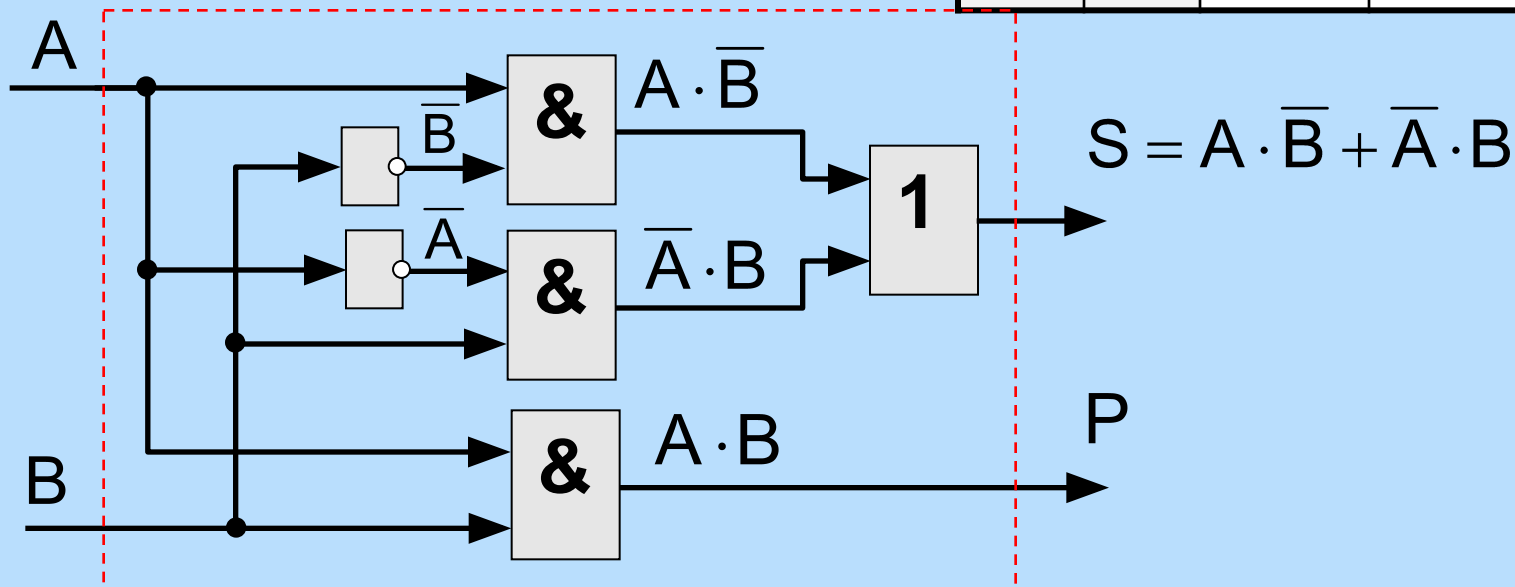
Полусумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.



$$P = A \cdot B$$

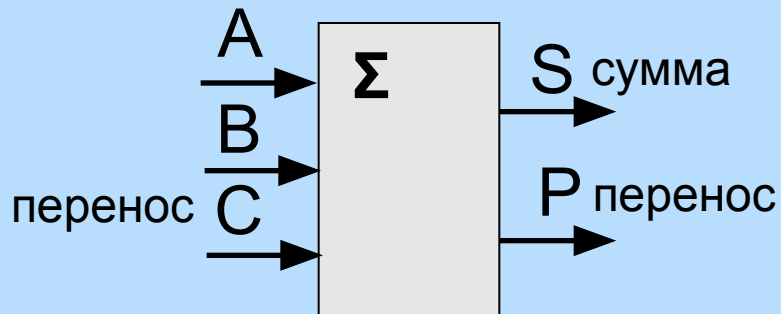
$$S = A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

| A | B | P | S |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |



Сумматор

Сумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.

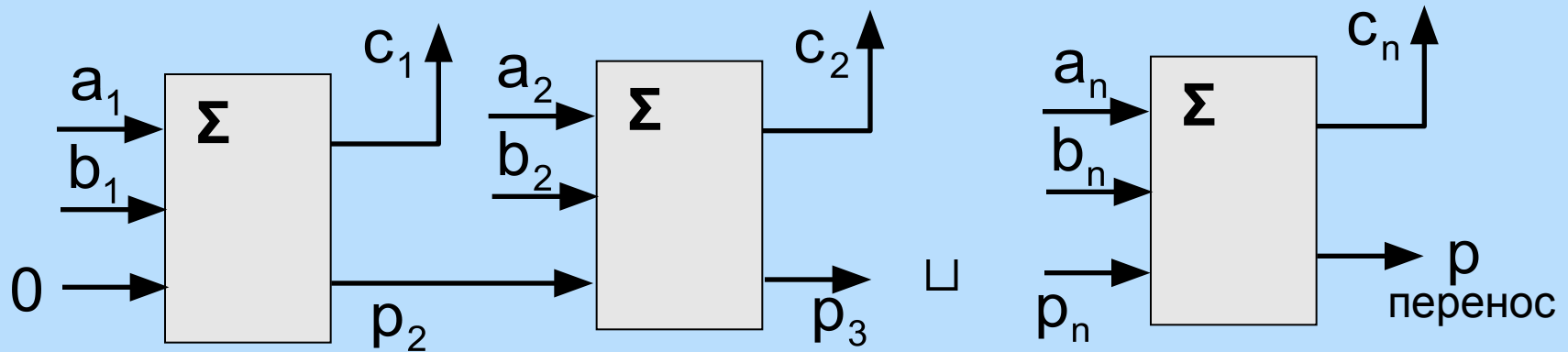


| A | B | C | P | S |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Многоразрядный сумматор

это логическая схема, способная складывать два n -разрядных двоичных числа.

$$\begin{array}{r} A = \quad a_n \quad a_{n-1} \quad \square \quad a_1 \\ + \quad B = \quad b_n \quad b_{n-1} \quad \square \quad b_1 \\ \hline C = \mathbf{p} \quad c_n \quad c_{n-1} \quad \square \quad c_1 \\ \text{перенос} \end{array}$$



Вопросы

Вопрос 1

Как записывается десятичное число 11 в двоичной системе счисления?

- А) 1111
- Б) 1101
- В) 1011
- Г) 1001

Вопрос 2

Операционная система – это ...

- А) программа, обеспечивающая управление базами данных
- Б) антивирусная программа
- В) программа, управляющая работой компьютера
- Г) система программирования

Вопрос 3

Какие пары объектов находятся в отношении "объект - модель"?

- А) компьютер - данные
- Б) компьютер - его функциональная схема
- В) компьютер - программа
- г) компьютер - алгоритм

Вопрос 4

Задан полный путь к файлу C:\DOC\PROBA.TXT Каково расширение файла, определяющее его тип?

- А) C:\DOC\PROBA.TXT
- Б) DOC\PROBA.TXT
- В) PROBA.TXT
- Г) TXT

Использование материалов презентации

Использование данной презентации, может осуществляться только при условии соблюдения требований законов РФ об авторском праве и интеллектуальной собственности, а также с учетом требований настоящего Заявления.

Презентация является собственностью авторов. Разрешается распечатывать копию любой части презентации для личного некоммерческого использования, однако не допускается распечатывать какую-либо часть презентации с любой иной целью или по каким-либо причинам вносить изменения в любую часть презентации. Использование любой части презентации в другом произведении, как в печатной, электронной, так и иной форме, а также использование любой части презентации в другой презентации посредством ссылки или иным образом допускается только после получения письменного согласия авторов.