Лекция 4

Математические модели и методы теории надежности, используемые в САПР КЭС

Вопросы лекции

1. Основные понятия теории надежности.
2. Математические модели и методы теории надежности электронных средств и систем.
3. Методы теории графов при оценке надежности электронных средств и систем.

Вопрос 1.
Основные понятия теории надежности

Надежность является одним из важнейших показателей качества ЭС и выражает прежде всего свойство изделия функционировать и сохранять свои параметры в течение определенного срока в заданных условиях. Надежность является комплексным показателем качества, состоящим из ряда частных, таких как безотказность, долговечность, ремонтопригодность, сохраняемость и др.

Математические модели надежности необходимы при проектировании ЭС для выбора наиболее подходящего варианта, который будет обеспечивать эффективное функционирование аппаратуры при ее реальной эксплуатации. Кроме того, модели надежности используются в ходе решения задач диагностики неисправностей, планирования ремонтно-профилактических работ и формирования комплектов запасных частей.

Построение модели надежности начинается с формирования ответов на три основных вопроса:

1. Какие состояния системы приводят к ее отказу?
2. Каков характер процессов возникновения отказов?
3. Какую конфигурацию имеет система?

Ответ на первый вопрос предполагает проведение анализа объекта на предмет выявления таких предельных эксплуатационных режимов, вредных воздействий окружающей среды, ошибок операторов, которые по отдельности или в совокупности приводят к отказу системы, при этом факт возникновения отказа устанавливается соответствующими критериями согласно нормативно-технической документации. Следует иметь в виду, что под отказом понимается событие, заключающееся в нарушении способности ЭС выполнять заданную функцию. Различают частичный, полный, зависимый и независимый отказы. При частичном отказе ЭС может выполнять свои отдельные функции, а полный отказ приводит к полной потере работоспособности. Причиной зависимого отказа ЭС может стать неисправность какого-либо элемента или блока, входящего в состав изделия. Соответственно независимый отказ не вызывается прямо или косвенно каким-либо другим отказом или неисправностью.

Ответ на второй вопрос предусматривает описание процессов возникновения отказов с помощью вероятностных законов и дифференциальных уравнений.

Ответ на третий вопрос связан с определением структуры системы, учитывающей характер соединения компонентов, алгоритм функционирования, наличие резервирования, схему обслуживания и т. п.

Важную роль при рассмотрении надежности играет выделение класса системы по отношению к ремонту и восстановлению. Восстановление — это процесс обнаружения и устранения отказа (повреждения) с целью восстановления его работоспособности. Объект называется восстанавливаемым, если работоспособность его в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях, и невосстанавливаемым — если не подлежит. Один и тот же объект в зависимости от ситуации может быть восстанавливаемым или невосстанавливаемым. Например, аппаратура космического аппарата на этапе хранения и подготовки к старту — восстанавливаемая, а во время полета — невосстанавливаемая.

Ремонт представляет собой комплекс операций по восстановлению исправности и работоспособности объекта, а также восстановлению ресурса объекта или его составных частей. Заметим, что ресурс (технический ресурс) — наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после среднего или капитального ремонта до наступления предельного состояния. Под наработкой понимается продолжительность или объем работы объекта.

Ремонт объекта может выполняться заменой или восстановлением отдельных элементов и сборочных единиц. Объект называется ремонтируемым, если исправность его в случае возникновения отказа или повреждения подлежит восстановлению, проведение ремонта объекта предусматривается в нормативно-технической документации. Объект, исправность и работоспособность которого в случае возникновения отказа (повреждения) не подлежит восстановлению, — неремонтируемый. Таким образом, понятие «ремонт» предусматривает возможность замены отказавших частей и не увязывается с рассматриваемыми условиями (ситуацией). Классификация объектов по отношению к ремонту и восстановлению приведена на рисунке 3.40.

Рис. 3.40
Классификация объектов по ремонту и восстановлению

Основным компонентом модели надежности объекта, т. е. технического изделия (элемента, системы) определенного целевого назначения, рассматриваемого в период проектирования, является закон распределения случайного времени T работы до отказа. Существуют два основных пути определения распределения времени T. Первый состоит в использовании априорных сведений о надежности элементов системы в виде кривых интенсивностей отказов. Второй метод оперирует с эмпирическими данными, полученными в результате проведения и обработки результатов испытаний, а также при наблюдении за работой различных образцов оборудования в процессе эксплуатации систем, в которых применяются аналогичные элементы, работающие в подобных условиях. При таком подходе по полученным экспериментальным данным строят гистограмму для времени T и определяют соответствующую функцию распределения отказов. Наиболее предпочтительна комбинация указанных методов, когда для определения распределения времени T используются достаточные статистические данные и представление о механизме возникновения отказов на основе физико-химических и других соображений.

Вопрос 2

Математические модели и методы теории надежности электронных средств и систем

Для количественной оценки надежности используют показатели. Неремонтируемые объекты работают до первого отказа, основные показатели надежности которых и формулы оценки показателей по результатам испытаний приведены в таблице 3.5 [3].

Вероятность безотказной работы $R(t)$ на временно́м интервале $[0;\, t]$ и вероятность отказа $Q(t)$ (в зарубежной литературе их иногда называют соответственно функциями надежности и ненадежности) определяются непосредственно по функции распределения $F(t)$ случайного времени наработки до отказа T, т. е.

$$R(t) \triangleq \mathcal{P}[T > t] = 1 - F(t),\; Q(t) \triangleq \mathcal{P}[T \le t] = F(t).$$

Таблица 3.5

Показатели надежности и формулы их оценки

Показатели надежности	**Формулы оценки**
Вероятность безотказной работы — вероятность выполнить заданную функцию при данных условиях в пределах интервала времени [0; t]	$\hat{R}(t) = N(t) / N$
Средняя наработка до отказа — математическое ожидание случайной наработки T до первого отказа, ч	$\hat{m}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$
Интенсивность отказов, 1/ч — условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая для рассматриваемого момента t наработки при условии, что до этого момента отказ не возник	$\hat{\lambda}(t) = \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t}$

Здесь $N(t)$ — число объектов, работоспособных к моменту времени t; N — число испытываемых объектов; T_i — наработка до отказа i-го объекта.

