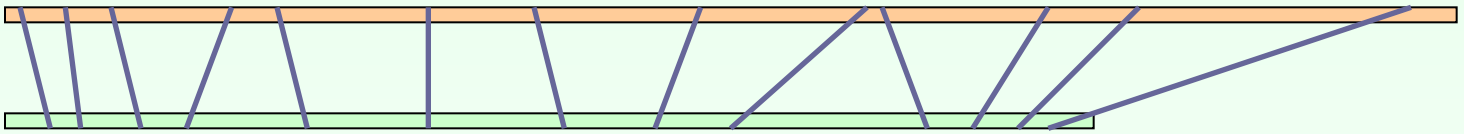
Максимально длинная общая подпоследовательность (МДП, LCS)

- Последовательность U является подпоследовательностью A, если существует монотонно возрастающая последовательность целых чисел $r_1 \ldots r_{|U|}$ такая, что $U[j] = A[r_j]$, $1 \le j \le |U|$, $1 \le r_j \le |A|$.
- Если $\exists\ p_1 \ldots p_{|U|}$ такая, что $(p_i < p_k\ \forall\ i < k)$ & $(U[j] = B[p_j])$, U – общая подпоследовательность A и B
- Если $\gamma(a_i \to b_j) \ge \gamma(a_i \to \varepsilon) + \gamma(\varepsilon \to b_j)$, то при переводе A в B используются только операции вставки и устранения, а элементы, составляющие LCS, остаются без изменения.

Если $\gamma(a_i \to b_j) = 2$ (при $a_i \ne b_j$) , а $\gamma(a_i \to \varepsilon) = \gamma(\varepsilon \to b_j) = 1$,

$D(A,B) = m + n - 2L(A,B)$, $m = |A|$, $n = |B|$

$2L(A,B) = m + n - D(A,B)$



Вычисление длины МПД:

$$L(i,j)=\begin{cases} L(i-1,j-1)+1, & \text{если} \quad a_i = b_j \\ \max(L(i,j-1), \quad L(j-1,j)) & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$L(0, j) = 0; \quad L(i, 0) = 0;$

$0 \le i \le m; \quad 0 \le j \le n;$

Пример. A = aacacbb; B = ababc.
L(A,B) = 3.

Всего 13 МДП:

3 – abb,

6 – aab,

4 – aac

	ε	a	b	a	b	c
ε	0	0	0	0	0	0
a	0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	2	2	2
c	0	1	1	2	2	3
a	0	1	1	2	2	3
c	0	1	1	2	2	3
b	0	1	2	2	3	3
b	0	1	2	2	3	3

Алгоритм Хишберга (Hirschberg D.S.) – линейная память

Пусть $L^*(i, j)$ – длина МДП текстов A$[i + 1 : m]$ и B$[j + 1 : n]$.

