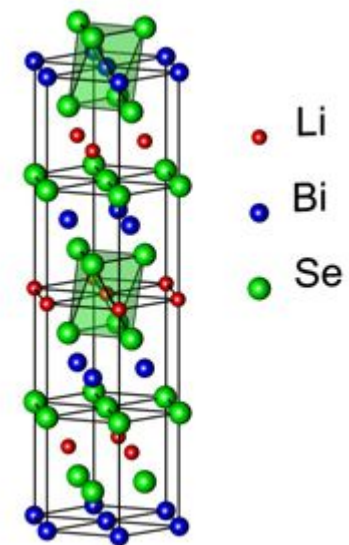


Модели и моделирование

Тема 1. Модели и их типы

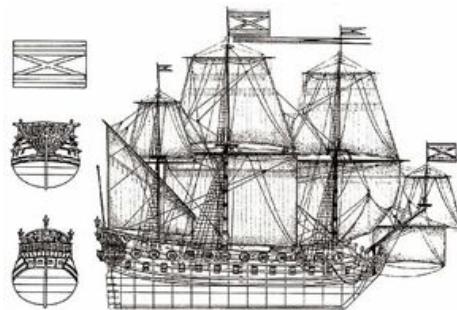
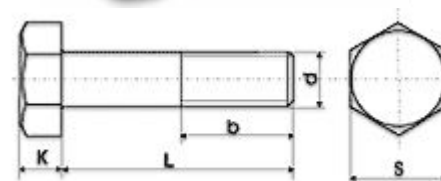
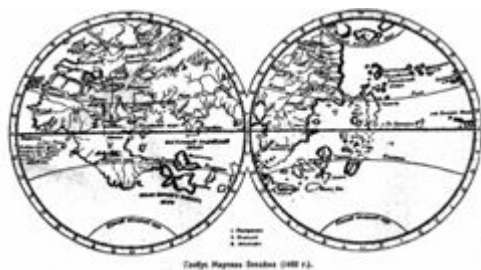
Модели в нашей жизни



Что такое модель?

Модель – это объект, который обладает некоторыми свойствами другого объекта (*оригинала*) и используется вместо него.

Оригиналы и модели



Первый линейный русский корабль «Гото Предестинация»

Что можно моделировать?

Модели объектов:

- уменьшенные копии зданий, кораблей, самолетов, ...
- модели ядра атома, кристаллических решеток
- чертежи
- ...

Модели процессов:

- изменение экологической обстановки
- экономические модели
- исторические модели
- ...

Модели явлений:

- землетрясение
- солнечное затмение
- цунами
- ...

Моделирование

Моделирование – это создание и использование моделей для изучения оригиналов.

Когда используют моделирование:

- **оригинал не существует**
 - древний Египет
 - последствия ядерной войны (Н.Н. Моисеев, 1966)
- **исследование оригинала опасно для жизни или дорого:**
 - управление ядерным реактором (Чернобыль, 1986)
 - испытание нового скафандра для космонавтов
 - разработка нового самолета или корабля
- **оригинал сложно исследовать непосредственно:**
 - Солнечная система, галактика (большие размеры)
 - атом, нейтрон (маленькие размеры)
 - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
 - геологические явления (очень медленные)
- **интересуют только некоторые свойства оригинала**
 - проверка краски для фюзеляжа самолета

Цели моделирования

- **исследование оригинала**

изучение сущности объекта или явления

«Наука есть удовлетворение собственного любопытства за казенный счет» (Л.А. Арцимович)

- **анализ («что будет, если ...»)**

научиться прогнозировать последствия различных воздействиях на оригинал

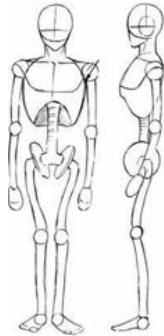
- **синтез («как сделать, чтобы ...»)**

научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия

- **оптимизация («как сделать лучше»)**

выбор наилучшего решения в заданных условиях

Один оригинал – одна модель?



- материальная точка

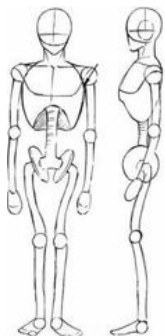


Оригиналу может соответствовать несколько разных моделей и наоборот!

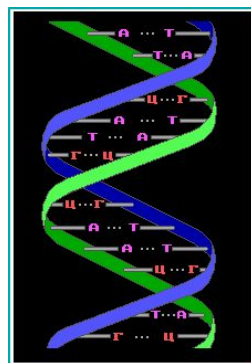
Зачем нужно много моделей?



Тип модели определяется целями моделирования!



изучение
строения
тела



изучение
наследственности

учет граждан
страны



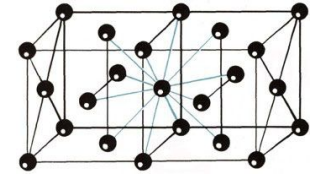
примерка
одежды

тренировка
спасателей



Природа моделей

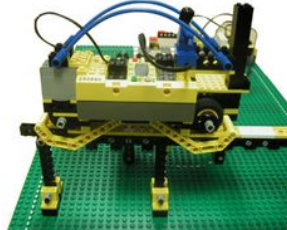
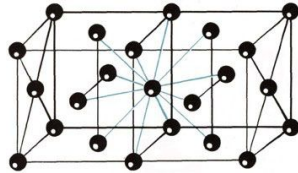
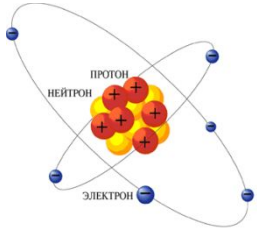
- **материальные (физические, предметные) модели:**



- **Информационные модели** представляют собой информацию о свойствах и состоянии объекта, процесса, явления, и его взаимосвязи с внешним миром:
 - **вербальные** – словесные или мысленные
 - **знаковые** – выраженные с помощью формального языка
 - **графические** (рисунки, схемы, карты, ...)
 - **табличные**
 - **математические** (формулы)
 - **логические** (различные варианты выбора действий на основе анализа условий)
 - **специальные** (ноты, химические формулы)

Модели по области применения

• учебные (в т.ч. тренажеры)



• опытные – при создании новых технических средств



• научно-технические

аэродинамическая труба

испытания в опытном бассейне



имитатор солнечного
излучения



вакуумная камера в Институте
космических исследований



вибростенд
НПО «Энергия»

Модели по фактору времени

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
 - силы, действующие на тело в состоянии покоя
 - результаты осмотра врача
 - фотография
- **динамические**
 - модель движения тела
 - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
 - история болезни
 - видеозапись события

Модели по характеру связей

• детерминированные

- связи между входными и выходными величинами жестко заданы
- при одинаковых входных данных каждый раз получаются одинаковые результаты

Примеры

- движение тела без учета ветра
- расчеты по известным формулам

• вероятностные (стохастические)

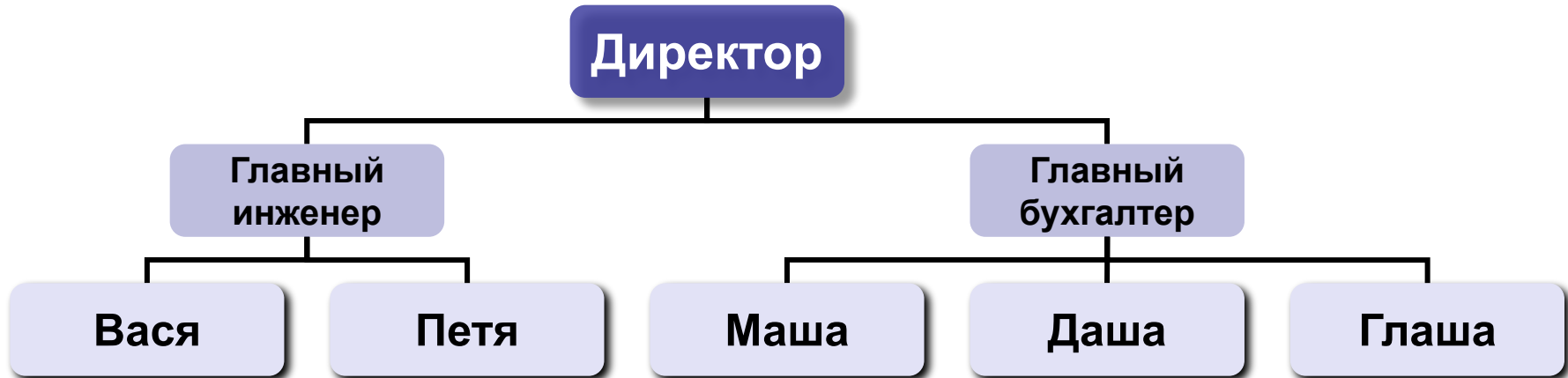
- учитывают случайность событий в реальном мире
- при одинаковых входных данных каждый раз получаются немного разные результаты

