



Математическое
моделирование и
проектирование

Светлов Николай Михайлович

E-mail svetlov@timacad.ru

<http://svetlov.timacad.ru>

План

1. Цели и содержание курса
2. Методика преподавания
3. Типология математических моделей, применяемых в агрономии, и методов их исследования
4. Моделирование минерального питания растений
5. Моделирование сочетания культур
6. Моделирование системы земледелия
7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома

1. Цели и содержание курса

- Цели
 - Развитие способности к формальному представлению исследуемых процессов и явлений
 - Овладение системной научной парадигмой и методологией перспективизма
 - Воспитание хозяйского отношения к делу

1. Цели и содержание курса



2. Методика преподавания

| № п/п | № модуля и модульной единицы дисциплины | № и название лабораторных/практических/семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий | Вид контрольного мероприятия | Кол-во часов |
|-------|--|--|------------------------------|--------------|
| 1. | Модуль 1. (Проектирование элементов системы земледелия) | | Тестирование | 0,5 |
| | Модульная единица 1. (Моделирование минерального питания растений) | Лабораторная работа № 1. (Моделирование минерального питания растений) | Защита | 4 |
| | Модульная единица 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве) | Лабораторная работа № 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве) | Защита | 3,5 |
| 2. | Модуль 2. (Основы комплексного проектирования системы земледелия) | | Тестирование | 0,5 |
| | Модульная единица 3 (Моделирование системы земледелия) | Лабораторная работа № 3 (Моделирование системы земледелия) | Защита | 3,5 |

2. Методика преподавания

| № п/п | № модуля и модульной единицы дисциплины | № и название лабораторных/практических/семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий | Вид контрольного мероприятия | Кол-во часов |
|-------|--|--|------------------------------|--------------|
| 3. | Модуль 3. (Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома) | | Коллоквиум | 1 |
| | Модульная единица 4а (Моделирование севооборота) | Лабораторная работа № 4а (Моделирование севооборота) | Защита | 3 |
| | Модульная единица 4б (Моделирование роста и развития растений) | Лабораторная работа № 4б (Моделирование роста и развития растений) | Защита | |
| | Модульная единица 4в (Международный опыт моделирования в агрономии) | Лабораторная работа № 4в (Международный опыт моделирования в агрономии) | Защита | |

2. Методика преподавания

- Оценка дифференцированного зачёта выставляется на основании результатов защиты лабораторных работ, тестирования и коллоквиума
- Преподаватель вправе объединить тестирование и коллоквиум по некоторым или всем модулям в одно контрольное мероприятие

2. Методика преподавания

Литература

1. Франс Дж., Торнли Дж. Математические модели в сельском хозяйстве. М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.
2. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.М. и др. СПб.: ИТК ГРАНИТ, 2009.

Учебные материалы в сети Internet

<http://svetlov.timacad.ru/umk8/umk.htm>

Рабочая программа учебной дисциплины

Компьютерные презентации к лекциям

Задания к лабораторным работам

3. Типология математических моделей

- **Математическая модель** – совокупность математических соотношений, описывающих основные закономерности, присущие изучаемому объекту
- **Математическое моделирование** – процесс исследования реального объекта при помощи математических моделей

3. Типология математических моделей

- **Оптимизационные модели**

- Математическое программирование
 - Линейное программирование
 - Выпуклое программирование
 - Динамическое программирование
 - Целочисленное программирование

- **Статистические модели**

- Регрессионный анализ
 - OLS
 - GMM
 - GME

- Проверка гипотез

- Метод условных вероятностей

- **Имитационные модели**

- Теоретические модели

3. Типология математических моделей

- Дескриптивные (описательные) модели
- Аналитические (исследовательские) модели
- Синтетические (проектные) модели

3. Типология математических моделей

- Системный анализ
- Математическое моделирование
- Синтез систем с заданными свойствами

4. Моделирование минерального питания

$\min_{\mathbf{x}} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{b}_{\min} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{\max})$ фиксированная продуктивность культуры

$\max_{\mathbf{x}, y} (py - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{f}_{\min}(y) \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}_{\max}(y))$ оптимальная продуктивность культуры

\mathbf{x} – вектор объёмов внесения удобрений (*т/га*)

$\mathbf{b}_{\min}, \mathbf{b}_{\max}$ – векторы минимального и максимального количества действующего вещества (*т.д.в./га*)

\mathbf{A} – матрица содержания действующего вещества в единице удобрения (*т.д.в./т*)

\mathbf{c} – вектор цен удобрений (*тыс.руб./т*)

y – продуктивность культуры (*т/га*)

$\mathbf{f}_{\min}(y), \mathbf{f}_{\max}(y)$ – мин. и макс. количество действующего вещества при продуктивности y (*т.д.в./га*)

p – цена продукции (*тыс.руб./т*)

Операции над векторами и матрицами

$$\mathbf{x} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\mathbf{i} \mathbf{x} = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \mathbf{Y} = (\mathbf{X} \mathbf{y}_1; \mathbf{X} \mathbf{y}_2; \dots; \mathbf{X} \mathbf{y}_m), \text{ где } \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1; \mathbf{y}_2; \dots; \mathbf{y}_m)$$

4. Моделирование минерального питания

Первая модель

- Проще
- Решается с помощью симплексного метода
- Исходные данные, как правило, доступны
- *Может быть решена для разных уровней продуктивности*

Вторая модель

- Мощнее
- Функции $f_{\min}(y)$ и $f_{\max}(y)$ обычно нелинейные
 - градиентные методы решения
- Функции $f_{\min}(y)$ и $f_{\max}(y)$ обычно неизвестны
- Применение затруднено