Тогда для любого i: $L(m,n) = \max_j \{L(i, j) + L^*(i, j)\}$

A = aaca'cbb

B = ababc

$L(4,0) + L^*(4,0) = 0 + 2$

$L(4,1) + L^*(4,1) = 1 + 2$

$L(4,2) + L^*(4,2) = 1 + 1$

$L(4,3) + L^*(4,3) = \underline{2 + 1}$

$L(4,4) + L^*(4,4) = 2 + 1$

$L(4,5) + L^*(4,5) = 3 + 0$

A1 = aa'ca

B1 = aba

$L(2,0) + L^*(2,0) = 0 + 1$

$L(2,1) + L^*(2,1) = \underline{1 + 1}$

$L(2,2) + L^*(2,2) = 1 + 1$

$L(2,3) + L^*(2,3) = 2 + 0$

A2 = cb'b

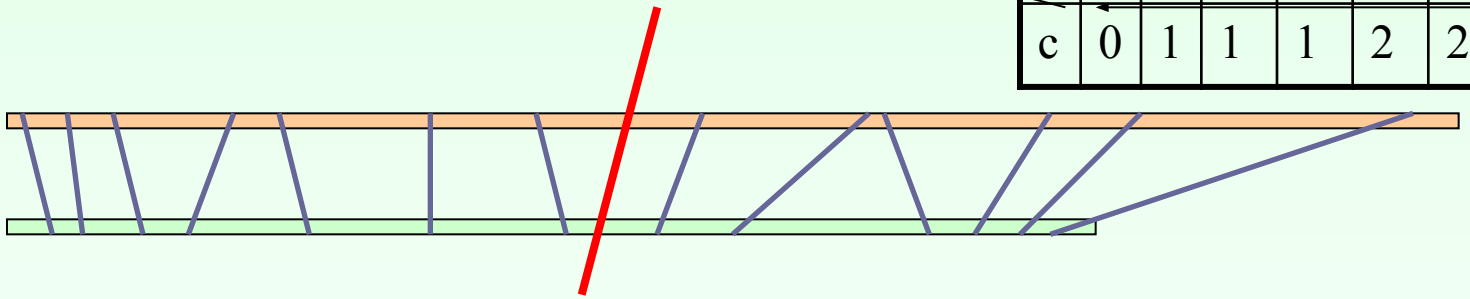
B2 = bc

$L(2,0) + L^*(2,0) = 0 + 1$

$L(2,1) + L^*(2,1) = \underline{1 + 0}$

$L(2,2) + L^*(2,2) = 1 + 0$

	ε	c	b	a	c	a
ε	0	0	0	0	0	0
b	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	1	1
c	0	1	1	1	2	2



Адаптивные алгоритмы вычисления длины МПД:

Hunt - Shimanski

$Q_{i\,k}$ – наим. j, такое что (L(A[1 : i], B[1 : j]) = k

$$Q_{i+1,k} = \begin{cases} наим.\, j, & такое\ что \quad Q_{i,k-1} < j \le Q_{ik} \quad и \quad a_{i+1} = b_j \\ Q_{ik}, & если \quad такого \quad j \quad не\ существует \end{cases}$$

Начальные условия:

$Q_{i,0} = 0, \qquad 0 \le i \le n;$

$Q_{0k} = n + 1, \qquad 1 \le k \le \min(m,n);$

Пример. A = aacacbbc,

B = ababc.

Трудоемкость: O($r \times \log n$),

где $r = \sum_{i=1}^{|\Sigma|} f_i(A) \cdot f_i(B)$

число потенциально возможных парных соответствий символов

	0	1	2	3	4	5
ε	0	6	6	6	6	6
a	0	1	6	6	6	6
a	0	1	3	6	6	6
c	0	1	3	5	6	6
a	0	1	3	5	6	6
c	0	1	3	5	6	6
b	0	1	2	4	6	6
b	0	1	2	4	6	6
c	0	1	2	4	5	6

Адаптивные алгоритмы вычисления длины МПД:

Nakatsu-Kambayashi-Yajima

$R_{i\,k}$ – max j, такое что (L(A[i : m], B[j : n]) = k

$$R_{i,k} = \begin{cases} \max j, & \textit{такое что} \quad R_{i+1,k} \le j < R_{i+1,k-1} \quad \textit{и} \quad a_i = b_j \\ R_{i+1,k}, & \textit{если} \quad \textit{такого} \quad j \quad \textit{не существует} \end{cases}$$

Начальные условия:

$R_{i,0} = n + 1, \quad 0 \le i \le m;$

$R_{m+2-k,\,k} = 0, \quad 1 \le k \le \min(m,n);$

Пример. A = aacacbb,

B = ababc.

Трудоемкость: O(n× (m – L)),

R	0	1	2	3	4
a	6	5	3	1	0
a	6	5	3	1	0
c	6	5	3	1	0
a	6	5	3	1	0
c	6	5	2	0	0
b	6	4	2	0	
b	6	4	0		
ε	6	0			

- **Близкие задачи:**

- задача о наикратчайшей **надпоследовательности**

- задача о **медиане** (string merging): построение текста T3, сумма переходов к которому от T1 и T2 минимальная. В зависимости от весов ред. операция в качестве T3 можно получить МДП, наименьшую надпоследовательность, один из текстов (T1 или T2), наиболее вероятного предка и т.п.

- поиск максимально длинной общей подпоследовательности для группы текстов.

- задача о максимально длинной возрастающей (убывающей) подпоследовательности для числовой перестановки

Расстояния и меры сходства, отличные от ред. расстояния

Пусть T_1 и T_2 два текста.

Назовем совместной частотной характеристикой l-го порядка текстов T_1 и T_2 совокупность элементов

$$\Phi_l(T_1, T_2) = \{\varphi_{l1}(T_1, T_2), \varphi_{l2}(T_1, T_2), \ldots, \varphi_{l\,Ml}(T_1, T_2)\}$$

где $M_l = M_l(T_1, T_2)$ — число l-грамм, общих для обоих текстов,

а элемент $\varphi_{l\,i}$ $(1 \le i \le M_l)$ есть тройка:

<< i-я общая l-грамма – x_i,

частота ее встречаемости в T_1 – $F(T_1, x_i)$ и в T_2 – $F(T_2, x_i)$ >>.