Функциональные связи между показателями $R(t)$, $Q(t)$, $\lambda(t)$, m_t и плотностью распределения времени до отказа $\varphi(t)$ приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6

Связь между показателями надежности

Определяемый показатель надежности	Известный показатель надежности			
	$R(t)$	$Q(t)$	$\varphi(t)$	$\lambda(t)$
$R(t)$	$R(t)$	$1-Q(t)$	$\int_t^\infty \varphi(x)d(x)$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$Q(t)$	$1-R(t)$	$Q(t)$	$\int_t^\infty \varphi(x)dx$	$1-\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$\varphi(t)$	$-\frac{d}{dt}R(t)$	$\frac{d}{dt}Q(t)$	$\varphi(t)$	$\lambda(t)\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$\lambda(t)$	$-\frac{1}{R(t)}\frac{d}{dt}R(t)$	$\frac{1}{1-Q(t)}\frac{d}{dt}Q(t)$	$\frac{\varphi(t)}{\int_t^\infty \varphi(x)dx}$	$\lambda(t)$
$m(t)$	$\int_0^\infty R(t)dt$	$\int_0^\infty [1-Q(t)]dt$	$\int_0^\infty t\varphi(t)dt$	$\int_0^\infty \exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]dt$

Вероятность безотказной работы в течение интервала $[t_1; t_2]$ определяется по формуле

$$R(t_1, t_2) = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} = \exp\left[-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt\right].$$

Конкретный вид функций $P(t)$, $\lambda(t)$ определяется законом распределения случайной наработки до отказа T. Во многих случаях на практике функция $\lambda(t)$ имеет вид, показанный на рисунке 3.41.

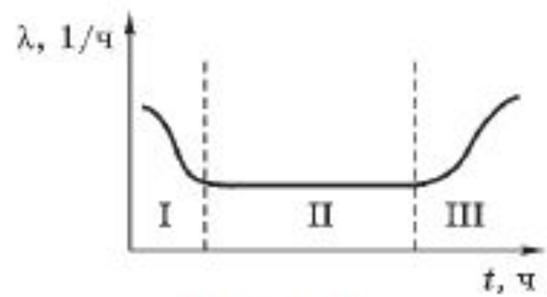


Рис. 3.41
Вид функции $\lambda(t)$

Здесь можно выделить участки приработки (I), нормальной работы (II) и «старения» (III). Иногда как показатель рассматривают среднюю интенсивность отказов $\overline{n}$ за время, соответствующее техническому ресурсу $t_р$, т. е.

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{t_р}\int_0^{t_р} \lambda(t)dt, \qquad (3.47)$$

а также суммарную наработку $t_н$ до начала массовых параметрических отказов, которые характеризуются отклонением значения хотя бы одного рабочего параметра за пределы допуска.

Если система состоит из n элементов и отказ любого из них приводит к отказу всей системы, то такое соединение элементов в смысле надежности называется последовательным. Показатели надежности систем по известным характеристикам элементов в предположении, что они соединены последовательно, рассчитываются по следующим формулам.

Вероятность безотказной работы $R(t)$ системы на временно́м интервале $[0; t]$ равна произведению вероятностей безотказной работы $R_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ элементов, т. е.

$$R(t)=\prod_{i=1}^{n} R_i(t), \qquad (3.48)$$

или для отрезка времени $[t_0, t_0+\tau]$:

$$R(t_0, t_0+\tau)=\prod_{i=1}^{n} R_i(t_0, t_0+\tau). \qquad (3.49)$$

Интенсивность отказов $\Lambda(t)$ системы равна сумме интенсивностей отказов $\lambda_i(t)$ элементов, т. е.

$$\Lambda(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t). \tag{3.50}$$

Плотность вероятности $f(t)$ времени работы до отказа системы определяется по формуле

$$f(t)=R(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(t)}{R_i(t)}, \tag{3.51}$$

где $\varphi_i(t)$ — плотность вероятности отказов i-го элемента.

Среднее время m_t работы системы до отказа при сроке службы $t_{\text{сл}}$ рассчитывается следующим образом:

$$m_t=\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i\right)^{-1};\;\; \bar{\lambda}_i=\frac{1}{t_{\text{сл}}}\int_{0}^{t_{\text{сл}}}\lambda_i(t)dt.$$

Если для элементов имеет место показательный закон распределения времени работы до отказа, т. е. выполняется условие экспоненциального закона надежности, то формулы (3.48)–(3.51) принимают следующий вид:

$$R(t)=e^{-\Lambda t};\;\; R(t_0,t_0+\tau)=e^{-\Lambda\tau};\;\; \Lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i;\;\; f(t)=\Lambda e^{-\Lambda t};\;\; m_t=\frac{1}{\Lambda}.$$

Значительная доля отказов систем связана с выходом ее параметров за пределы допуска, т. е. установленные расчетом или экспериментально границы, при которых объект способен выполнять заданные функции. Задача установления допусков с учетом требований надежности и проверка их обеспечения является одной из наиболее сложных и ответственных при проектировании систем и анализе метрологических характеристик ЭС [3].

Конструируемый объект обычно характеризуется рядом параметров, от значений которых зависит качество его функционирования. К таким параметрам относятся характеристики элементов, модулей, узлов, блоков, системы в целом. Например, размеры детали, омическое сопротивление резистора, емкость конденсатора, коэффициент усиления и т. д. Значение параметра зависит от большого числа факторов, поэтому его рассматривают как случайную величину.

Область допустимого изменения параметра называется допусковой областью, обозначим ее $S_д$. Для n-мерного вектора параметров $y=(y_1, \ldots, y_n)$ область $S_д$ является n-мерным параллелепипедом. Условие $y \in S_д$, т. е. что значение y принадлежит допусковой области, проверяется выполнением соотношений $y_{i,a} < y_i < y_{i,b}$, $i=\overline{1,n}$, где $y_{i,a}$, $y_{i,b}$ — граничные значения для составляющей y_i. Выход вектора y из области $S_д$ рассматривается как отказ объекта. Наряду с областью $S_д$ может вводиться область работоспособного состояния $S_р$ такая, что

$$S_д \subset S_р. \tag{3.52}$$

Из соотношения (3.52) следует, что применение области $S_д$ вместо $S_р$ при вычислении показателей надежности дает некоторую избыточность получаемых результатов.

