

Моделирование физических процессов



Задача.

Построить математическую модель физического процесса — движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Выяснить зависимость расстояния и времени полета тела от угла броска и начальной скорости.

Угол броска и начальная скорость являются главными факторами процесса моделирования.

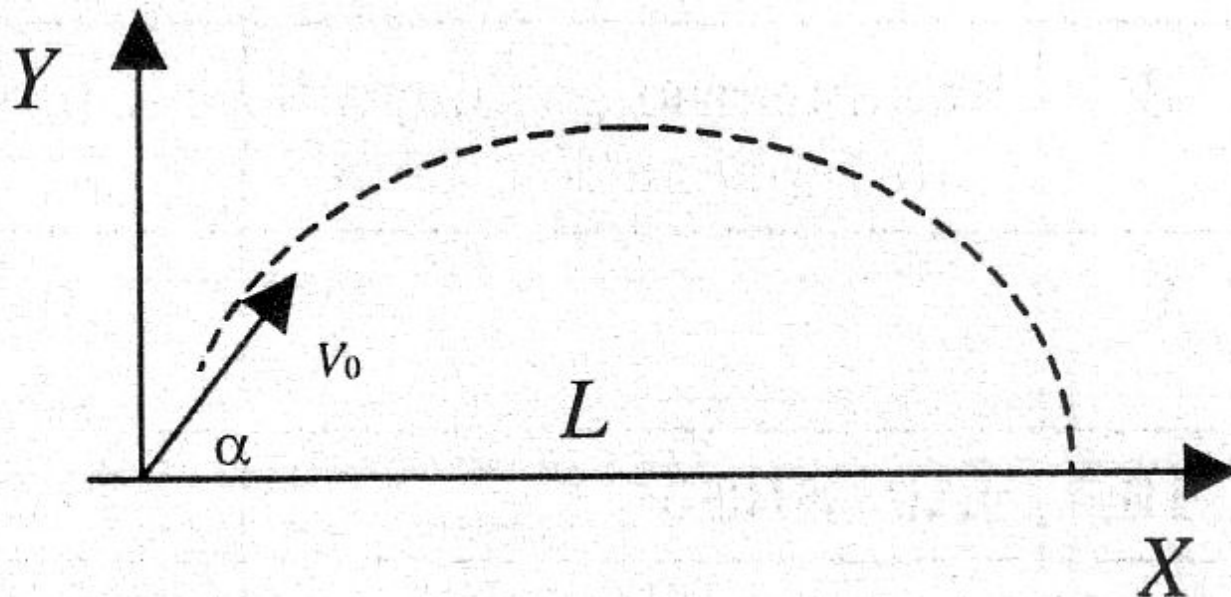


Решение.

Постановка задачи.

При расчетах будем использовать следующие допущения:

- 1. начало системы координат расположено в точке бросания;**
 - 2. тело движется вблизи поверхности Земли, т. е. ускорение свободного падения постоянно и равно $9,81 \text{ м/с}^2$;**
 - 3. сопротивление воздуха не учитывается, поэтому движение по горизонтали равномерное.**
-

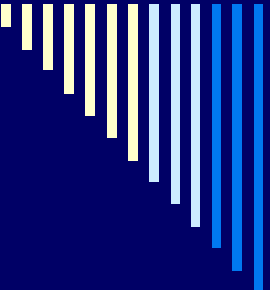


Пусть

V_0 — начальная скорость (м/с),

α — угол бросания (радиан),

L — дальность полета (м).

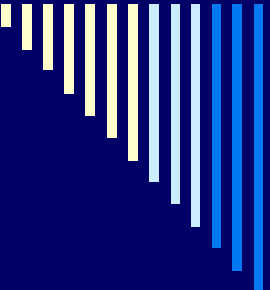


Движение тела, брошенного под углом к горизонту, описывается следующими формулами:

$V_x = V_0 \cos \alpha$ — горизонтальная составляющая начальной скорости,

$V_y = V_0 \sin \alpha$ — вертикальная составляющая начальной скорости,

$x = V_x t$ — так как движение по горизонтали равномерное,



$y = V_y t - \frac{gt^2}{2}$ – так как движение по вертикали равноускоренное с отрицательным ускорением.