Примеры

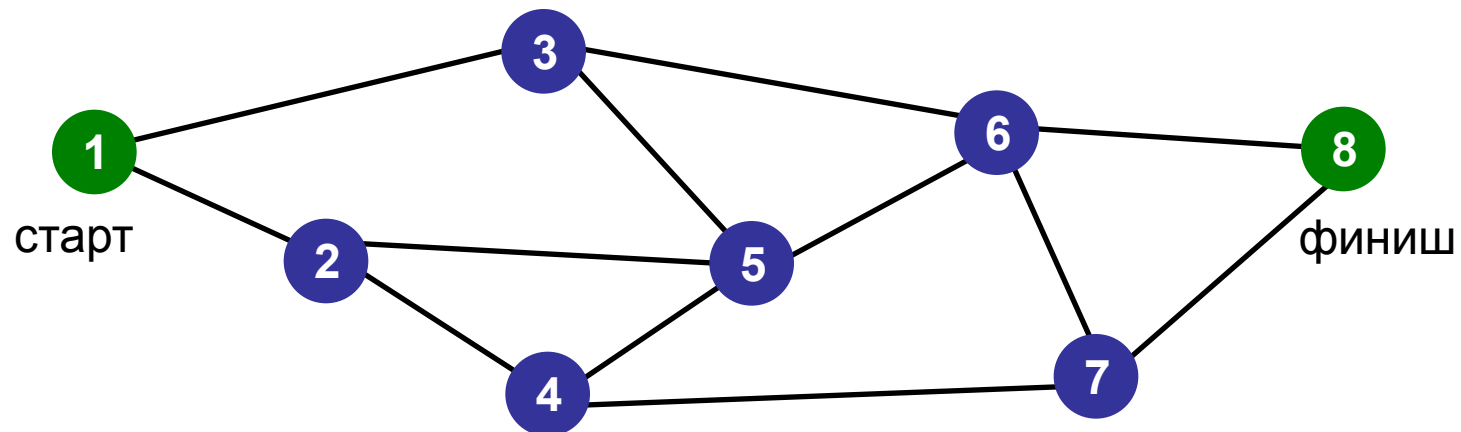
- движение тела с учетом ветра
- броуновское движение частиц
- модель движения судна на волнении
- модели поведения человека

Модели по структуре

- табличные модели (пары соответствия)
- иерархические (многоуровневые) модели



- сетевые модели (графы)



Специальные виды моделей

• имитационные

- нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия;
- максимальный учет всех факторов;
- только численные результаты;



Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:

- испытания лекарств на мышах, обезьянах, ...
- математическое моделирование биологических систем
- модели бизнеса и управления
- модели процесса обучения

Специальные виды моделей

- **игровые** – учитывающие действия противника

Примеры:

- ❑ модели экономических ситуаций
- ❑ модели военных действий
- ❑ спортивные игры
- ❑ тренировки персонала



Задача – найти лучший вариант действий в самом худшем случае!

Адекватность модели

Адекватность – совпадение существенных свойств модели и оригинала:

- результаты моделирования согласуются с выводами **теории** (законы сохранения и т.п.)
- ... подтверждаются **экспериментом**



Адекватность модели можно доказать только **экспериментом!**

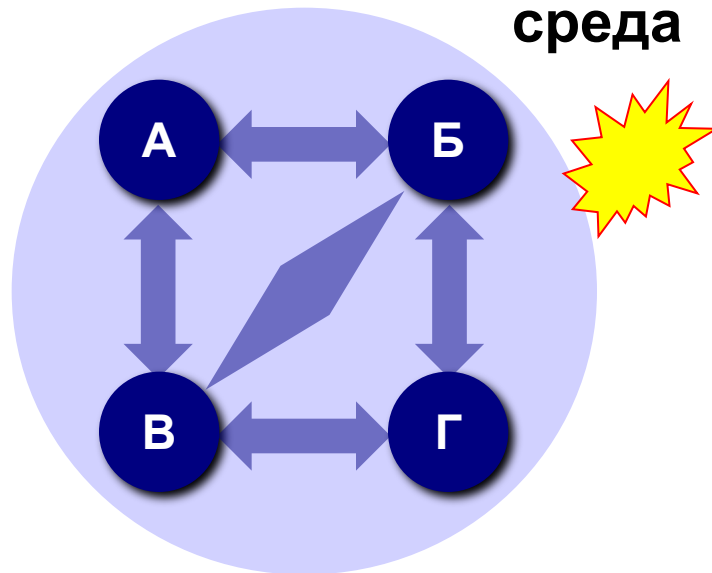
Модель всегда отличается от оригинала



Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Системный подход

Система – группа объектов и связей между ними, выделенных из среды и рассматриваемых как одно целое.



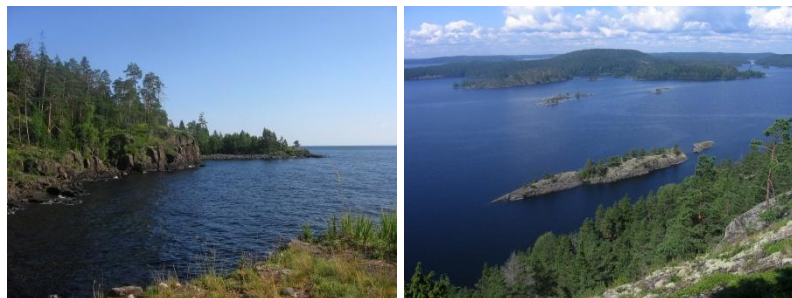
Примеры:

- семья
- экологическая система
- компьютер
- техническая система
- общество



Система обладает (за счет связей!) особыми свойствами, которыми не обладает ни один объект в отдельности!

Модель-не-система:

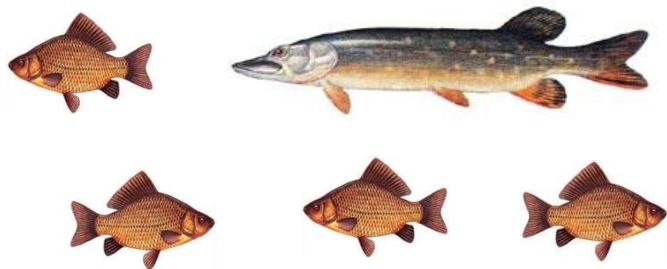


1-я линия:

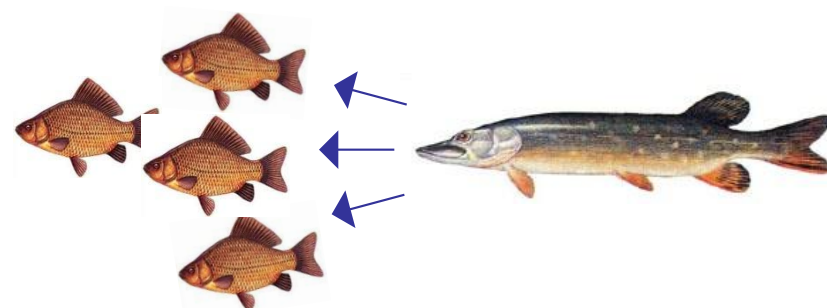
Пр. Ветеранов
Ленинский пр.
Автово
Кировский завод
Нарвская
...

2-я линия:

Купчино
Звездная
Московская
Парк Победы
Электросила
...



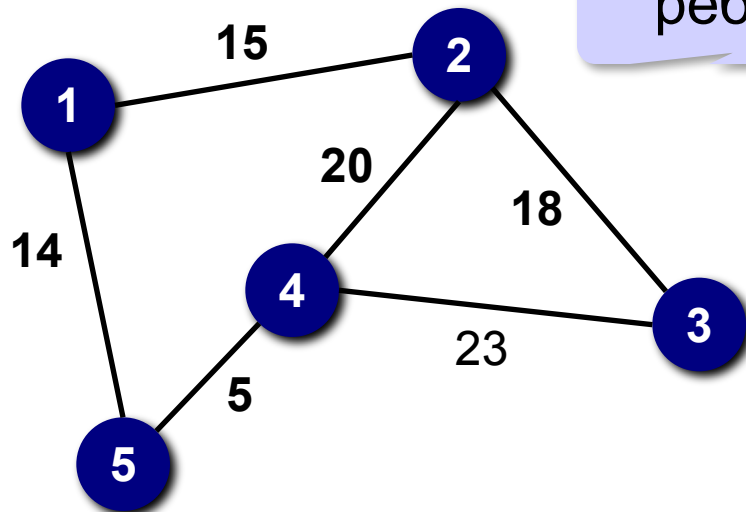
Модель-система:



Системный подход

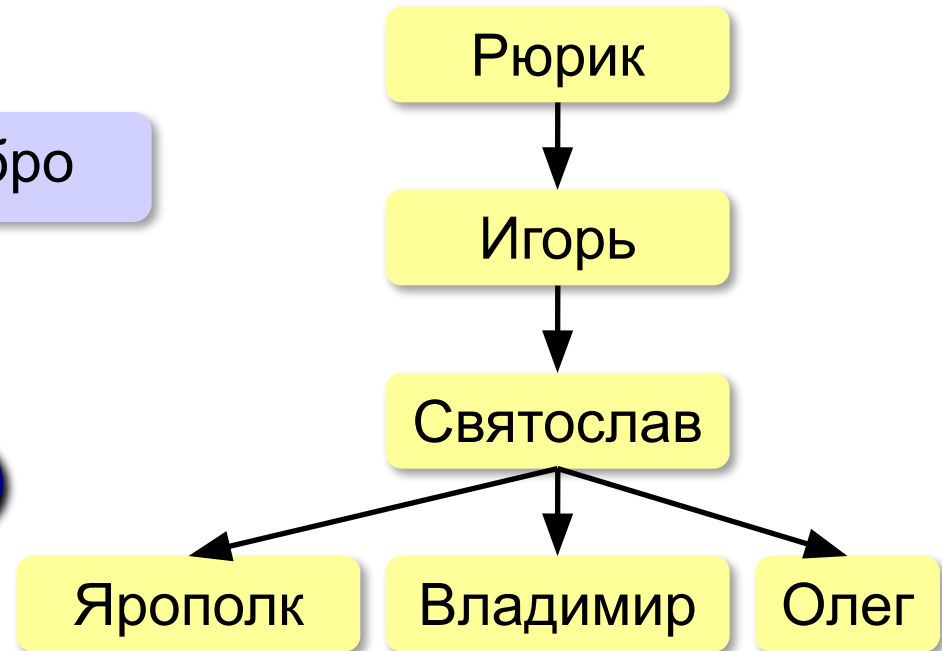
Граф – это набор вершин и соединяющих их ребер.

