Лекция 7: Метод потенциальных функций

Предположим, что требуется разделить два непересекающихся образа ***V1*** и ***V2***.

Это значит, что в пространстве изображений существует, по крайней мере, одна функция, которая полностью разделяет множества, соответствующие образам *V1* и *V2*. Эта функция должна принимать положительные значения в точках, соответствующих объектам, принадлежащим образу *V1*, и отрицательные — в точках образа *V2*.

В общем случае таких разделяющих функций может быть много, тем больше, чем компактней разделяемые множества.

В процессе обучения требуется построить одну из этих функций, иногда в некотором смысле наилучшую.

.

Метод потенциальных функций связан со следующей процедурой. В процессе обучения с каждой точкой пространства изображений, соответствующей единичному объекту из обучающей последовательности, связывается функция $U(X, X_i)$, заданная на всем пространстве и зависящая от X_i как от параметра. Такие функции называются потенциальными, так как они напоминают функции потенциала электрического поля вокруг точечного электрического заряда

Обучающей последовательности объектов соответствует последовательность векторов $X_1, X_2, \ldots$ в пространстве изображений с которыми связана последовательность $U(X, X_1)$, $U(X, X_2)$, ... потенциальных функций, используемых для построения функций $f(X_1, X_2, \ldots)$.

По мере увеличения числа объектов в процессе обучения функция *f* должна стремиться к одной из разделяющих функций. В результате обучения могут быть построены потенциальные функции для каждого образа:

$$U_1(X) = \sum_{X_i \in V_1} U(X, X_i)$$
$$U_2(X) = \sum_{X_i \in V_2} U(X, X_i) \qquad (1)$$

В качестве разделяющей функции f(X) можно выбрать функцию вида:

$$f(X) = U_1(X) - U_2(X) \tag{2}$$

которая положительна для объектов одного образа и отрицательна для объектов другого.

В качестве потенциальной функции рассмотрим функцию вида

$$U(X, X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \varphi_j(X) \varphi_j(X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(X) \psi_j(X_i) \tag{3}$$

где $\varphi_j(X)$ — линейно независимая система функций; λ_j — действительные числа, отличные от нуля для всех *j = 1, 2, …* ; X_i — точка, соответствующая *i*-му объекту из обучающей последовательности.

В процессе обучения предъявляется обучающая последовательность и на каждом *n*-м такте обучения строится приближение $f_n(X)$ характеризуется следующей основной рекуррентной процедурой:

$$f_{n+1}(X) = q_n f_n(X) + r_n U(X_{n+1}, X) \tag{4}$$

Разновидности алгоритмов потенциальных функций отличаются выбором значений q_n и r_n , которые являются фиксированными функциями номера *n*. Как правило, $q_n < 1$, а r_n выбирается в виде:

$$r_n \equiv \gamma_n (S(f_n(X_{n+1}), f(X_{n+1}))) \tag{5}$$

где $S(f_n, f)$— невозрастающие функции, причем

$$S(f, f) \equiv 0$$

$$S(f_n, f) \begin{cases} \leq 0, f_n \geq f, \\ \geq 0, f_n \leq f. \end{cases} \tag{6}$$

Коэффициенты γ_n представляют собой неотрицательную числовую последовательность, зависящую только от номера *n*. Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = const\,(\neq \infty)$$ Например, $\gamma_n = \frac{1}{n}$

Разработано несколько вариантов алгоритмов потенциальных функций, различие между которыми состоит в выборе законов коррекции разделяющей функции от шага к шагу, т. е. в выборе коэффициентов r_n. Приведем два основных алгоритма потенциальных функций.

1. Будем считать, что $f_0(X) \neq 0$ (нулевое приближение). Пусть в результате применения алгоритма после *n*-го шага построена разделяющая функция $f_n(X)$, а на *(n+1)*-м шаге предъявлено изображение X_{n+1}, для которого известно действительное значение разделяющей функции $f(X_{n+1})$. Тогда функция $f_{n+1}(X)$ строится по следующему правилу:

$$f_{n+1}(X) = f_n(X) + \gamma_{n+1} sign(f(X_{n+1}) - f_n(X_{n+1})) \cdot U(X, X_{n+1}) \qquad (7)$$

2. Во втором алгоритме также принимается, что $f_0(X) \neq 0$. Переход к следующему приближению, т. е. переход от функции $f_n(X)$ к $f_{n+1}(X)$, осуществляется в результате следующей рекуррентной процедуры:

$$f_{n+1}(X) = f_n(X) + (f(X_{n+1}) - f_n(X_{n+1})) \cdot \frac{1}{\lambda} U(X, X_{n+1}) \qquad (8)$$

где λ - произвольная положительная константа

Если в (3) принять

$$\psi_j(X) = sign(\sum_{\nu=1}^{m} \beta_{\nu j} x_\nu + \Theta_j) \quad (9)$$

и предположить, что x_ν может иметь только два значения **0** и **1**, то в этом случае алгоритм потенциальных функций будет совпадать со схемой перцептрона с индивидуальными порогами А-элементов и с коррекцией ошибок.

Поэтому многие теоретические положения метода потенциальных функций могут быть успешно применены для анализа некоторых перцептронных схем.