Простейший набор мер сходства, упорядоченный по возрастанию l имеет вид:

$$q_l(T_1, T_2) = \frac{M_l(T_1, T_2)}{M_l(T_1) + M_l(T_2) - M_l(T_1, T_2)}, \quad l = 1,2,\ldots,l_{\max}(T_1,T_2)$$

Мера сходства, учитывающая частоты встречаемости *l*-грамм:

$$\lambda(T_1, T_2) = \frac{\sum_{\alpha} \min\{F(T_1, \alpha), F(T_2, \alpha)\} \cdot |\alpha|}{\sum_{\alpha} \max\{F(T_1, \alpha), F(T_2, \alpha)\} \cdot |\alpha|}$$

где α – произвольная цепочка текстов T_1 и (или) T_2,

$|\alpha|$ – ее длина.

(Findler N.V., Van Leeuten, 1979)

Ранговые меры близости. Коэффициент корреляции τ

Пусть l-граммы в $\Phi_l(T_1)$ и $\Phi_l(T_2)$ упорядочены по убыванию частот. Порядковое место l-граммы x_i в упорядочении определяет ее **ранг** – $r(T_1, x_i)$ (соответственно, $r(T_2, x_i)$).

$$\tau = \frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} g(i,j)$$

$$g(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r(T_1,x_i) < r(T_1,x_j) \quad \& \quad r(T_2,x_i) < r(T_2,x_j) \\ 1, & \text{если} \quad r(T_1,x_i) > r(T_1,x_j) \quad \& \quad r(T_2,x_i) > r(T_2,x_j) \\ -1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

x_i	a	c	g	t
$f(T_1, x_i)$	123	101	98	37
$r(T_1, x_i)$	1	2	3	4
$f(T_2, x_i)$	147	211	988	1137
$r(T_2, x_i)$	4	3	2	1

$$\tau = \frac{-6}{\frac{1}{2}4(4-1)} = -1$$

Ранговые меры близости. Коэффициент корреляции τ

$$\tau = \frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)} \qquad S = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} g(i,j) \qquad \tau = \frac{-3}{\frac{1}{2}10\times 9} = -0{,}07$$

$$g(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } r(T_1,x_i) < r(T_1,x_j) \ \& \ r(T_2,x_i) < r(T_2,x_j) \\ 1, & \text{если } r(T_1,x_i) > r(T_1,x_j) \ \& \ r(T_2,x_i) > r(T_2,x_j) \\ -1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

ученики	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
математика	7	4	3	10	6	2	9	8	1	5
музыка	5	7	3	10	1	9	6	2	8	4

ученики	I	F	C	B	J	E	A	H	G	D
математика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
музыка	8	9	3	7	4	1	5	2	6	10

$$S = 2-7+1-7+5-2+1-5+3-2+4-0+2-1+2-0+1 = -3$$

Ранговые меры близости. Коэффициент Спирмэна

Пусть l-граммы в $\Phi_l(T_1)$ и $\Phi_l(T_2)$ упорядочены по убыванию частот; порядковое место l-граммы x_i в упорядочении определяет ее ранг – $r(T_1, x_i)$ (соответственно, $r(T_2, x_i)$).

Группы равночастотных l-грамм представляются усредненным рангом.

Введем l-граммный аналог расстояния:

$$S_l(T_1, T_2) = \sum_{x_i \in \Sigma_l} \left(r(T_1, x_i) - r(T_2, x_i) \right)^2$$

где Σ_l – совокупность всевозможных цепочек длины l ; $|\Sigma_l| = R_l = n^l$.

Аналогом коэффициента Спирмэна для характеристики l-го порядка ($l = 1,2,\ldots$) является

$$\rho_l(T_1, T_2) = 1 - \frac{6 S_l(T_1, T_2)}{n(n^2 - 1)} \quad (**)$$

При наличии равночастотных l-грамм в (**) вносится поправка на "связанность" рангов. (Кендел М. Ранговые корреляции, М., Статистика, 1975)

Ранговые меры близости. Коэффициент Спирмэна

$$\rho_l(T_1,T_2)=1-\frac{6S_l(T_1,T_2)}{n(n^2-1)};\quad S_l(T_1,T_2)=\sum_{x_i\in\Sigma_l}\left(r(T_1,x_i)-r(T_2,x_i)\right)^2$$

ученики	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
математика	7	4	3	10	6	2	9	8	1	5
музыка	5	7	3	10	1	9	6	2	8	4
Разности d	2	-3	0	0	5	-7	3	6	-7	1
d^2	4	9	0	0	25	49	9	36	49	1

$$\rho_l(T_1,T_2)=1-\frac{6\times182}{990}=-0{,}103;$$

Ранговые меры близости. Коэффициент конкордации W

W используется для сравнения m последовательностей.