вершина



ребро

вес ребра
(взвешенный граф)

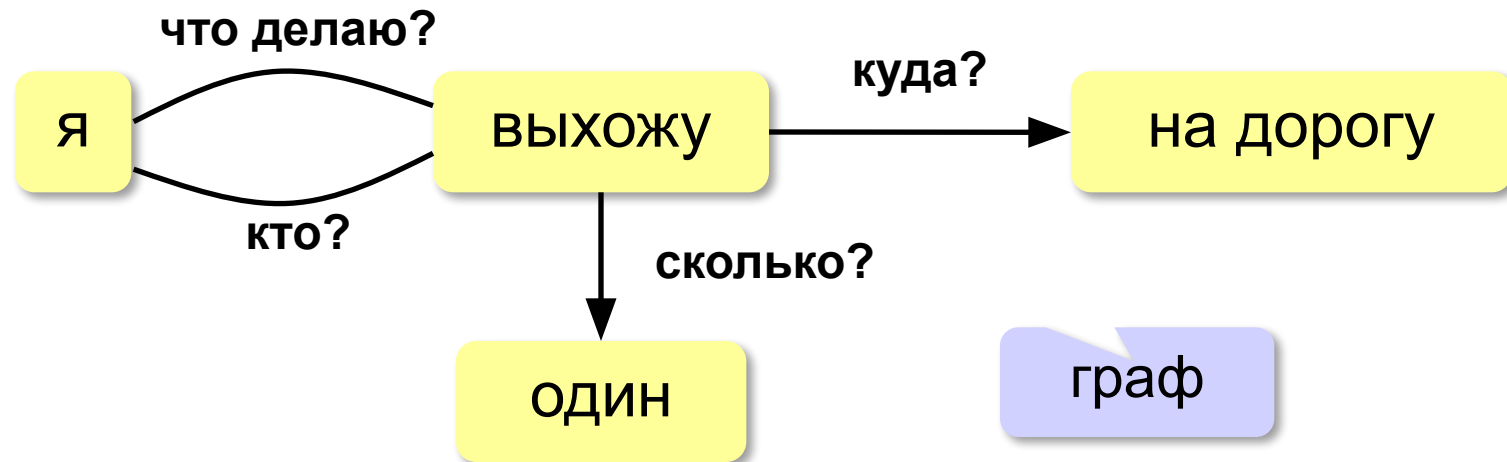


ориентированный граф
(*орграф*) – ребра имеют
направление

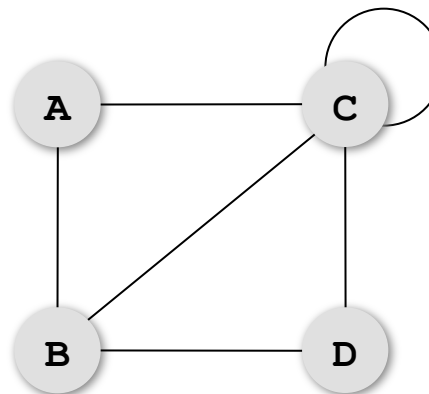
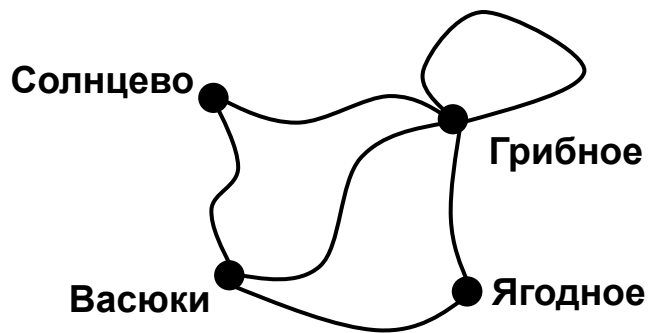
Системный подход

Семантическая (смысловая) модель предложения:

«Выхожу один я на дорогу...»

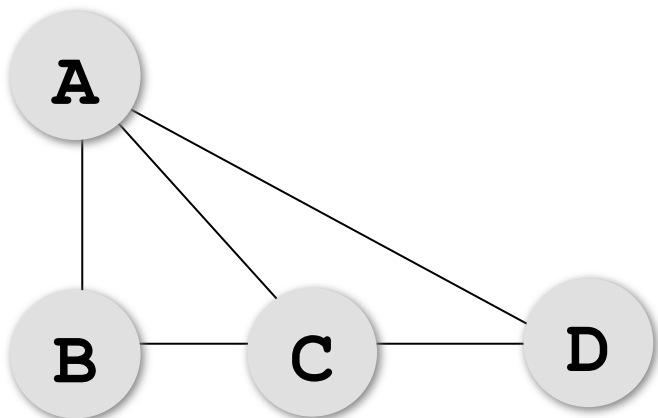


Матрица смежности

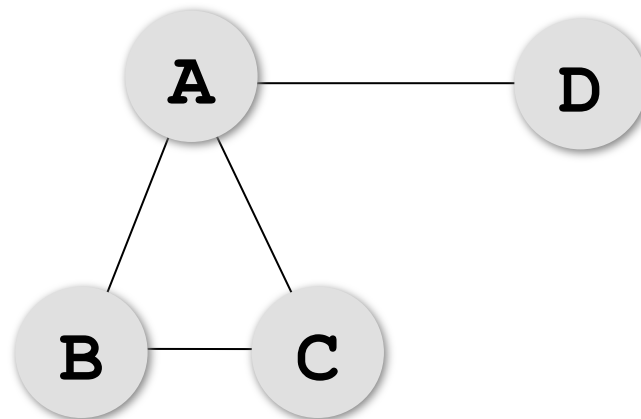


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

петля



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				



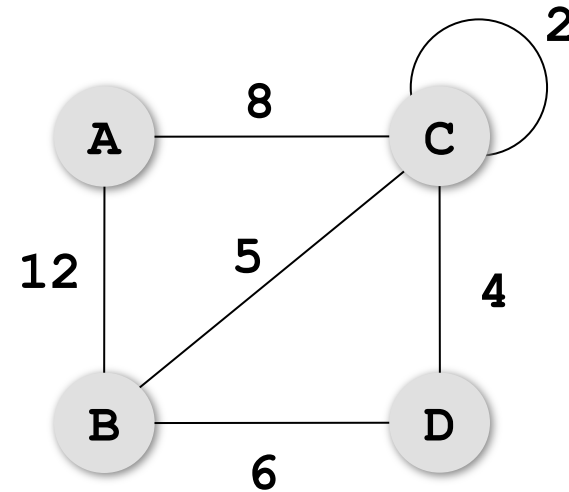
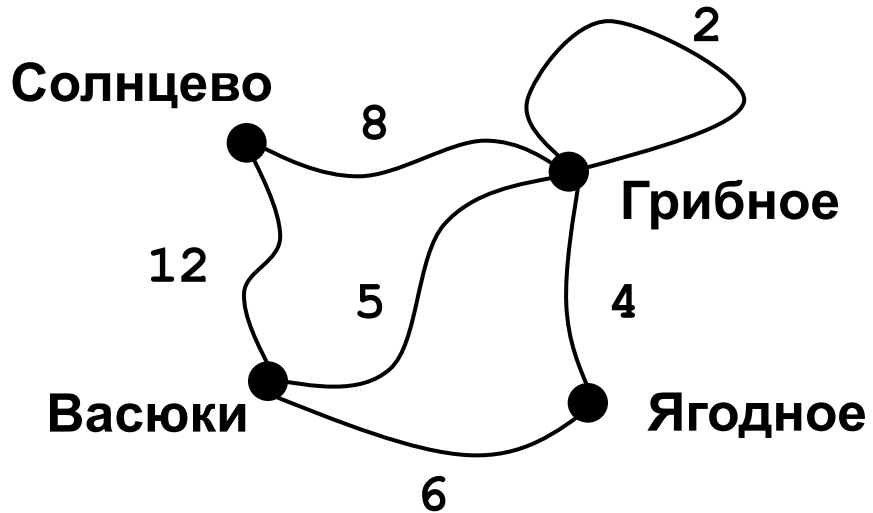
	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Матрица смежности

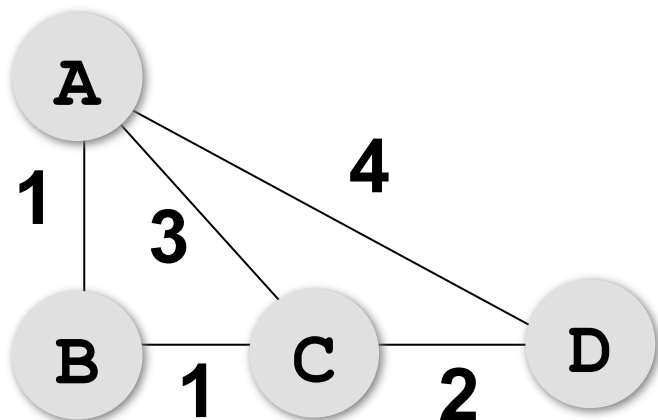
	A	B	C	D
A		0	1	1
B	0		1	0
C	1	1		0
D	1	0	0	