Допуски делятся на две основные группы — двусторонние и односторонние (рис. 3.42*а*–*в*).

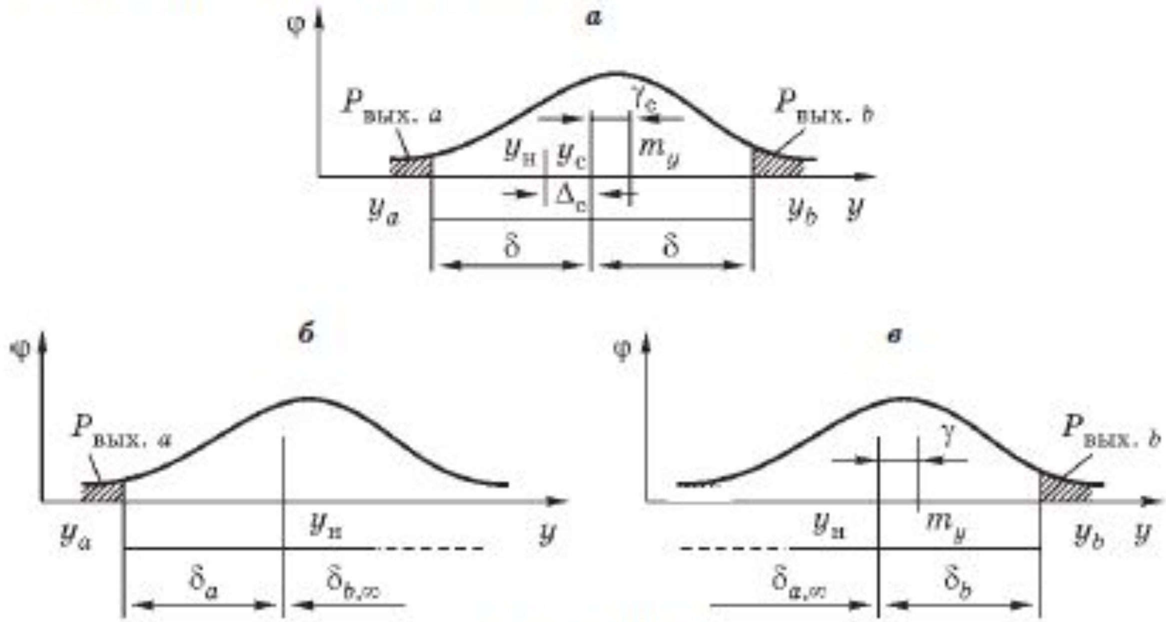


Рис. 3.42
Допуски:

а — двусторонний; *б*, *в* — односторонние.

В одномерном случае область $S_д$ определяется следующими характеристиками: поле допуска 2δ, нижняя y_a и верхняя y_b границы поля допуска, середина поля допуска y_c, номинальное значение параметра $y_н$ и смещение y_c относительно номинального значения Δ_c. Эти характеристики связаны соотношениями:

$$\delta=(y_b-y_a)/2,\ y_c=(y_a+y_b)/2,\ \Delta_c=y_c-y_н.$$

При анализе системы могут решаться прямая и две обратные задачи, которые связаны с сопоставлением распределения параметра y и характеристик поля допуска.

В случае прямой задачи задается закон распределения параметра y, например в виде плотности вероятности $\varphi(y)$, и поле допуска, характеризуемое параметрами y_a, y_b и y_c. Требуется определить вероятность выхода параметра из допусковой области, т. е. $\mathcal{P}[y \notin S_д]=P_{вых}$.

При первой обратной задаче задается плотность $\varphi(y)$ и допустимая вероятность $P_{вых.д}$. Требуется определить характеристики поля допуска такие, чтобы для них выполнялось условие

$$P_{вых} \le P_{вых.д}. \tag{3.53}$$

Во второй обратной задаче по известным характеристикам поля допуска и допустимой вероятности $P_{вых.д}$ надо определить характеристики распределения y, при которых будет выполняться условие (3.53).

В основе решения этих задач лежат следующие формулы расчета вероятности $P_{вых}$, соответствующие трем случаям, приведенным на рисунке 3.42:

$$P_{вых} = P_{вых.ab} = P_{вых.a} + P_{вых.b} = \\ = 1 - \int_{y_a}^{y_b} \varphi(y)dy = 1 - \int_{y_н+\Delta_c-\delta}^{y_н+\Delta_c+\delta} \varphi(y)dy; \tag{3.54}$$

$$P_{вых} = P_{вых.a} = 1 - \int_{y_н-\delta_a}^{\infty} \varphi(y)dy; \tag{3.55}$$

$$P_{вых} = P_{вых.b} = 1 - \int_{\infty}^{y_н+\delta_b} \varphi(y)dy. \tag{3.56}$$

Исследования показывают, что в большинстве случаев распределение значения параметра y по полю допуска для фиксированного момента времени близко к нормальному. При нормальном законе распределения y формулы (3.54)–(3.56) для расчета $P_{\text{вых}}$ принимают следующий вид:

$$P_{\text{вых}.ab} = 1 - \left[\Phi\left(\frac{y_b - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_a - m_y}{\sigma_y}\right)\right];$$

$$P_{\text{вых}.a} = \Phi\left(\frac{y_a - m_y}{\sigma_y}\right); \quad P_{\text{вых}.b} = 1 - \Phi\left(\frac{y_b - m_y}{\sigma_y}\right),$$

где m_y, σ_y — математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины y; $\Phi(z)$ — функция распределения нормального закона ($m=0$, $\sigma=1$), т. е.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx.$$

Для ремонтируемых восстанавливаемых (обслуживаемых) объектов при их использовании в течение заданного времени работы $[t_1, t_к]$ допускаются отказы и вызванные ими кратковременные перерывы в работе. В процессе эксплуатации такого объекта чередуются случайные периоды времени безотказной работы $T^{(i)}$ и времени восстановления (ремонта) $T_в^{(i)}$ (рис. 3.44*б*), т. е. имеет место альтернирующий процесс функционирования объекта.