Искомым в этой задаче будет то значение $x = L$, при котором $y = 0$.



Математическая модель.

Дано:

V_0 — начальная скорость (м/с),
 α — угол бросания (радиан).

Найти:

L — дальность полета (м).



Связь:

(1) $L = V_x t - \frac{gt^2}{2}$ — дальность полета,

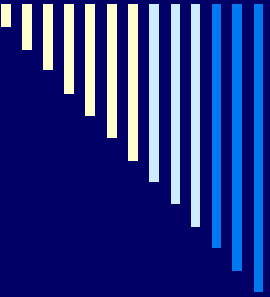
(2) $0 = V_y t -$ — точка падения,

(3) $V_x = V_0 \cos \alpha$ — горизонтальная проекция вектора начальной скорости,

(4) $V_y = V_0 \sin \alpha$ — вертикальная проекция вектора начальной скорости,
 $g = 9,81$ — ускорение свободного падения,

$V_0 > 0$

$0 < \alpha < \frac{\bar{n}}{2}$.



Подставляем в формулу (2)
значение V_y из формулы (4).

Получаем уравнение:

$$0 = V_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} \quad (5)$$



Чтобы решить это уравнение,
найдем из формул (1) и (3)
выражение для t :

$$t = \frac{L}{V_x} = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$



Подставив это значение в уравнение (5), получаем решение:

$$\begin{aligned} 0 &= V_0 \sin \alpha \frac{L}{V_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{L}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 = \\ &= \frac{L \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g L^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$



или

$$2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha = gL$$

Отсюда дальность полета равна:

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

т. е. зависит от начальной скорости и угла наклона.



Компьютерный эксперимент.

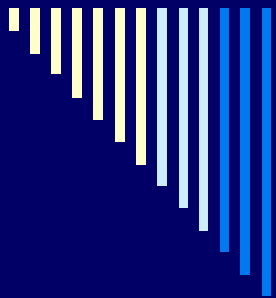
**I. Выяснить, как зависит дальность
полета от угла броска.**

(Используем Excel)

В формульном виде:

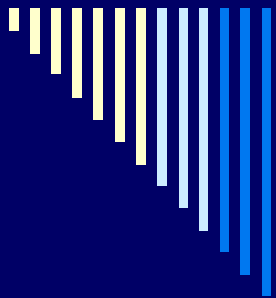
	A	B	C
1	Задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту		
2	Исходные данные		
3	Начальная скорость	60	
4	Угол бросания	15	
5	Шаг увеличения угла	15	
6	Расчеты		
7	Промежуточные расчеты		Результаты
8	Угол бросания	Начальная скорость	Дальность полета
9	15	60	$=(\$B\$9^2 * \text{SIN}(2 * A9 * 3,14 / 180)) / 9,81$
10	$=A9 + \$B\5	Заполнить вниз	Заполнить вниз
11	Заполнить вниз		

	А	В	С
1	Задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту		
2	Исходные данные		
3	Начальная скорость	60	
4	Угол бросания	15	
5	Шаг увеличения угла	15	
6	Расчеты		
7	Промежуточные расчеты		Результаты
8	Угол бросания	Начальная скорость	Дальность полета
9	15	60	183,40187
10	30	60	317,71003
11	45	60	366,97236
12	60	60	318,00213
13	75	60	183,90787



Делаем выводы:

- С увеличением угла бросания от 15° до 45° при постоянной начальной скорости полета дальность полета увеличивается.
- С увеличением угла бросания от 45° до 90° при постоянной начальной скорости полета дальность полета уменьшается.



2. Выяснить, как зависит на Луне дальность полета от угла броска ($g = 1,63 \text{ м/с}^2$)

3. Выяснить, при каком угле броска, тело улетит на наибольшее расстояние.

Начальная скорость – 15 м/с, величина угла лежит в пределах от 30 до 70°.

Какое при этом будет время полета?

Формулы в ячейках остаются такими же, как и в п. 1 и 2, меняются лишь исходные данные.