Вычисляем суммы рангов каждого объекта $$SR(x_i) = \sum_{k=1}^{m} r(T_k, x_i)$$

Среднее значение суммы рангов одного объекта составляет $ES = m(n+1)/2$.

S – сумма квадратов отклонений от ES $$S = \sum_{i=1}^{n} (SR(x_i) - ES)^2$$

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}$$

Равночастотным l-граммам назначаются усредненные ранги и в определения τ, ρ, W вносится поправка на "связанность".

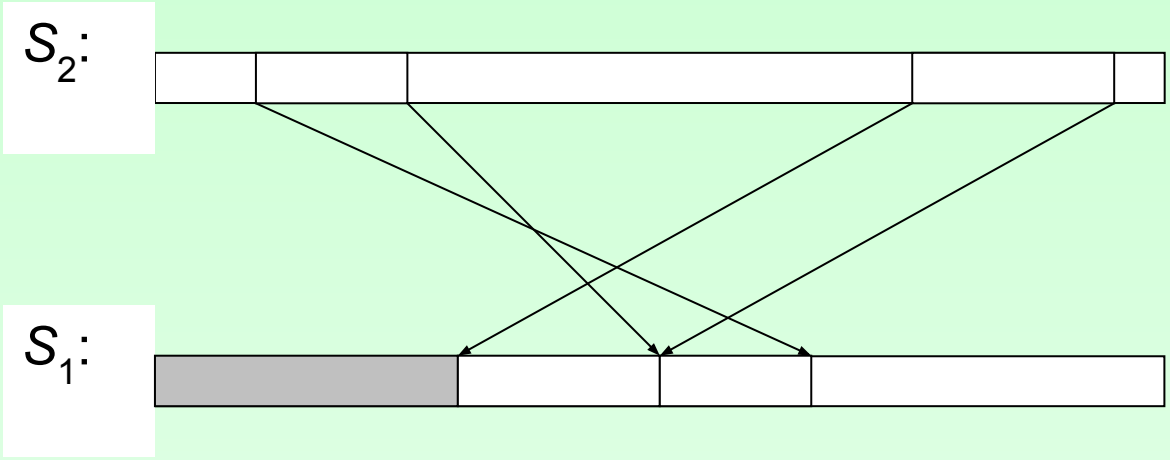
$$W = \frac{S}{\frac{1}{12}m^2(n^3 - n) - m\sum_{T'} T'}$$

t – число элементов в одной группе.

$$T' = \frac{1}{12}\sum_{t}(t^3 - t)$$

W, в отличие от τ и ρ изменяется от 0 до 1.

Обобщение подхода Лемпеля-Зива



- Представление S_1 в виде конкатенации фрагментов из S_2 назовем **сложностным разложением** S_1 по S_2.
- На каждом шаге копируется максимальный фрагмент S_2, совпадающий с префиксом непокрытого участка S_1
- Если такого фрагмента нет, используется операция генерации символа
- **c(S_1 / S_2) – сложность** S_1 относительно S_2 определяется числом компонентов в разложении S_1 по S_2

