МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

ТПР

Лекция № 2-10

Содержание:

- 1. Задачи с булевыми переменными
- 1.1. Фронтальный спуск по дереву ветвлений
- 1.2. Поиск с возвратом (алгоритм Балаша)
- 2. Многокритериальные задачи
- 2.1.Поиск величин эталонов методами типа ветвей и границ.
- 2.2. Формальная постановка задачи.
- 2.3. Решение многокритериальной задачи методом типа ветвей и границ.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МЕТОДОВ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

- 1. Метод вычисления оценки таков, что по мере спуска по дереву ветвлений оценка не улучшается.
- 2. Спуск по дереву ветвлений прекращается, если выбранная вершина обладает следующими свойствами:

- оценка этой вершины является наилучшей;
- существует возможность определить значения всех переменных, причем оценка остается неизменной.

Часть 1

- Решение задач с булевыми переменными

- 1.1. Фронтальный спуск по дереву ветвлений

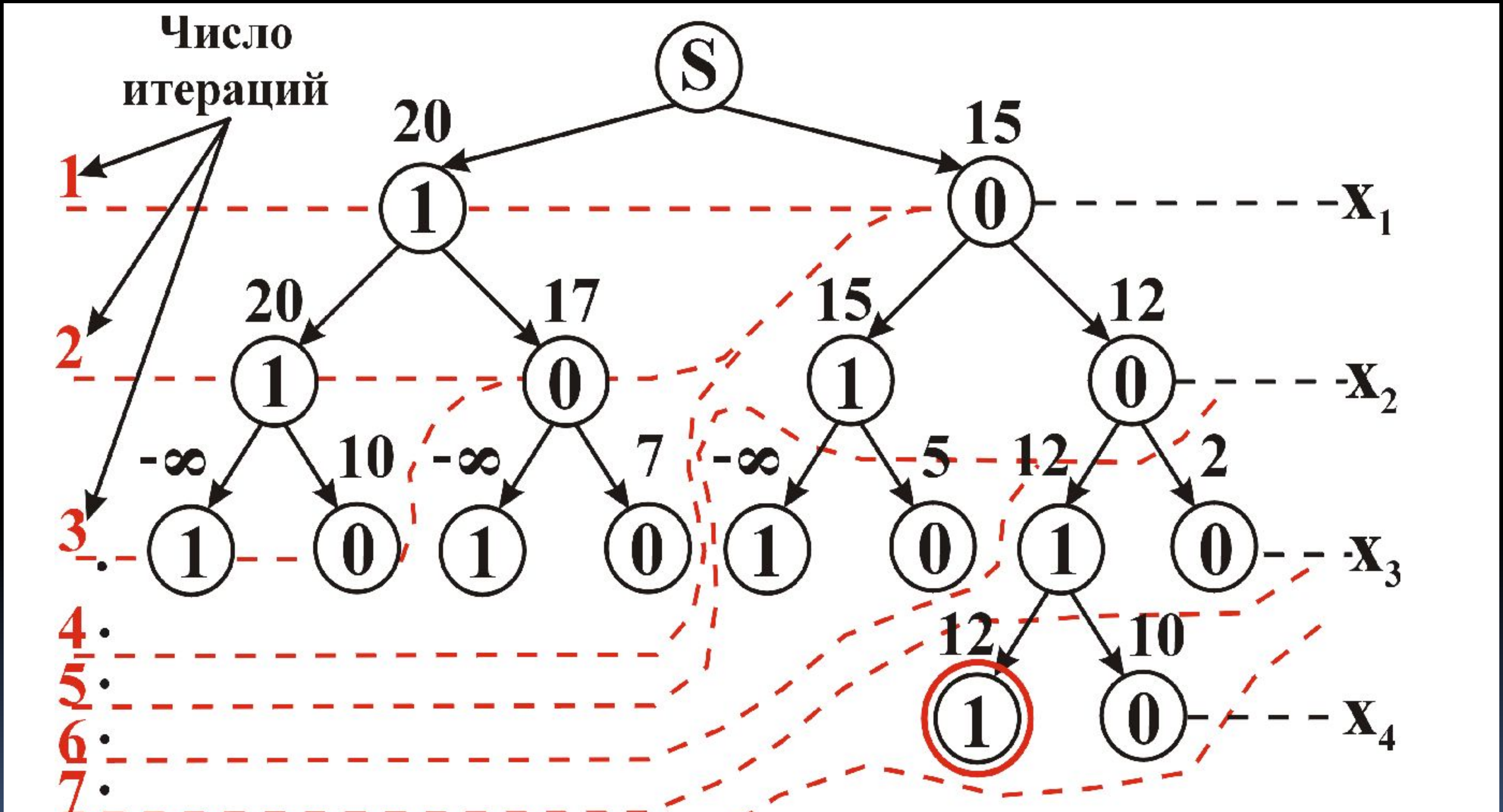
Содержательное описание алгоритма

- Шаг 1. На построенной части дерева ветвлений выбирается вершина с наилучшей оценкой, принадлежащая i-у ярусу.
- Шаг 2. Если i=n, где n – число переменных, то перейти к шагу , в противном случае – к шагу 3.
- Шаг 3. В базис частичного плана, соответствующего выбранной вершине, вводится (i+1)-я переменная и вычисляются соответствующие оценки. Перейти к шагу 1.
- Шаг 4. Конец алгоритма. Оценка выбранной на предыдущем шаге вершины является оптимальным значением целевой функции.

ПРИМЕР 1

- Пусть задана задача о ранце вида:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \to \max \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_i = 1,0; \ i = 1,2,\ldots,4 \end{cases}$$

ДЕРЕВО ВЕТВЛЕНИЙ



Xopt = {0, 0, 1, 1}; R=12.

Достоинства и недостатки фронтального спуска по дереву ветвлений:

- **Достоинства**: шанс на неполный перебор, первый же полный допустимый план является глобально оптимальным.
- **Недостатки**: по мере спуска по дереву ветвлений растет число оценок, хранимых в памяти и затраты времени на их сравнение при выборе направления спуска.
-

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь фронтальным спуском решить задачу вида:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \to \max; \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \le 10; \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 8; \\ x_i = 1,0; \;\; i = 1,2,\dots,4. \end{cases}$$