4. Моделирование минерального питания

- ***Применение***

- Однолетний период
 - Только минеральные удобрения
- Многолетний период
 - Только для монокультуры
 - Органические и минеральные удобрения
- Защищённый грунт

5. Моделирование сочетания культур

$$\max_{\mathbf{x}} ((\mathbf{p} - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \mid \underbrace{\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \leq b_1}_{\text{Пашня, га}}; \underbrace{\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}}_{\text{Предшественник и, га}}; \underbrace{\mathbf{A}_3 \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_2}_{\text{План заготовки кормов, т}})$$

\mathbf{x}_1 – вектор площадей пашни под товарными культурами, га

\mathbf{x}_2 – вектор площадей пашни под кормовыми культурами, га

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2$$

\mathbf{p} – вектор выручки, руб./га

$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ – векторы производственных затрат на товарные/кормовые культуры, руб./га

$$\mathbf{i} = (1, 1, \dots, 1)$$

b_1 – площадь пашни, га

\mathbf{A}_1 – матрица потребности в предшественниках, га/га

\mathbf{A}_2 – матрица способности быть предшественником, га/га

\mathbf{A}_3 – матрица выхода кормов, т/га

\mathbf{b}_2 – вектор потребности в кормах, т

5. Моделирование сочетания культур

Матрица потребности в предшественниках (пример)

| | | | | | | | | |
|--------|---|--|--|--|--|---|--|---|
| | П ш е н и ц а о з и м а я | Я ч м е н ь я р о в о й | Я ч м е н ь + м н о г о л е т н и е т р а в ы I | М н о г о л е т н и е т р а в ы II | М н о л е т н и е т р а в ы | О д н о л е т н и е т р а в ы | К о р м о в я с в ё л а | К у р у з а н а с и л о с |
| Подсев | | | | | | | | |

Матрица способности быть предшественником

| | | | | | | | |
|---|--|---|---|--|---|--|---|
| П ш е н и ц а о з и м а я | Я ч м е н ь я р о в о й | Я ч м е н ь + м н о г о л е т н и е т р а в ы | М н о л е т н и е т р а в ы I | М н о л е т н и е т р а в ы II | О д н о л е т н и е т р а в ы | К о р м о в я с в ё л а | Ку ку ру з а н а с и л о с |
| | | 1 | | | | | |

6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2) \cdot \mathbf{x}_2 - (\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3) \cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{3i} \leq \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \leq \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{4i}, i = 1 \dots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \leq b_5)$$

$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{1n})$ – вектор площадей сельскохозяйственных культур, га

\mathbf{x}_2 – вектор поголовья сельскохозяйственных животных основного (маточного) стада, гол.

$\mathbf{X}_3 = (x_{31}, \dots, x_{3j}, \dots, x_{3n})$ – матрица распределения удобрений по культурам, тонн (столбцы = культуры)

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_{31} \mid \mathbf{x}_{32} \mid \dots \mid \mathbf{x}_{3n}$, где \mathbf{x}_{3j} – j -столбец матрицы \mathbf{X}_3

\mathbf{p}_1 (\mathbf{p}_2) – вектор выручки от реализации продукции растениеводства (животноводства), тыс. руб./га (тыс. руб./гол.)

\mathbf{c}_1 – вектор производственных затрат в растениеводстве (без удобрений и амортизации), тыс.руб./га

\mathbf{c}_2 – вектор производственных затрат в животноводстве (без кормов и амортизации), тыс.руб./гол.

\mathbf{c}_3 – вектор затрат на приобретение и внесение удобрений, тыс.руб./т

\mathbf{A}_0 – матрица использования сельскохозяйственных угодий под культуры, га/га

\mathbf{b}_1 – вектор площадей сельскохозяйственных угодий, га

\mathbf{A}_1 – матрица потребности в предшественниках, га/га

\mathbf{A}_2 – матрица способности быть предшественником, га/га

6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2) \cdot \mathbf{x}_2 - (\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3) \cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{3i} \leq \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \leq \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{4i}, i = 1 \dots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \leq b_5)$$

\mathbf{A}_3 – матрица выхода кормов, *т/га* (столбцы = культуры)

\mathbf{A}_4 – матрица потребности животных в кормах *т/гол.основного стада* (столбцы = виды животных)

\mathbf{b}_2 – вектор скотомест для содержания основного стада животных, *гол.*

\mathbf{b}_{3i} (\mathbf{b}_{4i}) – вектор минимального (максимального) внесения действующего вещества под культуру *i*, *тонн д.в./га*

\mathbf{A}_5 – матрица содержания действующего вещества в каждом удобрении, *тонн д.в./т* (столбцы = виды удобрений)

\mathbf{a}_6 ($\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8$) – векторы затрат оборотных средств в растениеводстве (животноводстве, на приобретение удобрений) в период их наибольшего дефицита, *тыс.руб./га* (*тыс.руб./гол.*, *тыс.руб./т*).

b_5 – размер оборотных средств в период их наибольшего дефицита (учитывая возможности получения кредита), *тыс. руб.*

Существуют и другие постановки этой задачи (с оптимизацией рационов, кредитов, использования труда и т.п.)

7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома

- Три модуля по выбору
 - моделирование севооборота
 - **динамическое программирование**
 - для тех, кто знаком с этим методом или желает в нём разобраться
 - литературные источники предоставляет преподаватель
 - моделирование роста и развития растений
 - **имитационное моделирование**
 - литературные источники предоставляет преподаватель
 - международный опыт моделирования в агрономии
 - **имитационное моделирование** (как правило)
 - для тех, кто знает, в каком источнике можно найти математическую модель, полезную для агронома
- Задание для лабораторного практикума и исходные данные студент определяет самостоятельно и согласует свой выбор с преподавателем
- Допускается теоретическое изучение модели и отражение результатов её изучения в форме реферата (оценка минимальная)