	A	B	C	D
A		1	0	1
B	1		1	0
C	0	1		1
D	1	0	1	

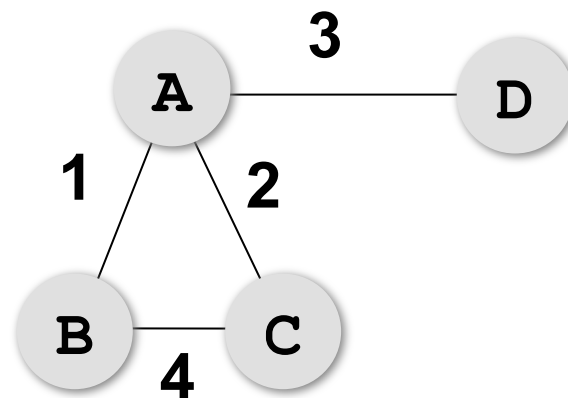
Весовая матрица



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Весовая матрица

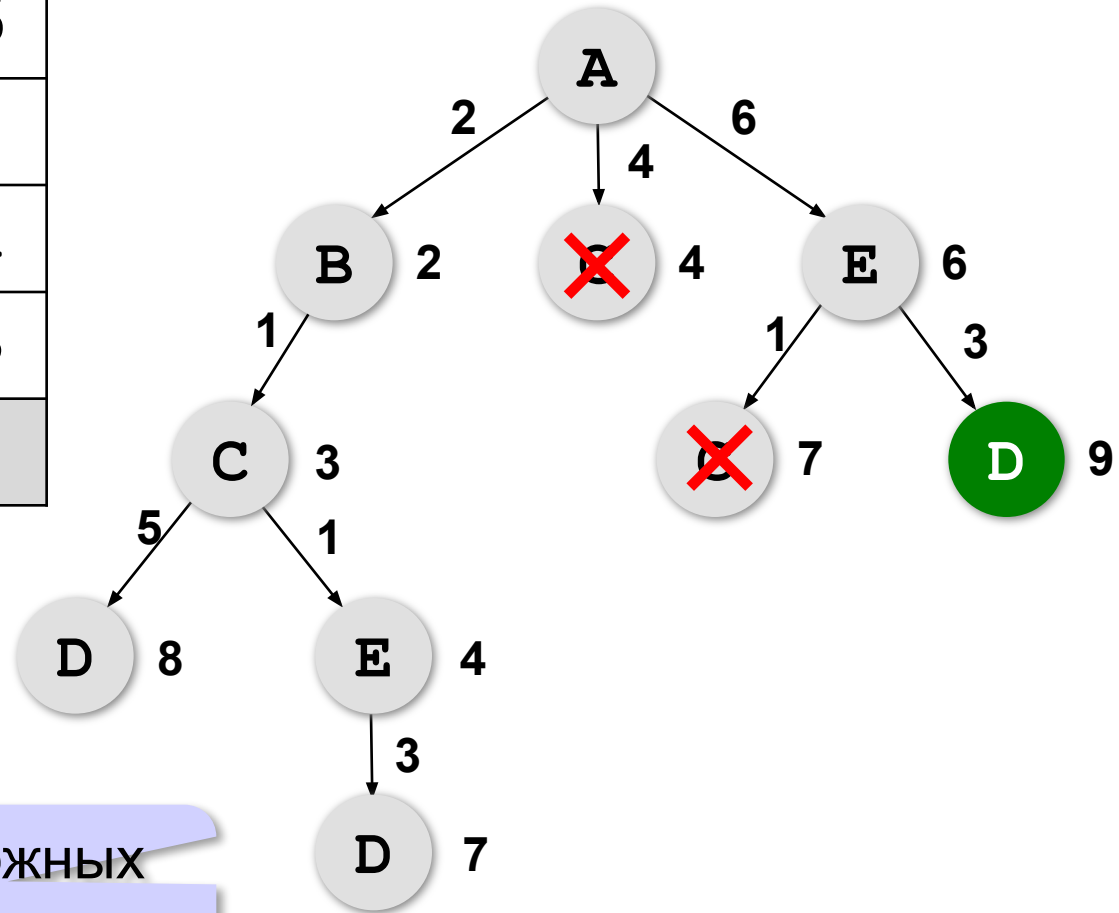
	A	B	C	D
A		4	3	
B	4			2
C	3			6
D		2	6	

	A	B	C	D
A			2	3
B				4
C	2			5
D	3	4	5	

Кратчайшие пути

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и D.



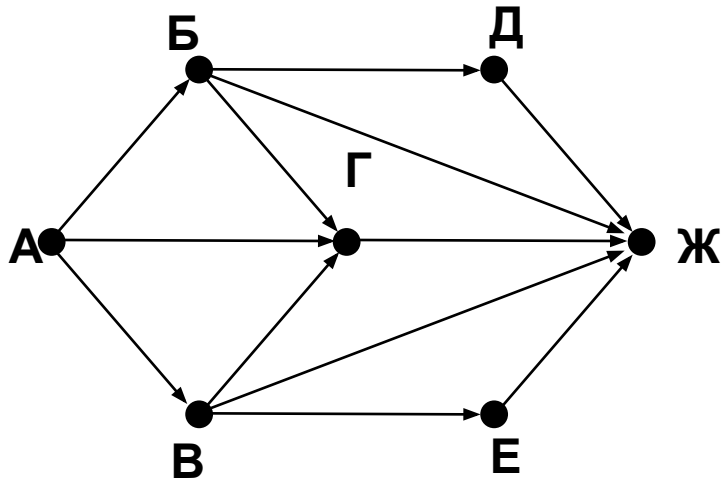
Кратчайшие пути

Определите кратчайший путь между пунктами А и Е.

	A	B	C	D	E
A		2	4		
B	2		1		7
C	4	1		3	5
D			3		3
E		7	5	3	

Количество путей

Сколько существует различных путей из А в Ж?



1. Откуда можно приехать в Ж?

$Ж \leftarrow БВГДЕ$ $Е \leftarrow В$ $Д \leftarrow Б$

$Г \leftarrow АБВ$ $В \leftarrow А$ $Б \leftarrow А$

2. Можно приехать только из А:

$Б \leftarrow А$ $В \leftarrow А$

3. Можно приехать только из уже отобранных вершин (А, Б и В):

$Б \leftarrow А$ $В \leftarrow А$ $Е \leftarrow В$ $Д \leftarrow Б$ $Г \leftarrow АБВ$

4. Можно приехать только из уже отобранных вершин:

$Б \leftarrow А$ $В \leftarrow А$ $Е \leftarrow В$ $Д \leftarrow Б$ $Г \leftarrow АБВ$ $Ж \leftarrow БВГДЕ$

Количество путей

После сортировки:

Б←А В←А Е←В Д←Б Г←АБВ Ж←БВГДЕ



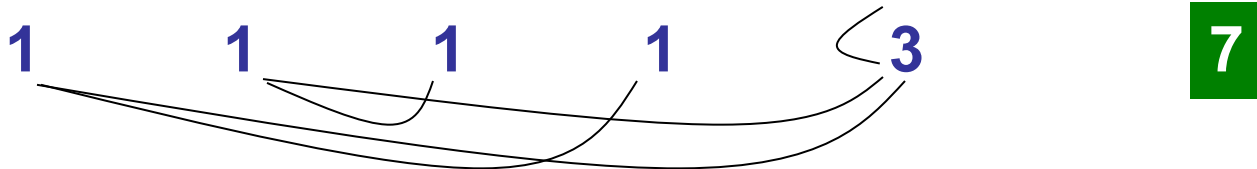
Количество путей в вершину X равно суммарному количеству путей в каждую из вершин, из которых есть ребро в X.

Ж←БВГДЕ

$$N_{\text{Ж}} \leftarrow N_{\text{Б}} + N_{\text{В}} + N_{\text{Г}} + N_{\text{Д}} + N_{\text{Е}}$$

Заполнение таблицы:

Б←А В←А Е←В Д←Б Г←АБВ Ж←БВГДЕ



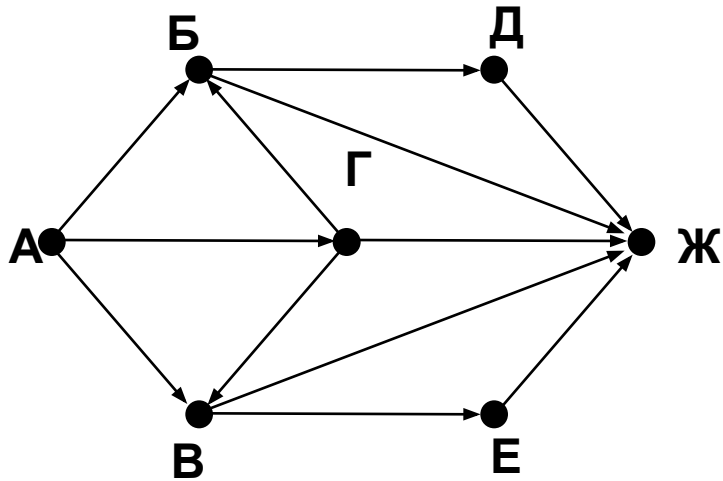
Количество путей

Форма записи:

Ж←БВГДЕ **7**
Е←В 1
Д←Б 1
Г←АБВ 3
В←А 1
Б←А 1

Количество путей

Сколько существует различных путей из А в Ж?