Надежность объектов данного класса характеризуется рядом комплексных (коэффициенты готовности, оперативной готовности, технического использования, характеризующих безотказность и ремонтопригодность) и единичных (m_t, $R(t, t+\tau)$, характеризующих безотказность, или среднее время восстановления, характеризующее ремонтопригодность) показателей.

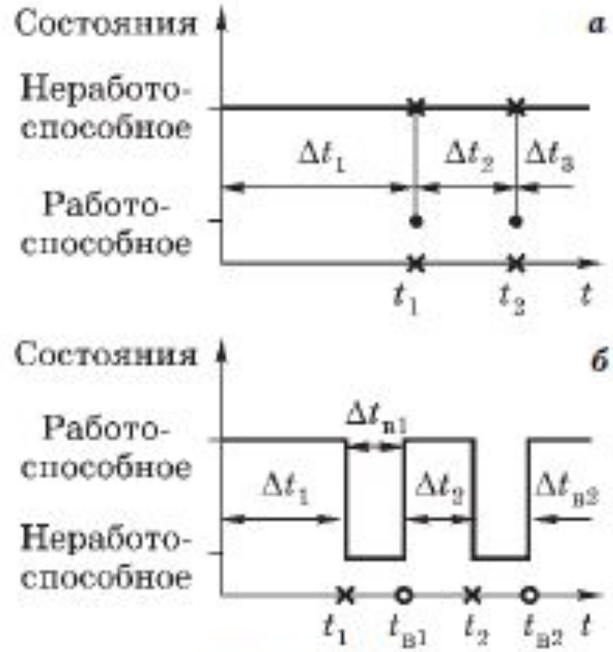


Рис. 3.44
Поток отказов (*а*) и реализация случайного процесса эксплуатации восстанавливаемого объекта (*б*)

Для повышения надежности ремонтируемых восстанавливаемых объектов, не допускающих перерывов в работе (обычно из-за опасных последствий отказов), вводится резервирование, при этом отказавший элемент может ремонтироваться во время работы резервного. Для таких объектов в основном используются те же показатели надежности, что и для ремонтируемых невосстанавливаемых объектов. Различают пять видов резервирования:

1) структурное (аппаратное), предусматривающее использование избыточных структурных элементов (электронных модулей);

2) временнóе (с применением резерва времени);

3) нагрузочное (используется запас по нагрузке);

4) функциональное (компоненты с избыточными функциями);

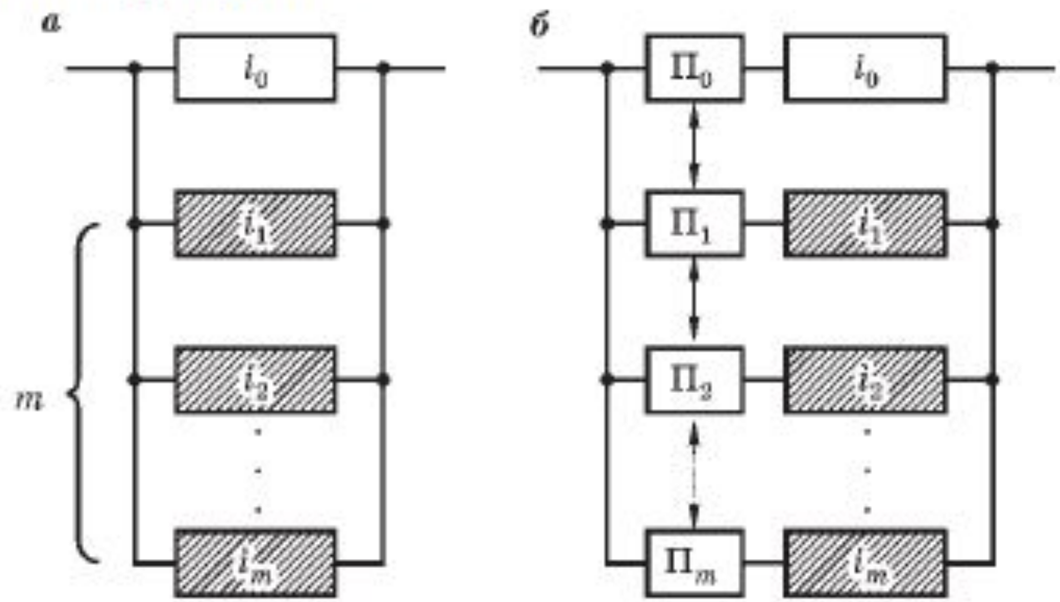
5) информационное (избыточность приема, передачи и хранения информации).

Наиболее часто используются структурное и временнóе резервирование. Под структурным резервированием понимается метод повышения надежности системы, предусматривающий использование избыточных структурных элементов.

Классификация способов структурного резервирования

Признак классификации	Способ резервирования	Описание
Способ включения резерва	Постоянное резервирование	Резервные элементы участвуют в функционировании наравне с основным
	Резервирование замещением	Функции основного элемента передаются резервным элементам после его отказа
Схема включения резерва	Общее резервирование	Резерв предусматривается на случай отказа объекта в целом
	Раздельное резервирование	Резерв предусматривается на случай отказов отдельных элементов или их групп
Состояние резерва	Ненагруженный резерв	Резервные элементы практически не несут нагрузок
	Облегченный резерв	Резервные элементы находятся в менее нагруженном режиме, чем основной
	Нагруженный резерв	Резервные элементы работают в том же режиме, что и основной элемент
Однородность резервирования	Однородное резервирование	Резервирование имеет один вид по соответствующему признаку классификации
	Смешанное резервирование	Совмещение в объекте различных видов резервирования
Кратность резервирования	Однократное резервирование	Кратность резервирования равна единице (дублирование)
	Многократное резервирование	Кратность резервирования свыше единицы

Элемент (узел), минимально необходимый для выполнения системой заданных функций, называется основным или рабочим, элементы, обеспечивающие работоспособность системы в случае отказа основного элемента, — резервными. На структурной схеме расчета надежности резервные элементы размещаются параллельно основному. Резервные элементы могут иметь соединение с основным элементом без переключателя и с переключателем, как показано на рисунке



Рис

Параллельное соединение элементов в структурной схеме надежности:

а — нагруженный резерв; *б* — ненагруженный резерв с переключателями.