1.2. Поиск с возвратом

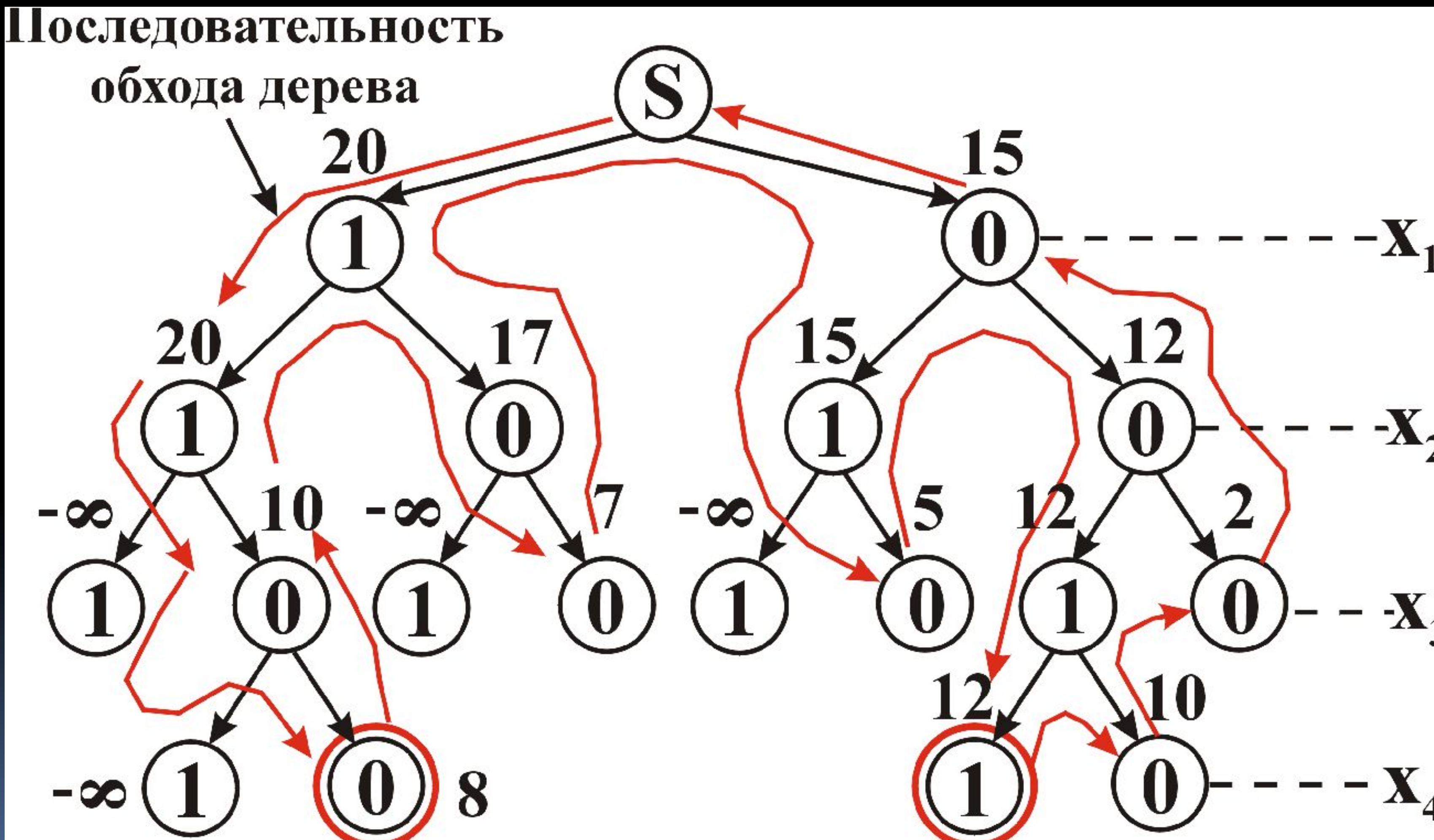
Содержательное описание алгоритма

- **Шаг 1**. R = плохое значение
- **Шаг 2**. i = 1
- **Шаг 3**. $x_i = 1$
- **Шаг 4**. Вычисляется оценка рекорда F
- **Шаг 5**. Если F R, то перейти к **шагу 6**, нет –
- к **шагу 9**
- **Шаг 6**. **Если все ограничения удовлетворяют, то**
- **перейти к шагу 7, нет к шагу 9**
- **Шаг 7**. Если i = n, то перейти к **шагу 8**, нет –
- к **шагу 13**
- **Шаг 8**. R = F, печать R и вектора
- **Шаг 9**. Если $x_i = 1$, то перейти к **шагу 10,** нет –
- к **шагу 13**
- **Шаг 10**. $x_i = 0$, перейти к **шагу 4**
- **Шаг 11.** Если i = 1, то перейти к **шагу 14,** нет к **шагу 12.**
- **Шаг 12**. i = i - 1, перейти к **шагу 9.**
- **Шаг 13**. i = i + 1, перейти к **шагу 3.**
- **Шаг 14.** Конец алгоритма. Последние выданные на печать значения R и , оптимальны.

ПРИМЕР 2

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \to \max; \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \le 10; \\ x_i = 1,0; \ i = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Построение дерева ветвлений



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь методом типа ветвей и границ, реализующим поиск с возвратом, решить задачу вида:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \to \max; \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \le 10; \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 8; \\ x_i = 1{,}0;\ i = 1{,}2{,}\dots{,}4. \end{cases}$$

- ЧАСТЬ 2

- Решение многокритериальных задач методами типа ветвей и границ

Основные положения

1. Свертка критериев с помощью эталонов позволяет получить новую целевую функцию вида:

$$\varphi = \sqrt{\sum_i \left(z_i - \frac{F_i - F_{i\,\min}}{F_{i\max} - F_{i\min}} \right)^2},$$

где F_i **- *i*** – я целевая функция, $z_i = 1$, если $F_i \rightarrow$ ***max*,**
и $z_i = 0$, если $F_i \rightarrow$ ***min*.**

ПРИМЕР 2

- Пользуясь описанным выше методом свертки, решить многокритериальную задачу с булевыми переменными вида:

$$\begin{cases} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \max; \\ F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \ge 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \qquad (1)$$