Модели и моделирование

Тема 2. Этапы моделирования

I. Постановка задачи

- **исследование оригинала**

изучение сущности объекта или явления

- **анализ («что будет, если ...»)**

научиться прогнозировать последствий при различных воздействиях на оригинал

- **синтез («как сделать, чтобы ...»)**

научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия

- **оптимизация («как сделать лучше»)**

выбор наилучшего решения в заданных условиях



Ошибки при постановке задачи приводят к наиболее тяжелым последствиям!

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Винни Пух и Пятачок построили ловушку для слонопотама. Удастся ли его поймать?
- Малыш и Карлсон решили по-братски разделить два орешка – большой и маленький. Как это сделать?
- Найти максимальное значение функции $y = x^2$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки $(0,1)$ и $(1,0)$ (неединственное решение).

II. Разработка модели

- **выбрать тип модели**
- **определить *существенные* свойства оригинала**, которые нужно включить в модель, отбросить несущественные (для данной задачи)
- **построить формальную модель**
это модель, записанная на *формальном языке* (математика, логика, ...) и отражающая только существенные свойства оригинала
- **разработать алгоритм работы модели**
алгоритм – это четко определенный порядок действий, которые нужно выполнить для решения задачи

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

Примеры:

- устройство для сложения многозначных чисел – проверка на однозначных числах
- модель движения корабля – если руль стоит ровно, курс не должен меняться; если руль повернуть влево, корабль должен идти вправо
- модель накопления денег в банке – при ставке 0% сумма не должна изменяться



Модель прошла тестирование. Гарантирует ли это ее правильность?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели в интересующих нас условиях.

Примеры:

- устройство для сложения чисел – работа с многозначными числами
- модель движения корабля – исследование в условиях морского волнения
- модель накопления денег в банке – расчеты при ненулевой ставке

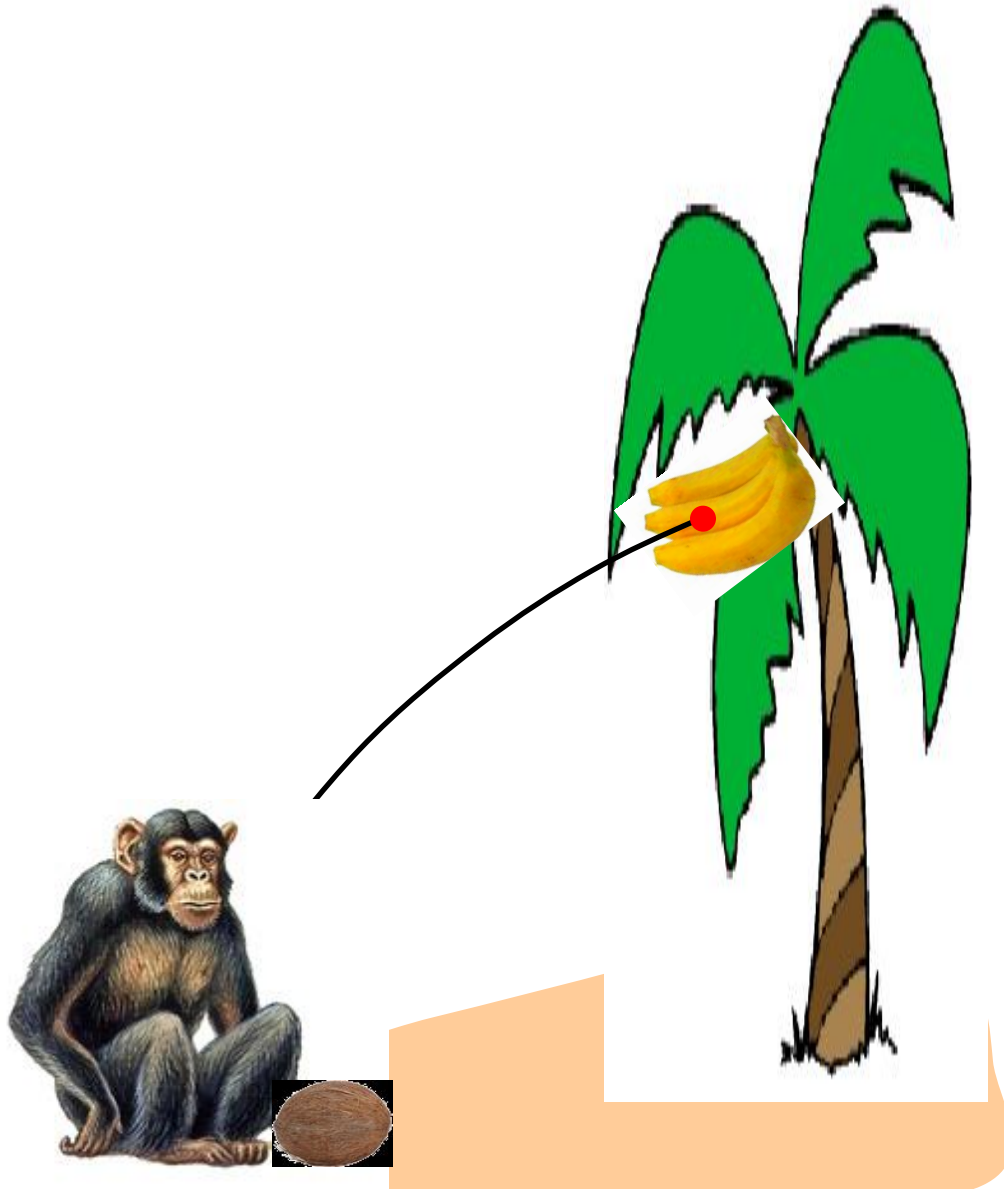


Можно ли 100%-но верить результатам?

V. Проверка практикой, анализ результатов

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (например, учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи



Задача. Обезьяна хочет сбить бананы на пальме. Как ей надо кинуть кокос, чтобы попасть им в бананы.

Анализ задачи:

- все ли исходные данные известны?
- есть ли решение?
- единственно ли решение?

I. Постановка задачи

Допущения:

- кокос и банан считаем материальными точками
- расстояние до пальмы известно
- рост обезьяны известен
- высота, на которой висит банан, известна
- обезьяна бросает кокос с известной начальной скоростью
- сопротивление воздуха не учитываем

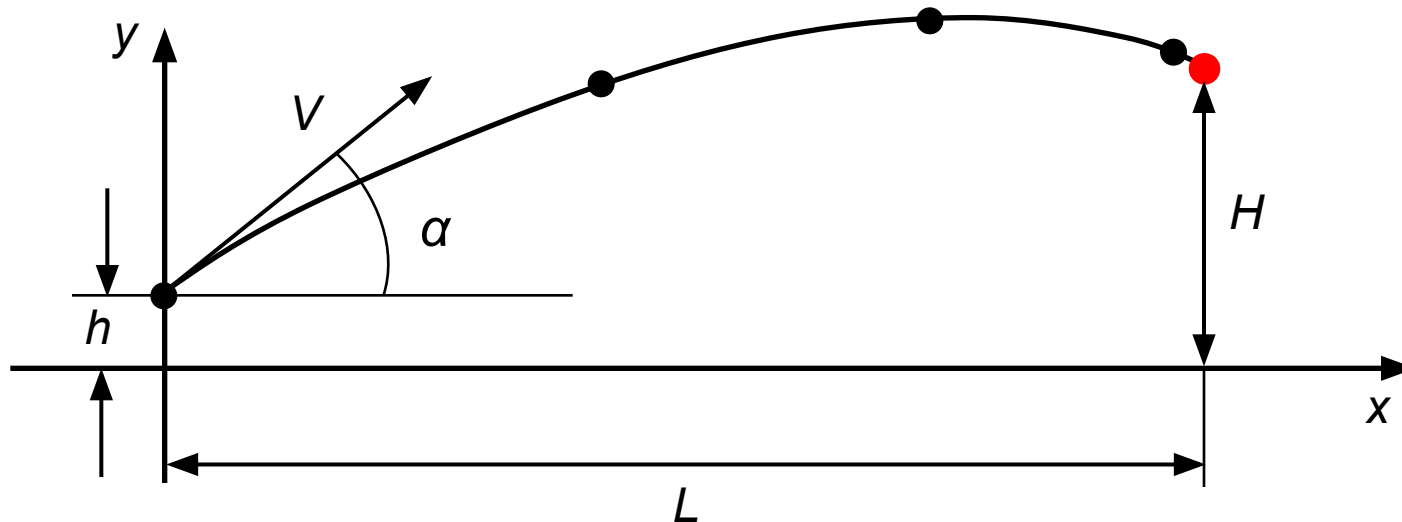
При этих условиях требуется найти начальный угол, под которым надо бросить кокос.



Всегда ли есть решение?

II. Разработка модели

Графическая модель



Формальная (математическая) модель

$$x = V \cos \alpha \cdot t, \quad y = h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти t , α , при которых

$$V \cos \alpha \cdot t = L, \quad h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = H$$

III. Тестирование модели

Математическая модель

$$x = V \cos \alpha \cdot t$$

$$y = h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

- при нулевой скорости кокос падает вертикально вниз
- при $t=0$ координаты равны $(0, h)$
- при броске вертикально вверх ($\alpha=90^\circ$) координата x не меняется
- при некотором t координата y начинает уменьшаться (ветви параболы вниз)



Противоречий не обнаружено!

IV. Эксперимент

Метод I.

Меняем угол α . Для выбранного угла α строим траекторию полета ореха. Если она проходит выше банана, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$V \cos \alpha \cdot t = L \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{V \cos \alpha}$$

Меняем угол α . Для выбранного угла α считаем t , а затем – значение y при этом t . Если оно больше H , уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.