Относительная сложность и редакционное расстояние

S_2 = aaaa a cccc c ttttttttttttt – acacacac a atatatat

S_1 = aaaa g cccc g ttttttttttttt g acacacac g atatatat

$d(S_1, S_2)$ = 4

$H(S_1/S_2)$ = aaaa*g*cccc*g*ttttttttttttt*g*acacacac*g*atatatat

$c(S_1/S_2)$ = 9

- $c\ (S_1/S_2) \leq 2d(S_1, S_2) + 1$

- S_2 = --------ttttttttttttttttaaaaaaaa

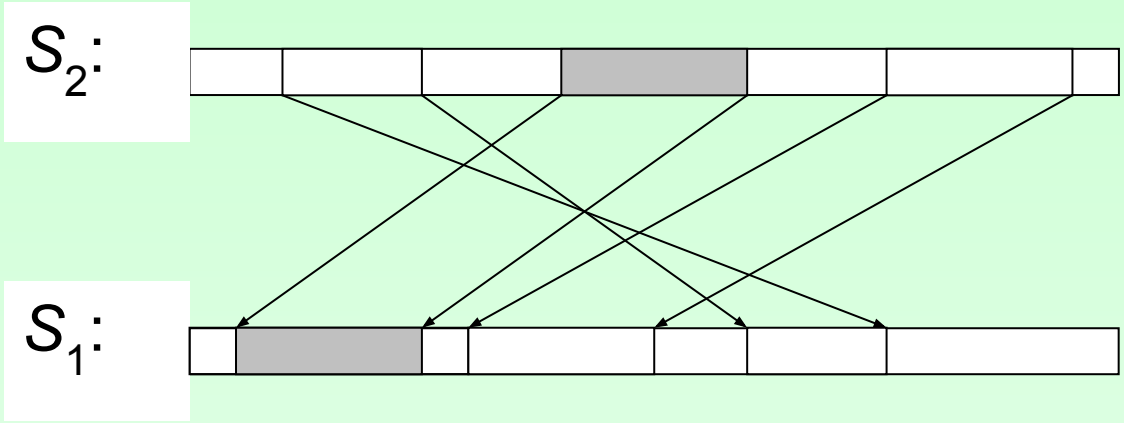
  S_1 = aaaaaaaattttttttttttttttt--------

  $d\ (S_1\ ,\ S_2) = 16$

  $H(S_1\ /\ S_2)$ = aaaaa * ttttttttttttttt

  $c\ (S_1\ /\ S_2) = 2$

Трансформационное расстояние



- Трансформационое расстояние и относительная сложность идейно близки.
- Операция «вставка сегмента» используется, если посимвольная генерация фрагмента «дешевле» его копирования.
- Порядок покрытия S_1 предполагает оптимизацию по всем парам межтекстовых повторов и промежуткам между ними. $O(N^6)$.

J.-S.Varré, J.-P.Delahaye, E. Rivals: Transformation Distances: a Family of Dissimilarity Measures Based on Movements of Segments. // Bioinformatics 15(3): 194-202 (1999)

Инверсионное расстояние

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,\ldots\, i-1 & i & i+1\,\ldots\, j-1 & j & j+1\,\ldots\, N \\ 1\,2\,\ldots\, i-1 & j & j-1\,\ldots\, i+1 & i & j+1\,\ldots\, N \end{pmatrix}$$

- Инверсионное расстояние $d_I(\pi,\sigma)$ между последовательностями π и σ определяется минимальным числом инверсий, переводящих одну из них в другую
  Задача вычисления инверсионного расстояния для перестановок является NP-полной
- В случае "знаковых" перестановок существуют полиномиальные решения

  +1 [+2 −4 −5] +3 +6 → +1 +5 +4 −2 +3 +6

Hannenhalli, S. and Pevzner, P. Transforming Cabbage into Turnip (Polynomial Algorithm for Sorting Signed Permutation by Reversals). Proc. 27th Ann. ACM Symposium on the Theory of Computing, 1995, pp. 178–189

Точки разрыва

$\pi_0 = 0$ and $\pi_{N+1} = N + 1$

π and σ – произвольные перестановки.

Разрыв между $\pi_i = a$ и $\pi_{i+1} = b$ фиксируется, если в σ нет биграмм ab и ba.

π = 0 | 6 4 | 1 8 5 | 3 | 2 9 7 | 10 $\quad$ $r(\pi, \sigma) = 5$

σ = 0 | 5 8 1 | 2 9 7 | 6 4 | 3 | 10

σ – тождественная перестановка (1 2 … N).

Число точек разрывов (**breakpoint distance**) $r(\pi, \sigma)$ определяется количеством позиций π таких что $|\pi_i - \pi_{i+1}| \neq 1$.

1 2 3 | 8 7 6 | 4 5 | 9

Инверсионное расстояние, число точек разрыва и относительная сложность

- $r(\pi,\sigma) \leq 2d_I(\pi,\sigma)$

- Точки разрыва однозначно соответствуют границам компонентов сложностного разложения
  $r(\pi,\sigma) = c(\pi/\sigma) - 1$
  σ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
  H(π / σ) = 1 2 3 * 8 7 6 * 4 5 * 9

- Сложностные разложения позволяют перейти от исходных перестановок к "знаковым" и сократить размерность задачи вычисления инверсионного расстояния