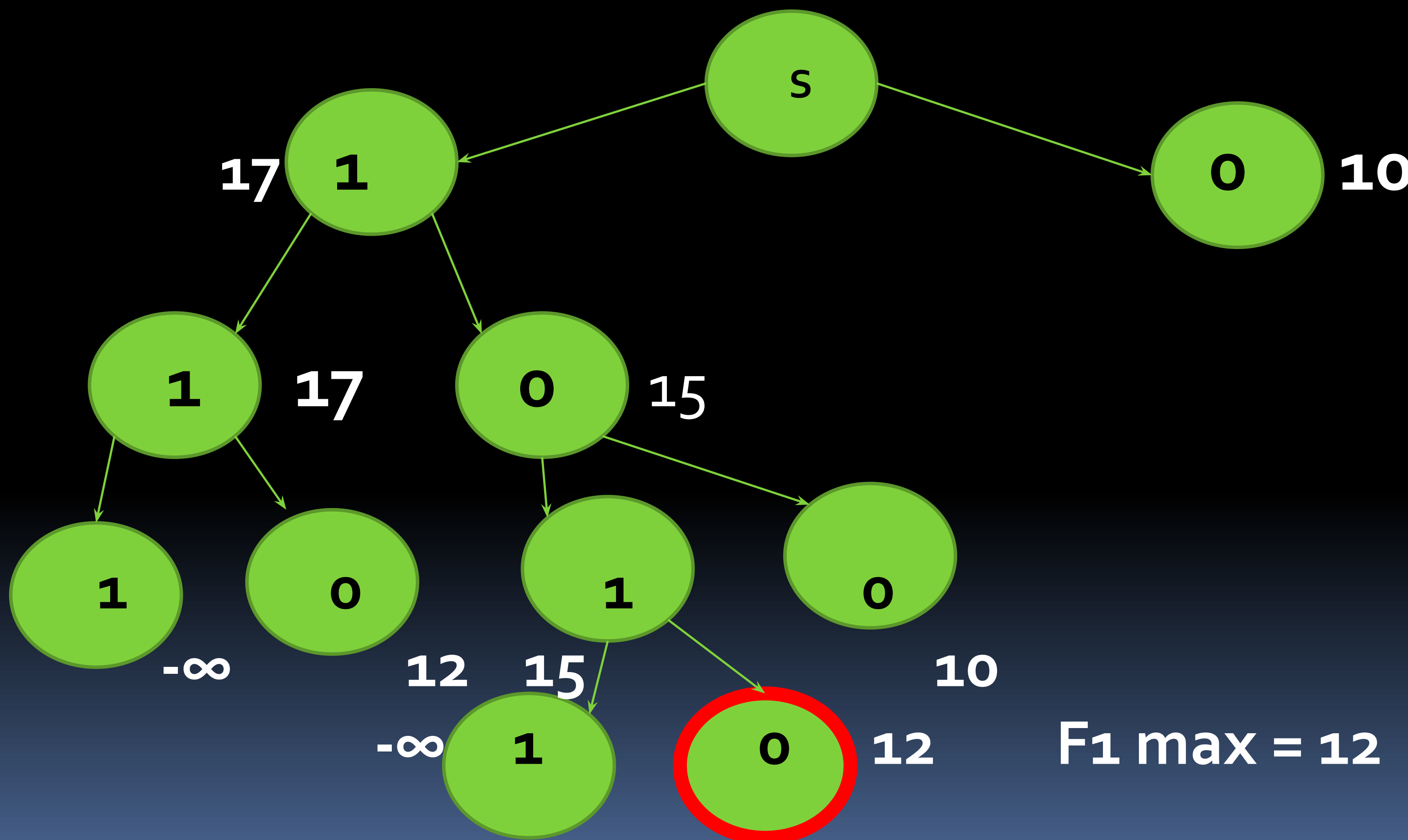
Условия свертки

- Для того, чтобы преобразовать (1) в однокритериальную задачу, следует определить максимальные и минимальные значения F_1 и F_2.