не надо строить всю траекторию для каждого α

V. Анализ результатов

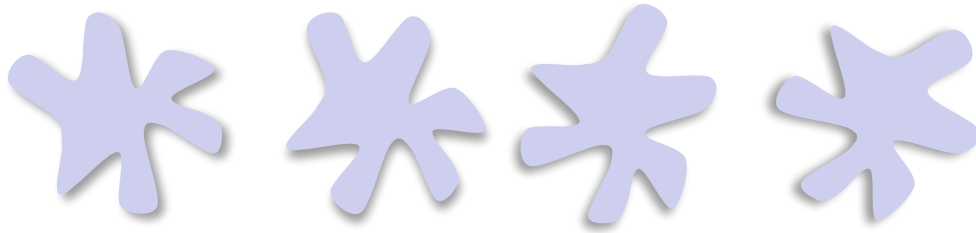
1. Всегда ли обезьяна может сбить банан?
2. Что изменится, если обезьяна может бросать кокос с разной силой (с разной начальной скоростью)?
3. Что изменится, если кокос и бананы не считать материальными точками?
4. Что изменится, если требуется учесть сопротивление воздуха?
5. Что изменится, если дерево качается?

Модели и моделирование

Тема 3. Модели биологических систем

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ,
10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Модель деления

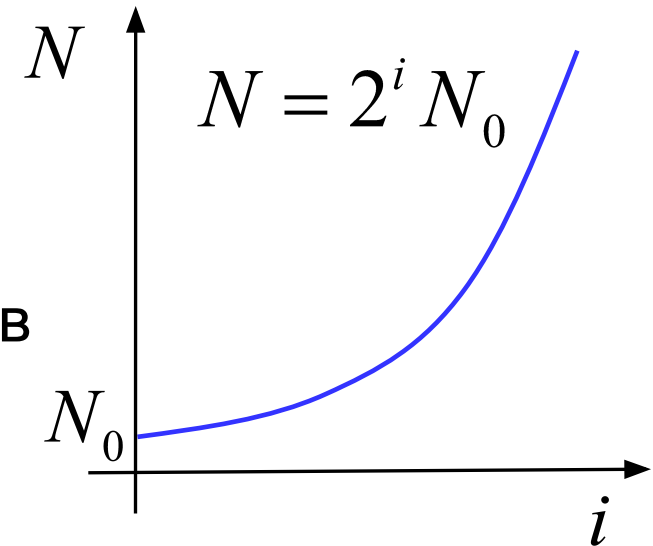


N_0 – начальная численность

$N_1 = 2N_0$ – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – после 2-х циклов

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



Особенности модели:

- 1) не учитывается смертность
- 2) не учитывается влияние внешней среды
- 3) не учитывается влияние других видов

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус) 48

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

K_p – коэффициент рождаемости

K_c – коэффициент смертности

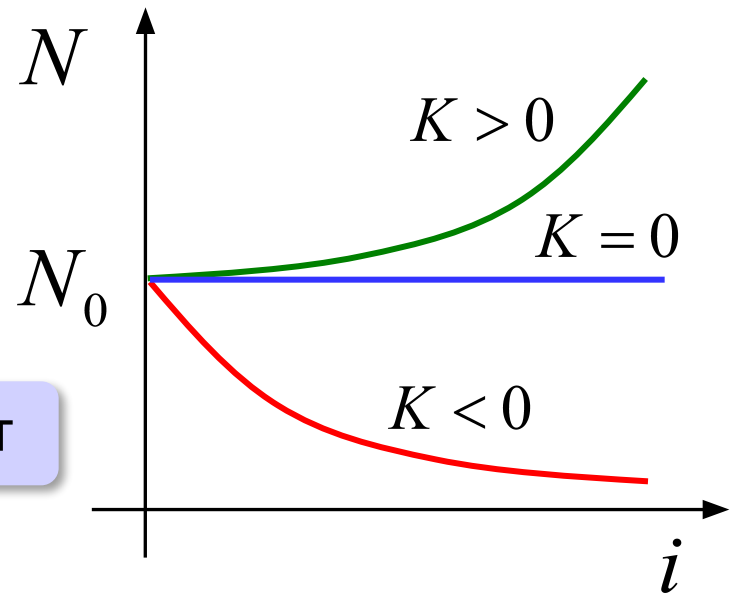
**Коэффициент
прироста**

$$K = K_p - K_c$$

$$N_i = (1 + K) \cdot N_{i-1}$$

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

прирост



Особенности модели:

- 1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
- 2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст) ⁴⁹

L – предельная численность животных

Идеи:

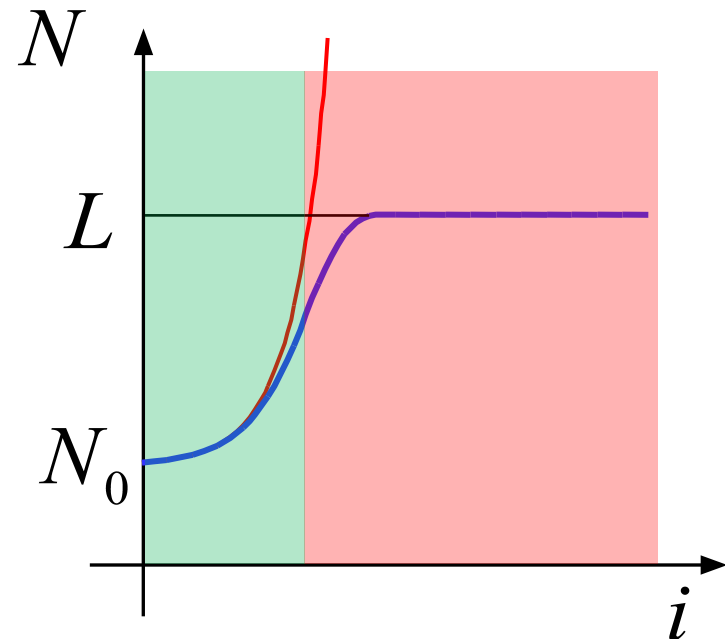
$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

- 1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
- 2) при $N=0$ должно быть $K_L=K$ (начальное значение)
- 3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$



**Модель адекватна,
если ошибка < 10%!**



Модель с отловом

Примеры: рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей и т.п.

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - R$$

ОТЛОВ



Какая будет численность?

$$N_i = N_{i-1}, \text{ прирост} = \text{отлову}$$

$$N = N + K \frac{L - N}{L} N - R \Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$



Сколько можно отловить?

Модель эпидемии гриппа

L – всего жителей N_i – больных в i -ый день
 Z_i – заболевших в i -ый день V_i – выздоровевших
 W_i – всего выздоровевших за i дней

Основное уравнение:

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

Ограниченный рост:

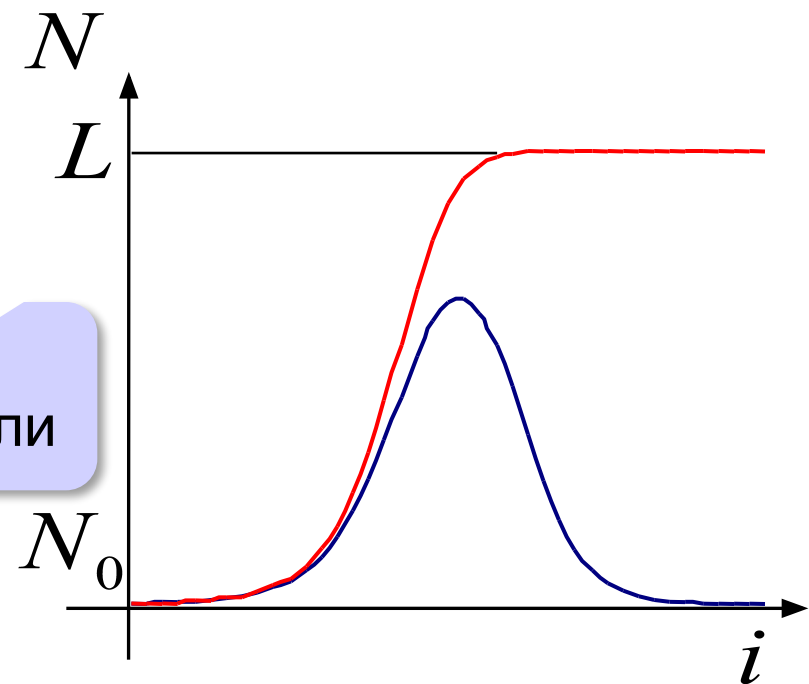
$$Z_i = K \frac{L - N_{i-1} - W_{i-1}}{L} \cdot N_{i-1}$$

Выздоровление (через 7 дней):

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$

болели и
выздоровели



Модель системы «хищник-жертва»

Модель – не-система:



караси



щуки

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D) \cdot Z_{i-1}$$

Модель – система:

- 1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
- 2) «эффект» пропорционален числу встреч