Для невосстанавливаемой системы вероятность $R_{i(m)}(t)$ безотказной работы i-го узла на интервале времени $[0;\ t]$ при m-кратном нагруженном резерве (без переключателей) определяется по формуле

$$R_{i(m)}(t) = 1 - \prod_{j=0}^{m} \left[1 - R_{ij}(t)\right],$$

где $R_{0j}(t)$, $R_{ij}(t)$, $j = \overline{1,m}$ — вероятности безотказной работы основного и j-го резервного элементов соответственно.

В данном случае отказ i-го узла наступает, когда выйдут из строя все $m+1$ элементы. Если основной и резервные элементы, работающие в одном режиме, одинаковы, то

$$R_{i(m)}(t) = 1 - [1 - R_{ij}(t)]^{m+1}.$$

<u>Вопрос 3</u>

Методы теории графов при оценке надежности электронных средств и систем

- Основным признаком работоспособного состояния некоторой радиоэлектронной системы, моделируемой графом, является наличие ***связности*** (т.е. наличия хотя бы одного пути) между всеми (или заданными) вершинами графа.
- Для связных графов используется количественная характеристика связности, являющаяся мерой ***структурной надежности***. ***Связностью*** Графа G (***вершинной связностью***) называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Так, например, полный граф из N вершин имеет связность (коэффициент связности $K_{св}$) N-1; простая цепь из любого числа вершин имеет связность 1; простой цикл из любого числа вершин имеет связность 2; «колесо» из любого числа вершин имеет связность 3.

а) N=6, $K_{св}$=5 полный граф

б) N=6, $K_{св}$=1 простая цепь

в) N=6, $K_{св}$=2 простой цикл

г) N=7, $K_{св}$=3 «колесо»

- Наименьшее число рёбер графа G, удаление которых приводит к несвязному подграфу, называется ***рёберной связностью*** графа G. Для многих графов, в частности, для приведенных выше на рисунке, вершинная связность совпадает с реберной.
- При оценке надежности РЭС, моделируемых случайными графами, орграфами и мультиграфами удобнее учитывать именно реберную связность. При этом все вершины считаются идеальными (безотказными), а надежность соединений любой пары вершин оценивается по вероятности их связности с учетом надежности соединяющих их ребер.

Определение 1. Граф $G(VU)$ называется ω-связным, если ω — наименьшее число вершин, которые нужно удалить из G, чтобы оставшийся подграф был несвязным или тривиальным ($\omega = \omega(G)$).

Из определения следует, что связность несвязного графа равна нулю. Полносвязный граф нельзя сделать несвязным, сколько бы вершин из него не удалять, а тривиальный граф получается после удаления из него $n-1$ вершин (n — число вершин полносвязного графа). Иногда $\omega(G)$ называют вершинной связностью.

Определение 2. Реберная связность $\lambda = \lambda(G)$ графа $G(V, U)$ определяется как наименьшее количество ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Очевидно, что $\lambda(G_1)$, где G_1 — тривиальный граф, равно нулю.

Интересна и очень важна по своему содержанию теорема Уитни, объединяющая связность, реберную связность и наименьшую степень вершин графа.

Теорема 1. Для любого графа $G(V, U)$

$$\omega(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G),$$

где $\delta(G)$ — минимальная степень вершин в графе G.

ЛИНЕЙНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ СВЯЗНОСТИ СТРУКТУРЫ СЕТИ СВЯЗИ

Ограниченные возможности применения известных показателей связности при решении задач анализа и синтеза сетей связи вынуждают исследователей расширить поиск таковых, чтобы снять (насколько возможно) отмеченные выше трудности, а также попытаться решить еще нерешенные задачи. Предлагаемый ниже материал является одной из таких попыток.

Рассмотрим некоторый линейный функционал, представляющий собой линейную комбинацию определенным образом выбранных параметров связности, составленную по всем узлам (вершинам) сети связи (графа). Такими параметрами могут быть относительная и абсолютная связности каждого узла (каждой вершины) рассматриваемой сети связи (графа).

На основании рассмотренных параметров запишем общий вид линейного функционала:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left[\frac{H_i}{N - N_i} + \frac{N_i}{N} \right],$$

где i — номер узла (вершины) в сети связи (графе); N — общее число узлов (вершин) сети связи (графа); H_i — ранг i-го узла (вершины); N_i — число узлов (вершин), с которыми i-й узел (вершина) может иметь связь в сети (графе); α_i — коэффициент веса i-го узла (вершины).

АНАЛИЗ СВЯЗНОСТИ СТРУКТУРЫ СЕТИ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Определение 3. Остовным подграфом G_p графа G называется граф $G(V, U_p)$, для которого $U_p \subset U$.

Таким образом, остовной подграф имеет то же множество вершин, что и граф G, но множество ребер подграфа G_p является подмножеством множества ребер исходного графа.

Определение 4. Нижеследующие определения неориентированного дерева эквивалентны друг другу.