Поиск максимальной величины F_1

$$\begin{cases} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \ge 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \qquad (2)$$

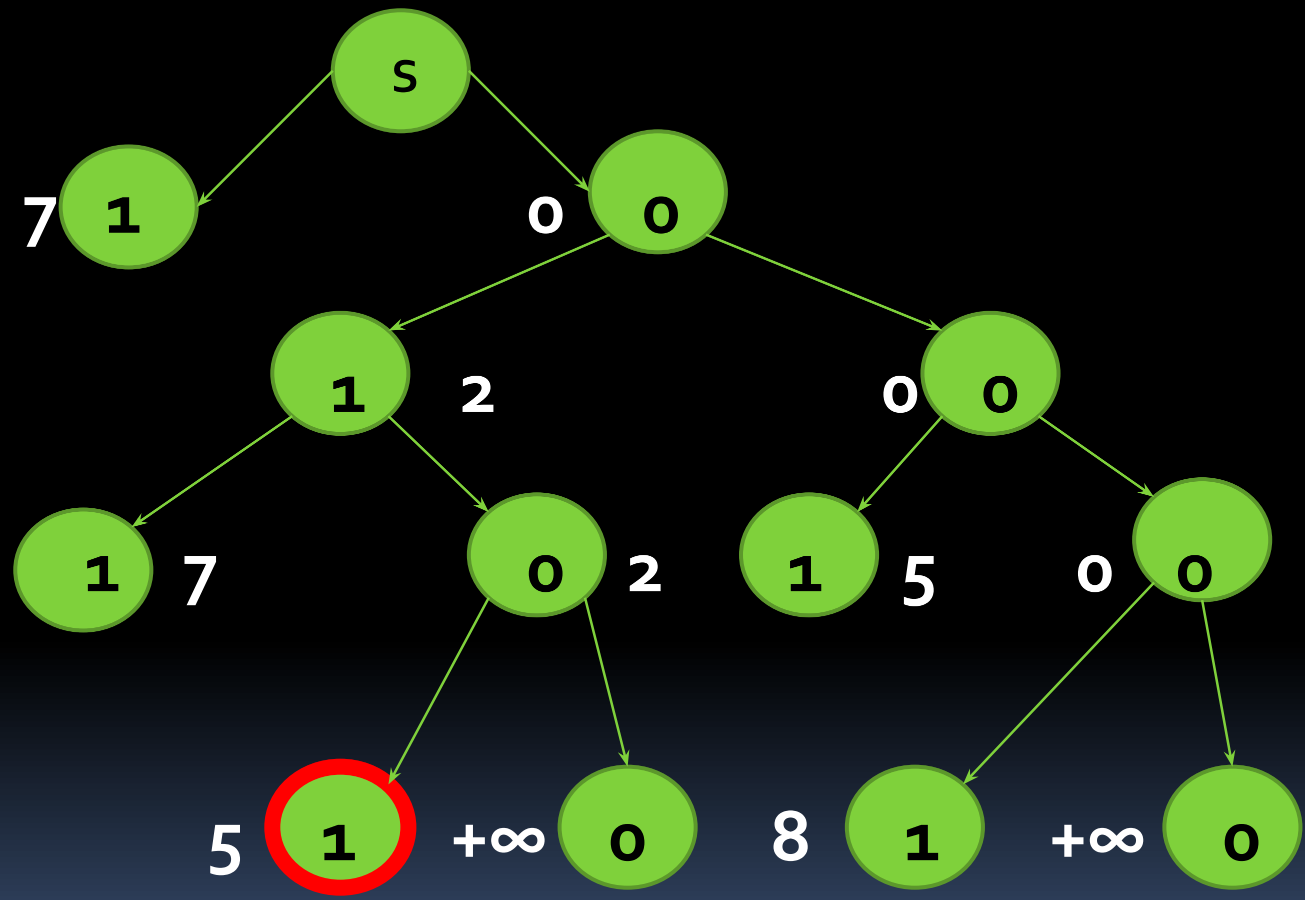
Решение задачи (2) методом типа ветвей и границ



Поиск минимальной величины F_1 сводится к решению задачи (3):

$$\begin{cases} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \ge 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение задачи (3) методом типа ветвей и границ