вымирают
без еды

численность
уменьшается

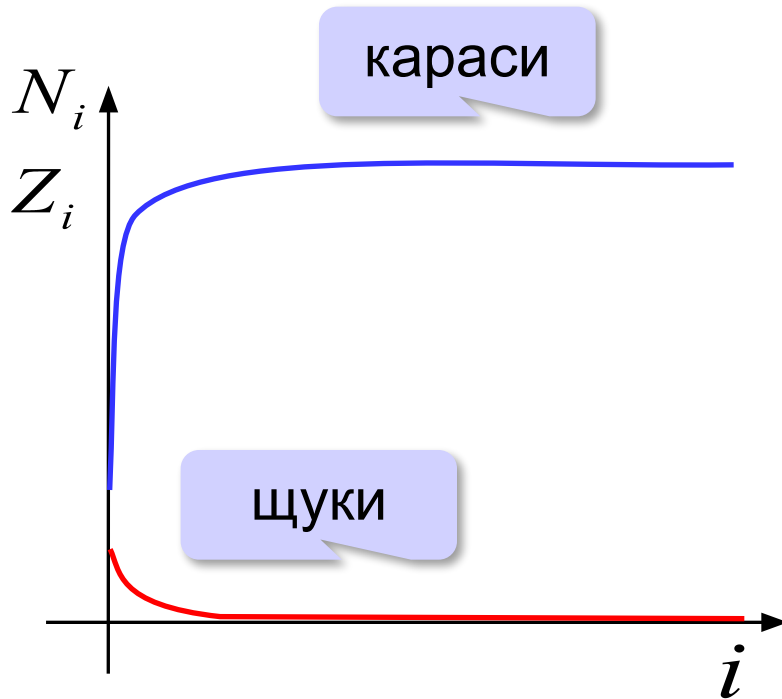
$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D) \cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность
увеличивается

Модель системы «хищник-жертва»

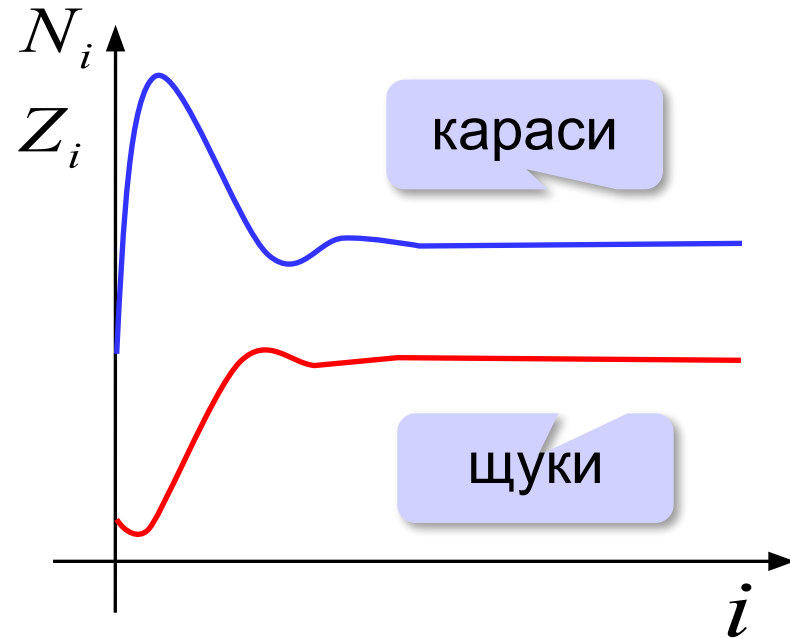
Хищники вымирают:



$$d = 0,8$$

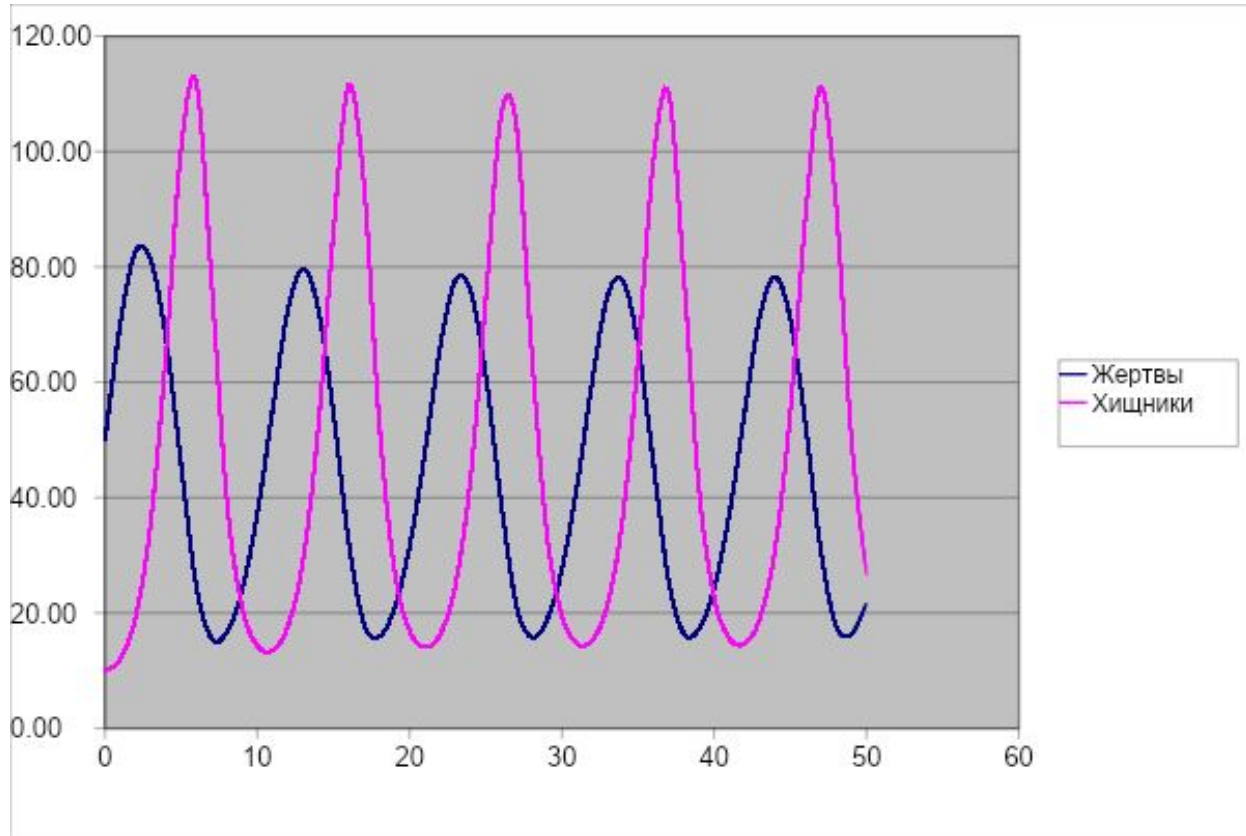
$$b_1 = b_2 = 0,005$$

Равновесие:



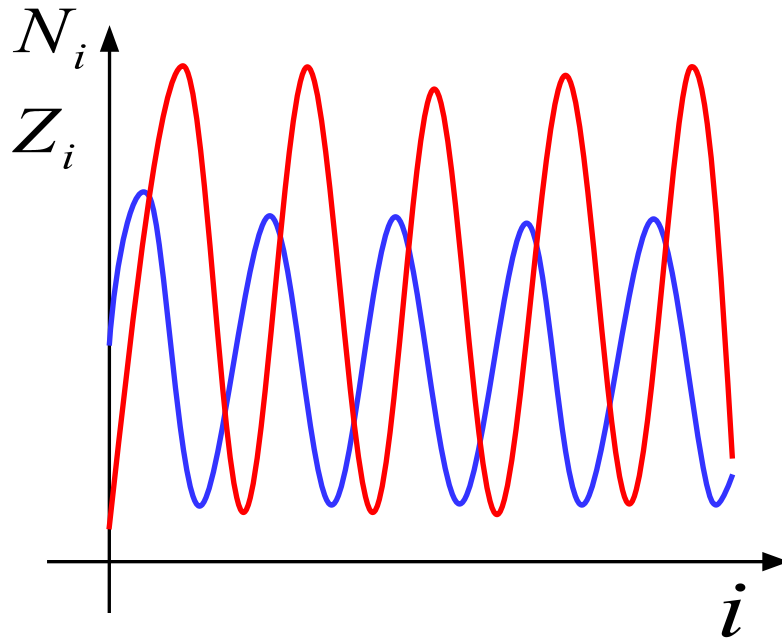
$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,01; \quad b_2 = 0,012$$



Модель системы «хищник-жертва»

Колебания:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,01; \quad b_2 = 0,015$$

Модели и моделирование

Тема 4. Моделирование случайных процессов

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ,
10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Случайные процессы

Случайно...

- 1) встретить друга на улице
- 2) разбить тарелку
- 3) найти 10 рублей
- 4) выиграть в лотерею

Случайный выбор:

- 1) жеребьевка на соревнованиях
- 2) выигравшие номера в лотерее

Как получить случайность?



Случайные числа на компьютере

Электронный генератор



- нужно специальное устройство
- нельзя воспроизвести результаты

Псевдослучайные числа – обладают свойствами случайных чисел, но каждое следующее число вычисляется по заданной формуле.

