

Лекция 7: Метод потенциальных функций

Предположим, что требуется разделить два непересекающихся образа $V1$ и $V2$.

Это значит, что в пространстве изображений существует, по крайней мере, одна функция, которая полностью разделяет множества, соответствующие образам $V1$ и $V2$. Эта функция должна принимать положительные значения в точках, соответствующих объектам, принадлежащим образу $V1$, и отрицательные — в точках образа $V2$.

В общем случае таких разделяющих функций может быть много, тем больше, чем компактней разделяемые множества.

В процессе обучения требуется построить одну из этих функций, иногда в некотором смысле наилучшую.

Метод потенциальных функций связан со следующей процедурой. В процессе обучения с каждой точкой пространства изображений, соответствующей единичному объекту из обучающей последовательности, связывается функция $U(X, X_i)$, заданная на всем пространстве и зависящая от X_i как от параметра. Такие функции называются потенциальными, так как они напоминают функции потенциала электрического поля вокруг точечного электрического заряда

Обучающей последовательности объектов соответствует последовательность
векторов в пространстве изображений с которыми связана
 последовательность , , $U(X, X_1), U(X, X_2)$, потенциальных функций,
 используемых для построения функций $f(X_1, X_2, \dots)$

По мере увеличения числа объектов в процессе обучения функция f должна
 стремиться к одной из разделяющих функций. В результате обучения могут
 быть построены потенциальные функции для каждого образа:

$$U_1(X) = \sum_{X_i \in V_1} U(X, X_i) \quad (1)$$

$$U_2(X) = \sum_{X_i \in V_2} U(X, X_i)$$

В качестве разделяющей функции $f(X)$ можно выбрать функцию вида:

$$f(X) = U_1(X) - U_2(X) \quad (2)$$

которая положительна для объектов одного образа и отрицательна для объектов другого.

В качестве потенциальной функции рассмотрим функцию вида

$$U(X, X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \varphi_j(X) \varphi_j(X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(X) \psi_j(X_i) \quad (3)$$

где $\varphi_j(X)$ — линейно независимая система функций; λ_j — действительные числа, отличные от нуля для всех $j = 1, 2, \dots$; X_i — точка, соответствующая i -му объекту из обучающей последовательности.

В процессе обучения предъявляется обучающая последовательность и на каждом n -м такте обучения строится приближение $f_n(X)$ характеризуется следующей основной рекуррентной процедурой:

$$f_{n+1}(X) = q_n f_n(X) + r_n U(X_{n+1}, X) \quad (4)$$

Разновидности алгоритмов потенциальных функций отличаются выбором значений q_n и r_n , которые являются фиксированными функциями номера n . Как правило, $q_n < 1$, а r_n выбирается в виде:

$$r_n \equiv \gamma_n (S(f_n(X_{n+1}), f(X_{n+1}))) \quad (5)$$

где $S(f_n, f)$ — невозрастающие функции, причем

$$S(f, f) \equiv 0$$

$$S(f_n, f) \begin{cases} \leq 0, & f_n \geq f, \\ \geq 0, & f_n \leq f. \end{cases} \quad (6)$$

Коэффициенты γ_n представляют собой неотрицательную числовую последовательность, зависящую только от номера n . Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = \text{const} (\neq \infty) \quad \text{Например, } \gamma_n = \frac{1}{n}$$

Разработано несколько вариантов алгоритмов потенциальных функций, различие между которыми состоит в выборе законов коррекции разделяющей функции от шага к шагу, т. е. в выборе коэффициентов r_n . Приведем два основных алгоритма потенциальных функций.

1. Будем считать, что $f_0(X) \neq 0$ (нулевое приближение). Пусть в результате применения алгоритма после n -го шага построена разделяющая функция $f_n(X)$, а на $(n+1)$ -м шаге предъявлено изображение X_{n+1} , для которого известно действительное значение разделяющей функции $f(X_{n+1})$. Тогда функция $f_{n+1}(X)$ строится по следующему правилу:

$$f_{n+1}(X) = f_n(X) + \gamma_{n+1} \text{sign}(f(X_{n+1}) - f_n(X_{n+1})) \cdot U(X, X_{n+1}) \quad (7)$$

2. Во втором алгоритме также принимается, что $f_0(X) \neq 0$. Переход к следующему приближению, т. е. переход от функции $f_n(X)$ к $f_{n+1}(X)$, осуществляется в результате следующей рекуррентной процедуры:

$$f_{n+1}(X) = f_n(X) + (f(X_{n+1}) - f_n(X_{n+1})) \cdot \frac{1}{\lambda} U(X, X_{n+1}) \quad (8)$$

где λ - произвольная положительная константа

Если в (3) принять

$$\psi_j(X) = \text{sign}\left(\sum_{v=1}^m \beta_{vj} x_v + \Theta_j\right) \quad (9)$$

и предположить, что x_v может иметь только два значения **0** и **1**, то в этом случае алгоритм потенциальных функций будет совпадать со схемой перцептрона с индивидуальными порогами А-элементов и с коррекцией ошибок.

Поэтому многие теоретические положения метода потенциальных функций могут быть успешно применены для анализа некоторых перцептронных схем.