Неориентированным деревом является:

1) связный граф, не имеющий циклов;

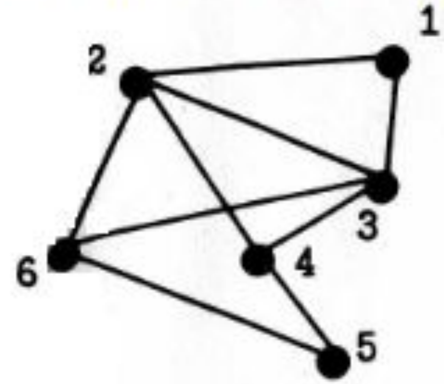
2) граф, не содержащий циклов и имеющий $n-1$ ребер;

3) связный граф, содержащий n вершин и $n-1$ ребер;

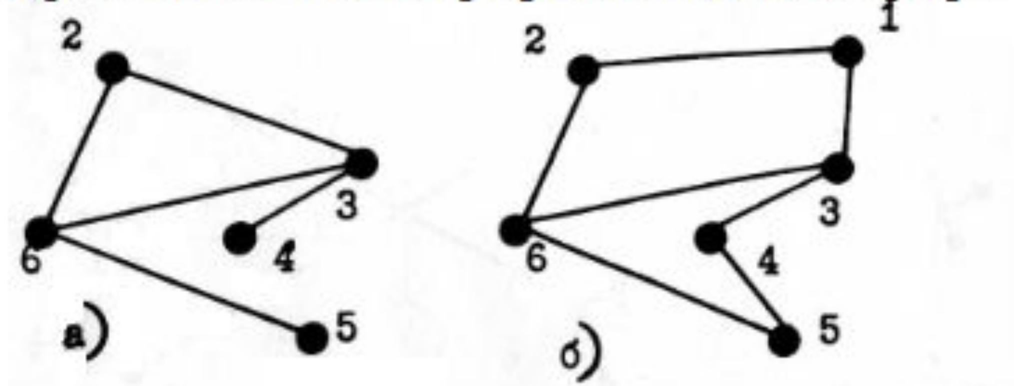
4) граф, в котором каждая пара вершин соединена одной и только одной простой цепью.

Определение 5. Если $G(V, U)$ — неориентированный граф с n вершинами, то остовным деревом (или остовом) графа G называется всякий остовной подграф графа G, являющийся деревом.

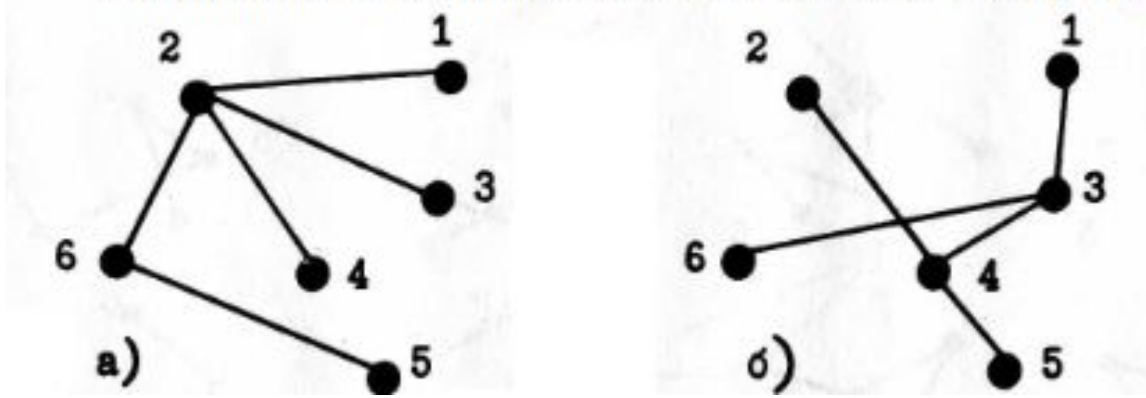
Пример исходного графа



Примеры остовных подграфов исходного графа



Примеры остовных деревьев исходного графа



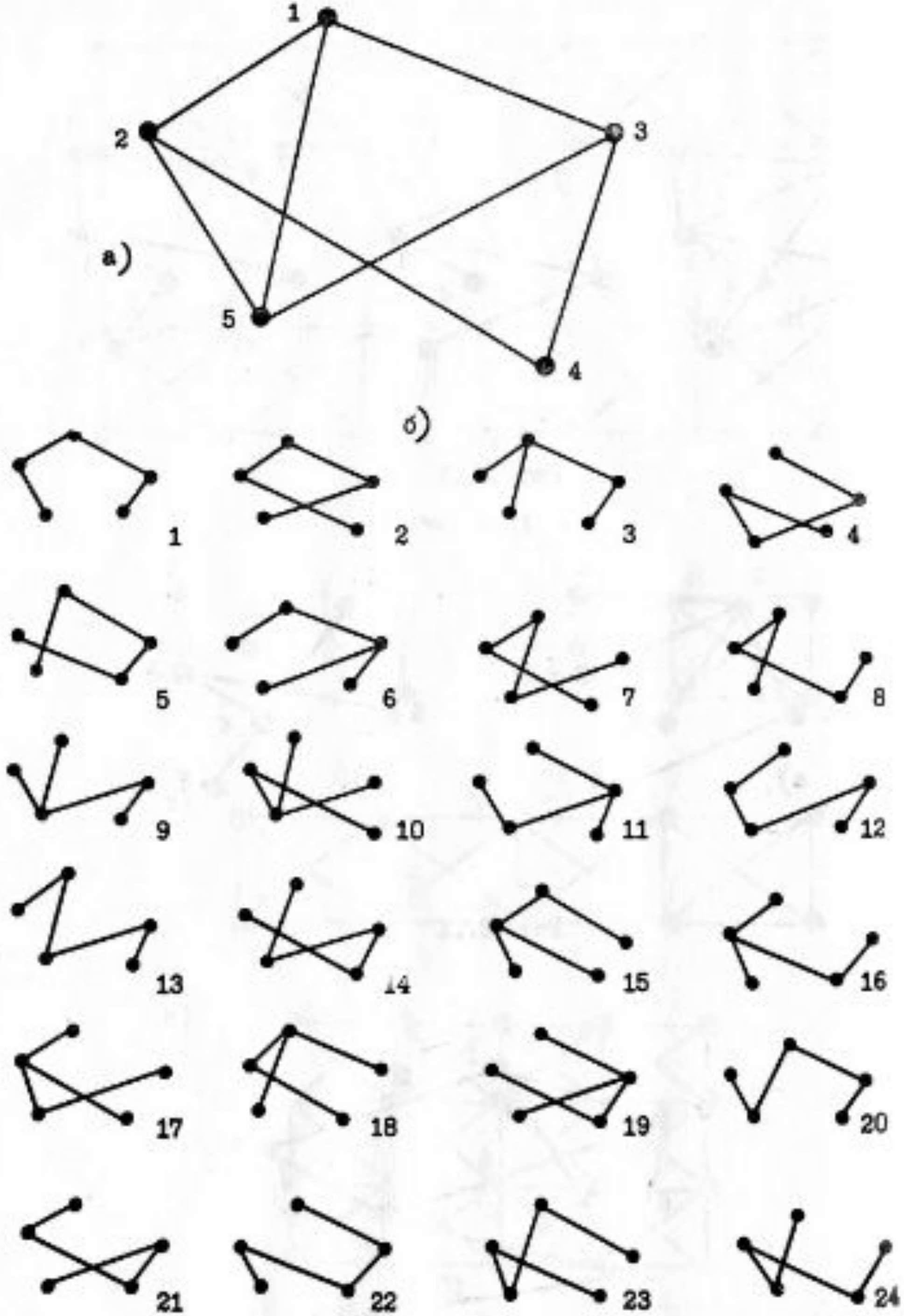
1. Наличие в графе G по крайней мере одного остовного дерева $T(G)$ означает, что данный граф G является связным графом. Отсутствие же остовных деревьев $(T(G)=0)$ приводит к несвязности графа G.