Метод середины квадрата (Дж. фон Нейман)

564321

318458191041

209938992481

в квадрате малый период
(последовательность
повторяется через 10^6 чисел)

Случайные числа на компьютере

Линейный конгруэнтный метод

остаток от деления

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + c) \bmod m$$

а, с, m - целые числа

$$x_n = (16807 \cdot x_{n-1} + 12345) \bmod 1073741823$$

простое число

$$2^{30} - 1$$



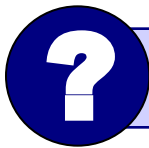
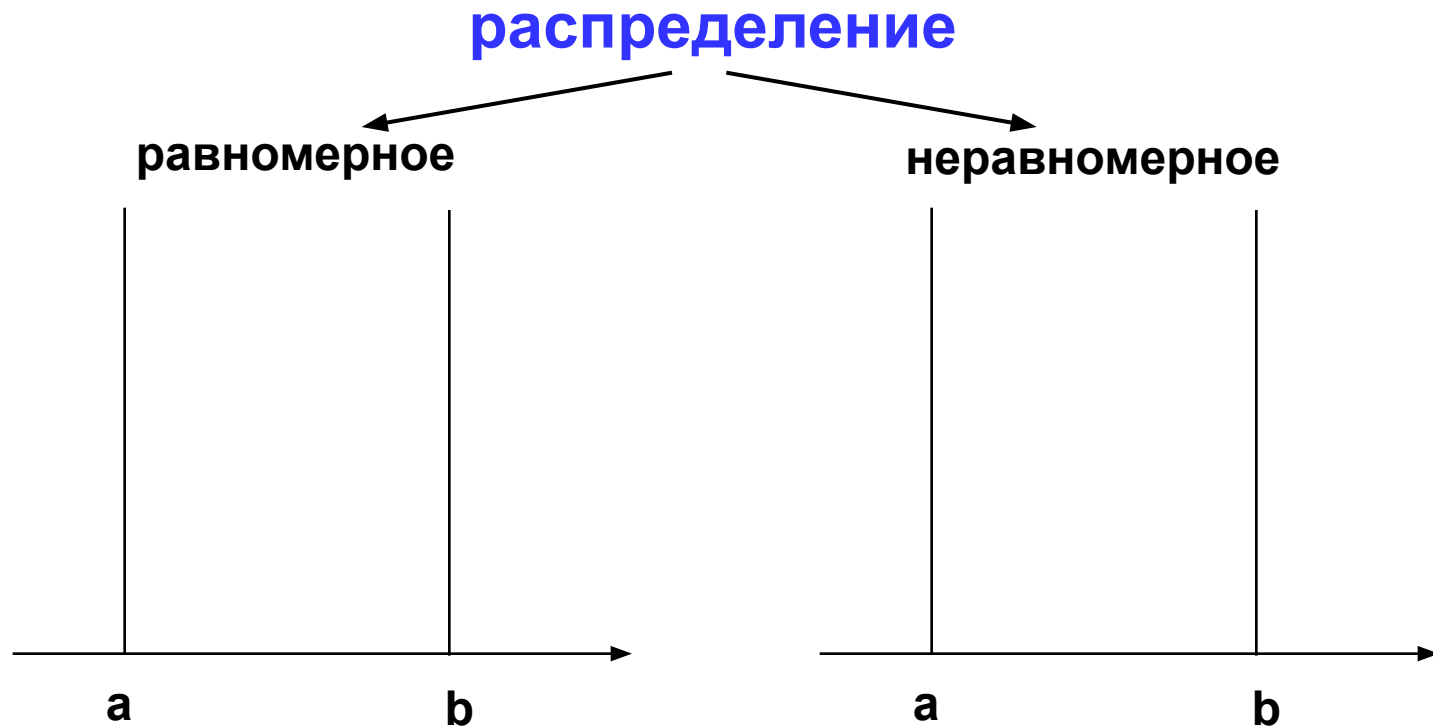
Какой период?

период m

«Вихрь Мерсенна»: период $2^{19937} - 1$

Распределение случайных чисел

Модель: снежинки падают на отрезок $[a,b]$

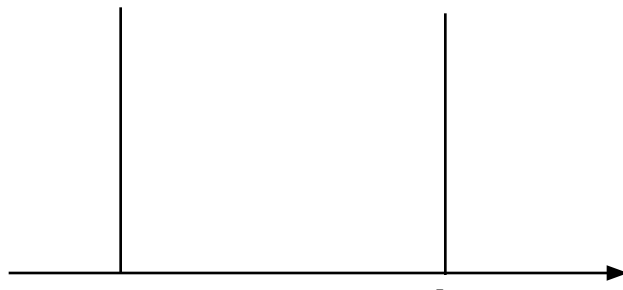


Сколько может быть разных распределений?


Распределение случайных чисел

Особенности:

- распределение – это характеристика **всей последовательности**, а не одного числа
- **равномерное** распределение одно, компьютерные датчики (псевдо)случайных чисел дают равномерное распределение
- неравномерных – много
- любое неравномерное можно получить с помощью равномерного



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



$$x = \frac{x_1 + x_2 + \square + x_{12}}{12}$$

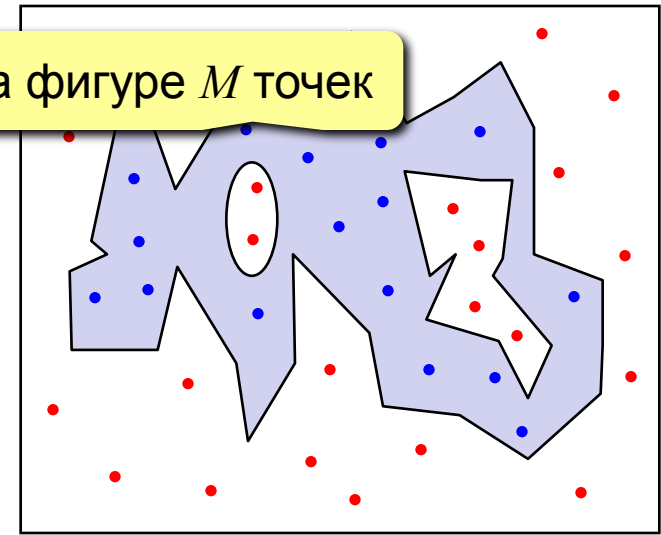
x_1, x_2, \square равномерное распределение

Вычисление площади (метод Монте-Карло)

1. Вписываем сложную фигуру в другую фигуру, для которой легко вычислить площадь (прямоугольник, круг, ...).
2. **Равномерно** N точек со случайными координатами внутри прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек, **попавших на фигуру**: M .
4. Вычисляем **площадь**:

$$\frac{S}{S_0} \approx \frac{M}{N} \Rightarrow S \approx S_0 \cdot \frac{M}{N}$$

На фигуре M точек

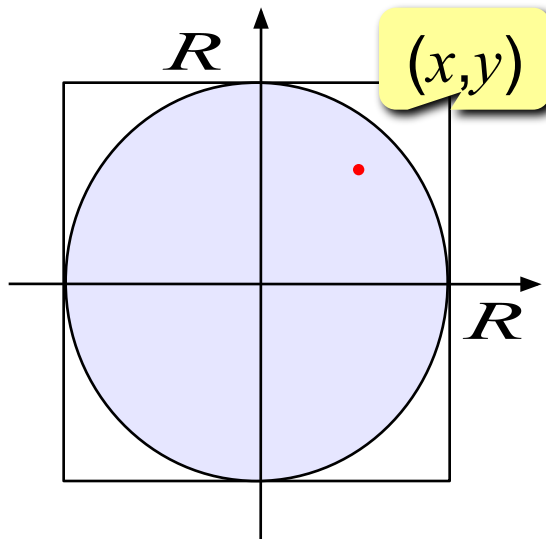


Всего N точек



1. Метод приближенный.
2. Распределение должно быть равномерным.
3. Чем больше точек, тем точнее.
4. Точность ограничена датчиком случайных чисел.

Вычисление площади



Случайные координаты:

```
x := R*random;
```

```
y := R*random;
```

Когда точка внутри круга?

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

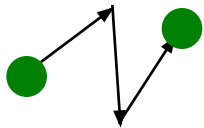
Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайные координаты }
  if x*x + y*y <= R*R then M := M+1;
end;
S := 4*R*R*M / N;
```



Как найти число π ?

Броуновское движение



Случайное направление (в рад):

```
alpha := 2*pi*random;
```

Случайный шаг:

```
h := hMax*random;
```

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайное направление и шаг }
  x := x + h*cos(alpha);
  y := y + h*sin(alpha);
end;
```


Системы массового обслуживания

Примеры:

- 1) звонки на телефонной станции
- 2) вызовы «скорой помощи»
- 3) обслуживание клиентов в банке

сколько линий?

сколько бригад?

сколько операторов?

Особенности:

- 1) клиенты (запросы на обслуживание) поступают постоянно, но через случайные интервалы времени
- 2) время обслуживания каждого клиента – случайная величина



Нужно знать характеристики (распределения) «случайностей»!

Клиенты в банке



Вход клиентов:

- 1) за 1 минуту – до N человек
- 2) равномерное распределение



Обслуживание:

- 1) от T_{min} до T_{max} минут
- 2) равномерное распределение



Сколько нужно касс, чтобы клиенты стояли в очереди не более Q минут?

Клиенты в банке

Число клиентов в помещении банка:

было

пришли

ушли

$N := N + in - out;$



Допущение: клиенты распределены по кассам равномерно!

Количество касс: K

Средняя длина очереди: $\frac{N}{K}$

Допустимая длина очереди: $\frac{N}{K} \leq Q$

Клиенты в банке

Пришли за очередную минуту:

округление

```
in := round(N*random);
```

Случайное время обслуживания:

```
T := Tmin + (Tmax - Tmin)*random;
```



Каждый оператор за эту минуту обслужит $\frac{1}{T}$ клиентов!

Обслужены за очередную минуту и выходят:

```
out := K / T;
```

Клиенты в банке (программа)

период моделирования L минут

```
count := 0; { счетчик «плохих» минут }
for i:=1 to L do begin
  in := { случайное число входящих }
  out := { случайное число обслуженных }
  N := N + in - out;
  if N > Q*K then
    count := count + 1;
end;
writeln(count/L:0:2);
```



Что выводится?