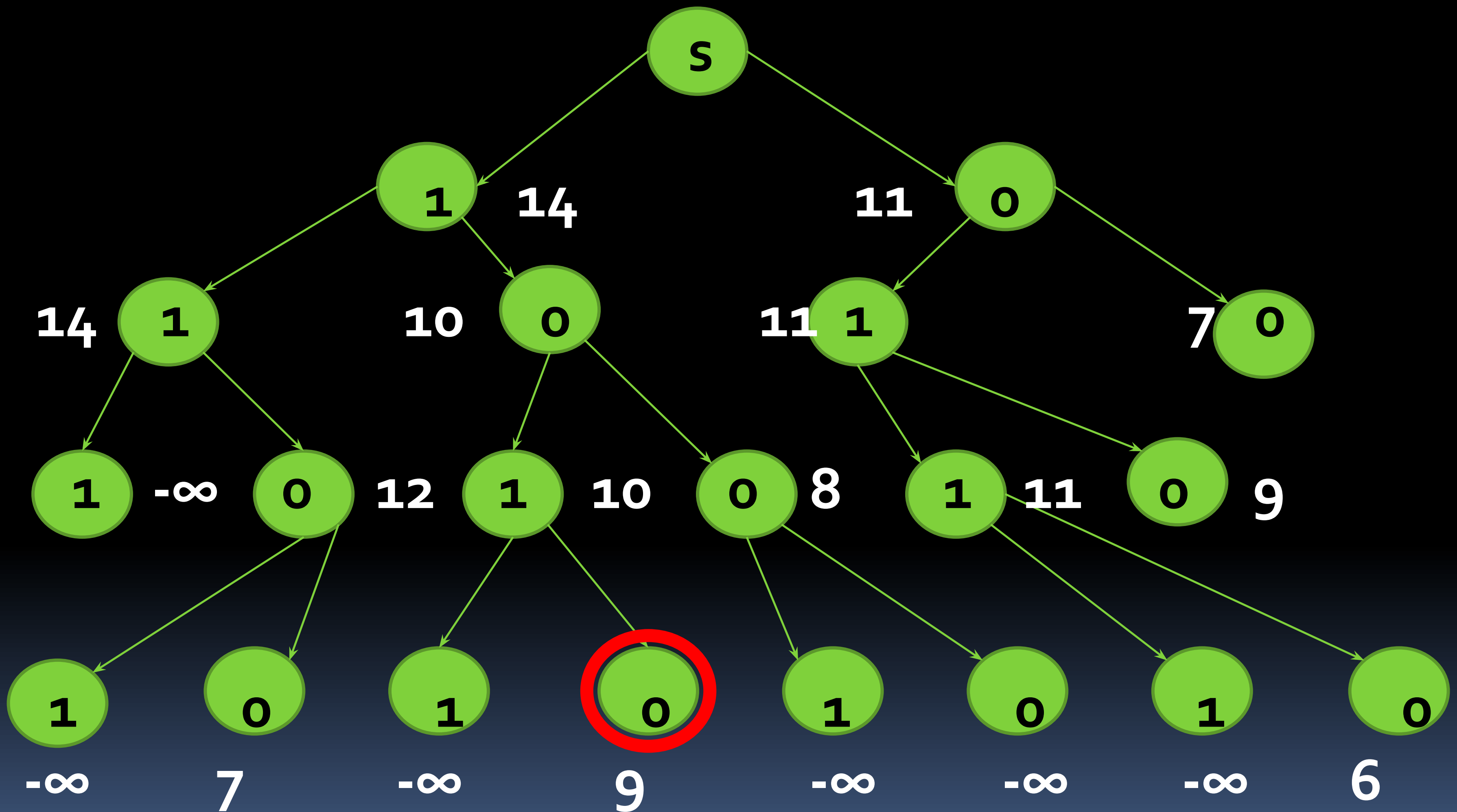


F1 min = 5.

Поиск максимальной величины F_2

$$\begin{cases} F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \ge 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение задачи (4) методом типа ветвей и границ