2. Очевидно, что чем больше остовных деревьев $T(G)$ содержится в графе G, тем более связным он является.

Теорема . В графе G без петель число остовных деревьев равно минору любого из элементов главной диагонали квадратной матрицы $(s_j{}^i)$ порядка n, где

$$s_j^i = \begin{cases} \deg v_i & (i=j); \\ -1 & (i \neq j,\ [v_i,\ v_j] \in U); \\ 0 & (i \neq j,\ [v_i,\ v_j] \overline{\in} U) \end{cases}$$

($\deg v_i$ означает степень вершины v_i в графе G, а $[v_i,\ v_j]$ — ребро, соединяющее вершины v_i и v_j).



1
2
3
4
5
а)
б)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

НЕЗАВИСИМЫЕ ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ.

Два остовных дерева называются независимыми, если они не имеют общих ребер (ветвей) . По определению, каждое остовное дерево содержит $n-1$ ребер (ветвей) и является минимальным связным подграфом. Отсюда следует, что максимальное число независимых остовных деревьев в графе порядка n с m ребрами (ветвями) будет определяться отношением $\left[\frac{m}{n-1}\right]$. Для полносвязного графа, у которого число ребер (ветвей) равно $\frac{n(n-1)}{2}$, максимально возможное число независимых остовных деревьев будет равно $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Независимые остовные деревья в графе можно рассматривать как самостоятельные графы одинакового порядка с одинаковым числом ребер (ветвей), а в графе они наложены друг на друга путем совмещения соответствующих вершин. Понятно, что чем их больше в графе, тем он более живучий. Во всяком случае, если граф имеет t независимых остовных деревьев, то для нарушения его связности потребуется изъять из него не менее t ребер (ветвей).

Вообще о структурной живучести можно было бы судить по числу независимых остовных деревьев в графе, однако эта оценка еще далека от совершенства. Так, в графе одиннадцатого порядка ($n=11$) максимальное число независимых остовных деревьев

$$t=\left[\frac{n}{2}\right]=5.$$

Если $m=40$, то число независимых остовных деревьев

$$t=\left[\frac{40}{10}\right]=4.$$

Для $m=30$ число независимых остовных деревьев не превосходит 3. Однако между $m=30$ и $m=40$ существует множество из $C_p^{40}-C_p^{30}$ (где $p=C_{11}^2$) различных структур (графов), причем максимальное увеличение числа независимых остовных деревьев у этого огромного множества структур (графов) может произойти не более чем на единицу. Такая «шкала измерения» значений структурной живучести, конечно, является очень грубой. Например, диапазон изменения числа остовных деревьев для приведенного примера будет определяться значениями 2 770 509 для $m=30$ и 67 807 924 для $m=40$.

Вероятностной сетевой моделью называется граф с заданным распределением связей и совместным распределением вероятностей состояний дуг.

Вероятностная сетевая модель отличается от сетевой тем, что помимо связей должны быть заданы вероятности их состояний. Для описания состояния связей вводят следующие характеристики:

— $P_{i,j}$ — вероятность исправного состояния дуги;

— $P_{<i,k,\dots,j>}$ — вероятность исправного состояния маршрута;

— $P(l_{i,j})$ — вероятность исправного состояния направления;

— $q_{i,j}$ — вероятность отказа дуги;

— $q_{<i,k,\dots,j>}$ — вероятность отказа маршрута;

— $q(l_{i,j})$ — вероятность отказа направления.

Очевидными являются равенства

$$P_{i,j}+q_{i,j}=1; \quad P_{<i,k,\dots,j>}+q_{<i,k,\dots,j>}=1; \quad P(l_{i,j})+q(l_{i,j})=1.$$

Вероятность исправного состояния сети связи определяется состоянием ее элементов: узлов и линий связи. Как правило, состояния узлов и линий связи взаимозависимы. Например, отказ узла связи приводит к отказу инцидентных с ним линий связи.

Расчет вероятности связности приводимых двухполюсных сетей достаточно прост и проводится путем замены групп последовательно или параллельно соединенных ребер на одно эквивалентное ребро,

При этом вероятности существования таких эквивалентных ребер определяются по формулам:

$$p_{\text{посл}} = p_1 ... p_k;$$

$$p_{\text{пар}} = 1 - (1 - p_1)...(1 - p_k),$$

где $p_{\text{посл}}$ и $p_{\text{пар}}$ – вероятности существования ребер, заменяющих соответственно группы последовательно и параллельно соединенных ребер; $p_1 ... p_k$ – вероятности существования ребер заменяемой группы.