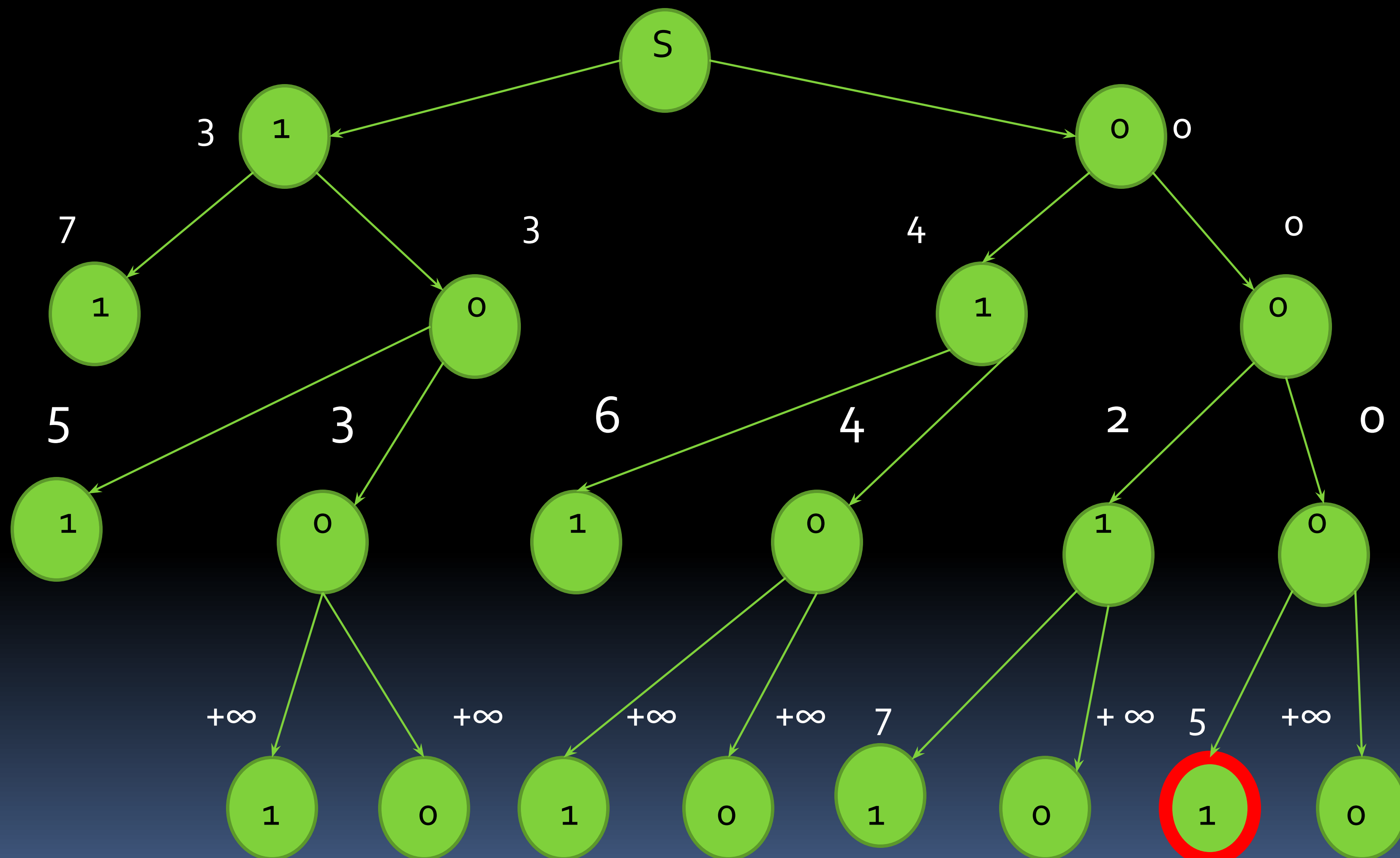


F2 max = 9

Поиск минимальной величины F_2

$$
\begin{cases}
F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \min; \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8; \\
5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \ge 8; \\
\forall i : x_i = 1{,}0.
\end{cases}
\qquad (5)
$$

Решение задачи (5) методом типа ветвей и границ



F2 min = 5

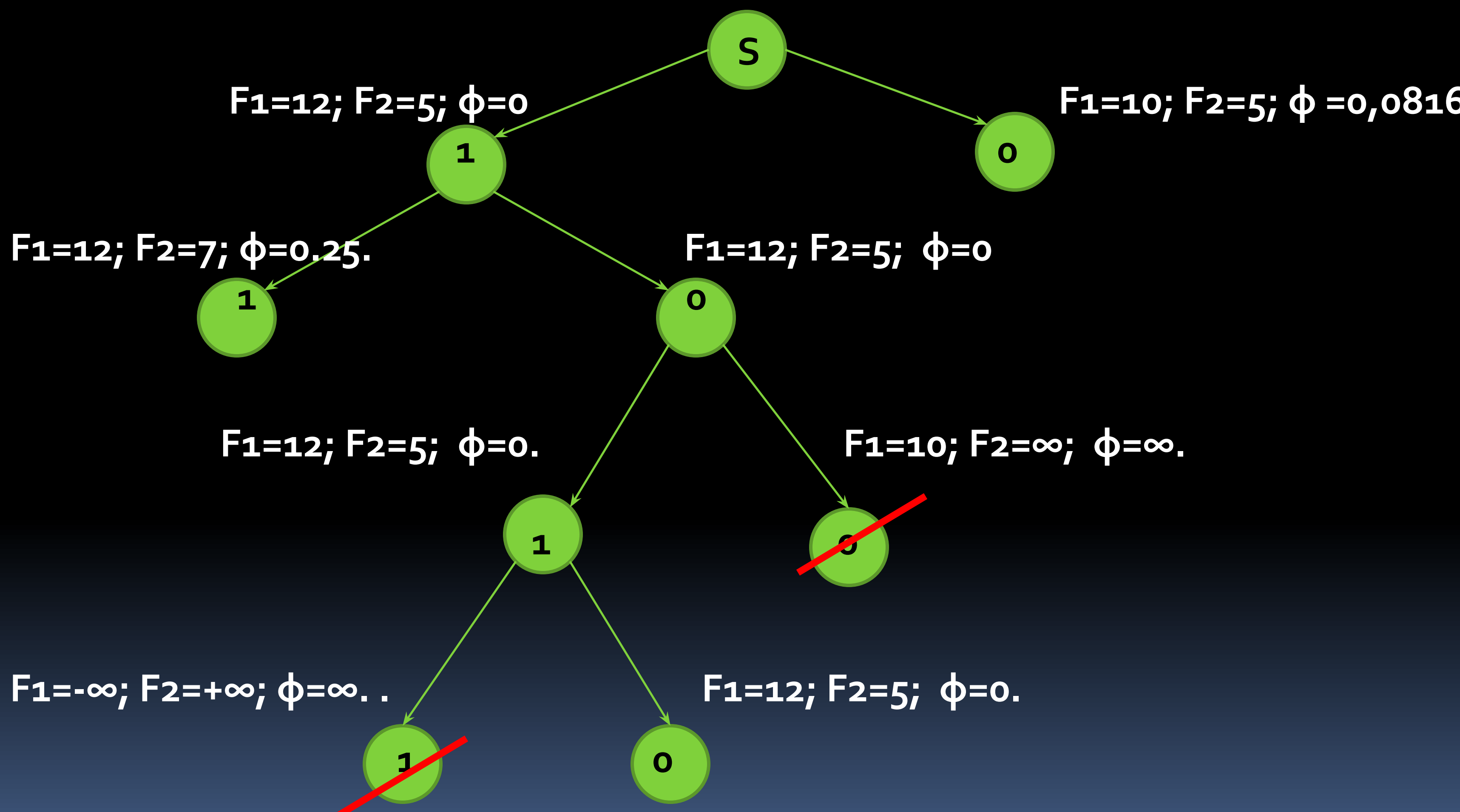
Использование эталонов для преобразования(1) в однокритериальную задачу

$$
\begin{cases}
\varphi = \left(1 - \dfrac{F_1 - 5}{12 - 5}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{F_2 - 5}{9 - 5}\right)^2 \to \min; \\
F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4; \\
F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4; \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8; \\
5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \ge 8; \\
\forall i : x_i = 1,0.
\end{cases}
\qquad (6)
$$

Вид системы (6) после преобразований

$$
\begin{cases}
\varphi = \left(\dfrac{12 - F_1}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{F_2 - 5}{4}\right)^2 \to \min; \\
F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4; \\
F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4; \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8; \\
5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \ge 8; \\
\forall i : x_i = 1{,}0.
\end{cases} \qquad (7)
$$

Решение задачи (7) методом ветвей и границ



$X_{opt} = \{1, 0, 1, 0\}$; $F1 = 12$; $F2 = 5$.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Решить, пользуясь рассмотренной выше технологией, систему вида:

$$\begin{cases} F_1 = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \to \max; \\ F_2 = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \ge 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \qquad (8)$$