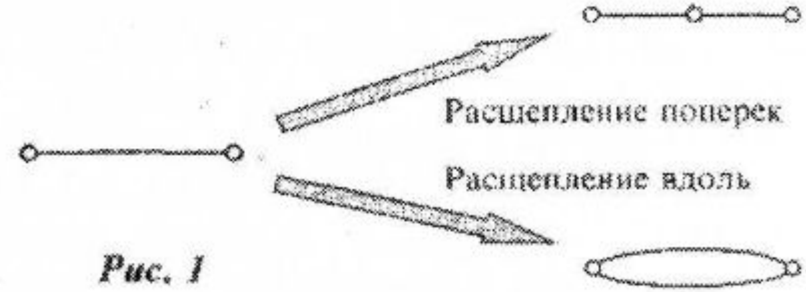


Рис. 1

- К сожалению, большая часть сетей имеет неприводимую структуру, и их вероятность связности не может быть рассчитана столь же просто.
- Для упрощения расчетов целесообразно делать возможные замены последовательно или параллельно соединенных ребер в одно ребро. Однако свести всю неприводимую сеть к одному ребру невозможно. Простейший пример неприводимой структуры дает известная мостиковая схема (рис. а).
- Простота расчетов вероятность связности приводимых сетей позволяет использовать их для получения двухсторонних оценок вероятности связности неприводимых сетей. Для исходной сети с графом G строятся такие две оценочные приводимые сети с графами G_* и G^*, что для их вероятностей связности имеют место неравенства

$$P(G_*) \le P(G) \le P(G^*).$$

- При этом благодаря приводимости структуры оценочных сетей расчет $P(G_*)$ и $P(G^*)$ для них гораздо проще, чем для исходной сети. Известны несколько способов построения оценочных сетей (оценка Эзари-Прошана – рис. б, в; оценка Литвака-Ушакова – рис. г, д).

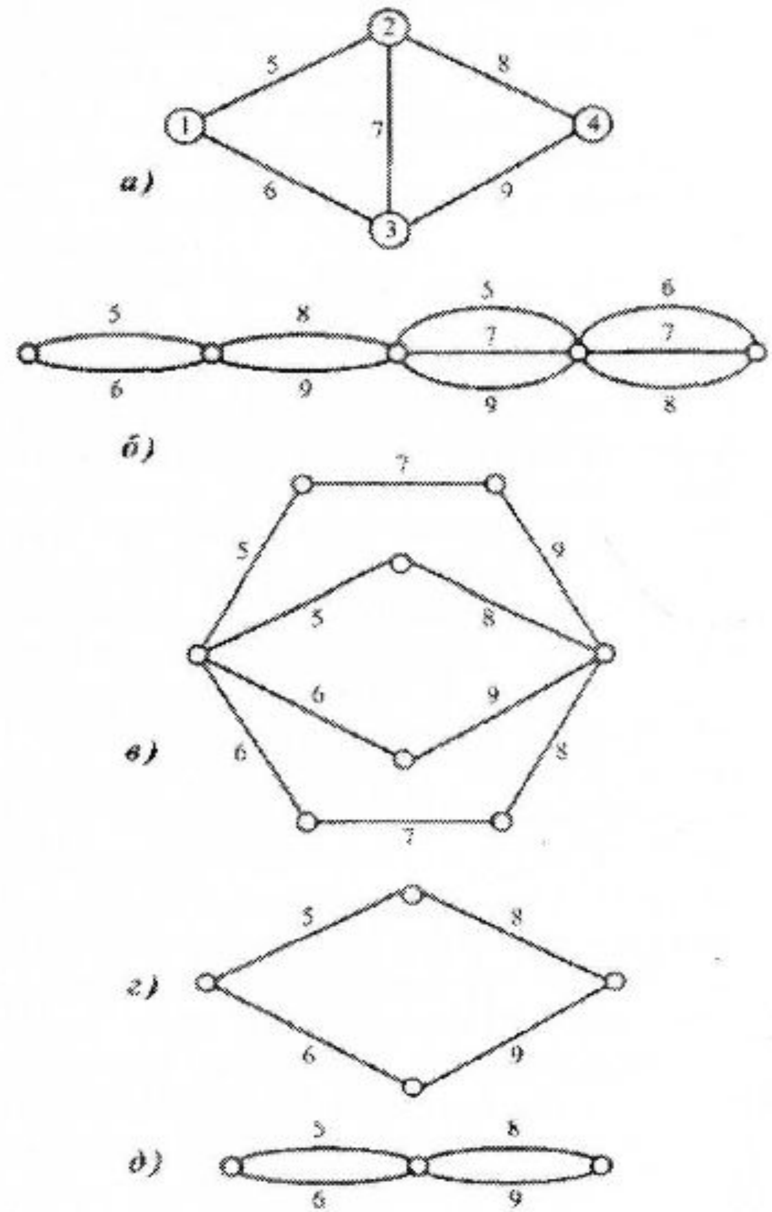
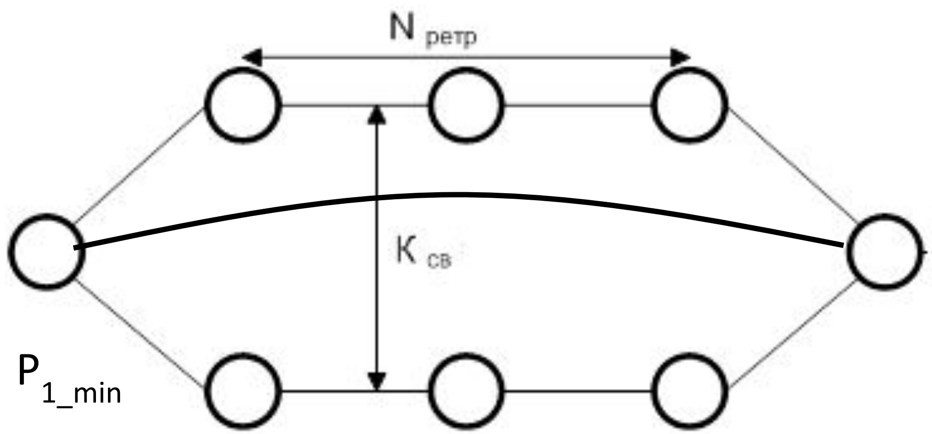


Рис.

Экспресс-метод оценки нижней границы вероятности связности
(метод «наихудший случай»)

Квази-эквивалентная структура



$$P_{экв} = 1 - (1 - P_{1\_min}^{Nретр+1})^{Kсв}$$