Бабалова И.Ф..

Лекция 5

Моделирование потоков заявок и функций распределения времен поступления и обработки заявок

2016 год

Описание потоков требований в СМО

- Теорема о максимальном потоке

Максимальный поток равен минимальной пропускной способности по всем сечениям СМО.

Сечение - это множество каналов передачи требований, удаление которых приводит к разрыву всех возможных путей потоков от начальной до конечной точек пути.

- СМО описывается марковскими процессами, в которых вероятность следующего значения Xn+1 зависит только от текущего состояния Xn и не зависит от предыдущих значений процесса. Формула m/m/1- означает, что поток требований и обработка их описываются марковскими процессами

Описание потоков заявок

- **Поток заявок описывается моментами времени поступления заявок в систему и количеством заявок , поступивших в систему одновременно.**
- **Законы поступления заявок могут быть детерминированными или случайными**

Элементы теории вероятностей

Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Теория вероятностей оперирует понятием СОБЫТИЕ.

Событие – это некоторый факт, который может произойти или не произойти

Вероятность события - это численная мера степени объективной возможности этого события.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m-это число благоприятных опытов
n – общее число опытов

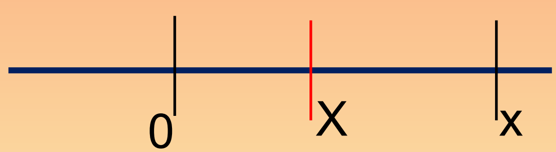
$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

Функция распределения случайной величины X



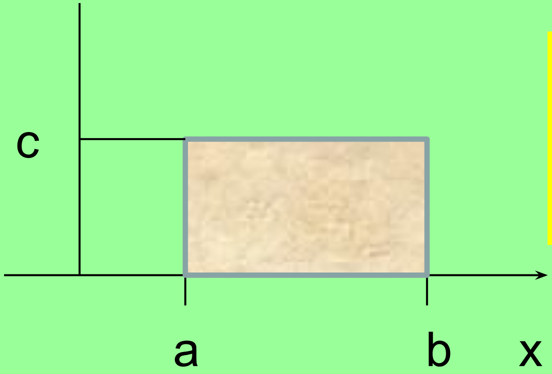
Случайные величины в результате опыта могут принять то или иное значение.

Случайные величины могут быть дискретными или непрерывными

Характеристики законов распределения случайных значений

1.Закон равномерной плотности.

В заданном интервале все значения равновероятны



C=1/(b-a)-это будет величина плотности распределения случайных чисел X на заданном отрезке

Величина M_x называется математическим ожиданием случайной величины X.

$$M_x=(a+b)/2$$

Второй из основных характеристик является величина дисперсии случайной величины.

$D_x = M[\, x_i - M_x]^2$ --математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания

Для потоков событий в СС характерны типы распределений: равномерное, экспоненциальное, Пуассона, нормальное и Парето.

KC&T

Простейший поток и его свойства

Поток – совокупность случайных чисел.

Заявки в СМО формируются случайным образом, время обслуживания случайно.

Для простейшего потока характерны следующие свойства :

Однороднность потока - Появление событий зависит только от одного фактора - от времени.

Однородный поток может быть :

Регулярный $t_{i+1} = t_i = const$

Не регулярный $t_{i+1} - t_i \neq const$

Пуассоновский поток – считается простейшим потоком.

Свойства Пуассоновского потока :

Стационарность потока – характеризуется тем, что вероятность попадания некоторого числа событий на участок длиной t зависит только от длины участка.

Отсутствие последствий – число событий на участке длины t не зависит от того сколько событий произошло вне этого участка.

Ординарность потока – вероятность появления двух событий на отрезке времени ничтожно мала по сравнению с вероятностью появления одного события.

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ функция распределения Пуассоновского потока.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

λ – определяемая в характеристиках - это интенсивность входного потока заявок

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ функция плотности вероятности для t>0

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

где m –это число событий,
а – параметр распределения времен появления событий

Генерация случайных величин по закону Пуассона

$$P_1 = a e^{-a}$$

$a = \lambda \tau$

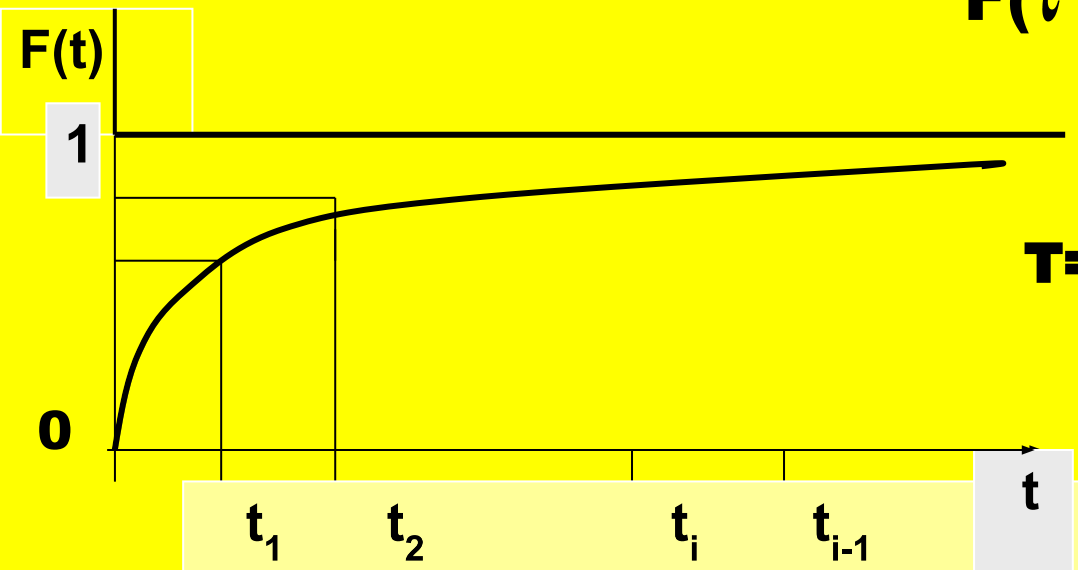
$$P_0 = e^{-\lambda \tau}$$

Вероятность появления одного события

Вероятность не появления событий

Функция распределения времен появления событий F( ) – τ показательный закон

$F(\tau) = 1 - e^{-\tau\lambda} = P(T < \tau)$



T – промежуток между двумя событиями

$T = 1/\lambda$ $M_t = 1/\lambda$ $D_t = 1/\lambda$

Свойства функции распределения:

F(t1) <=F(t2)

F(-∞) =0, F(+ ∞)=1

Генерация случайных чисел в системе моделирования

Существует множество алгоритмов для генерации случайных чисел.
В системе GPSS работает генератор случайных чисел по алгоритму Лемера.
Диапазоны генерируемых значений [0…999] и [0..0,999]
Масштабирование значений выполняет интерпретатор при запуске программы.
Формула для определения случайного числа по алгоритму Лемера:

$$x_{i+1} = (a * x_i) \bmod m, \text{ где } m = 2^{31} - 1$$

Максимальный период случайных чисел без повторений равен m

a – некоторая константа, которая выбирается системой моделирования. Рекомендуемое значение a/m = 0,21132

Все получаемые случайные числа – **это псевдослучайные** числа.
Для установки начального значения случайных чисел вводится команда

RMULT A, B, C,D,E,F,G

RMULT ,,,751 4 генератор получает начальное число 751

Вычисление значений функций распределения через равномерно распределенные случайные числа на заданном интервале времен.

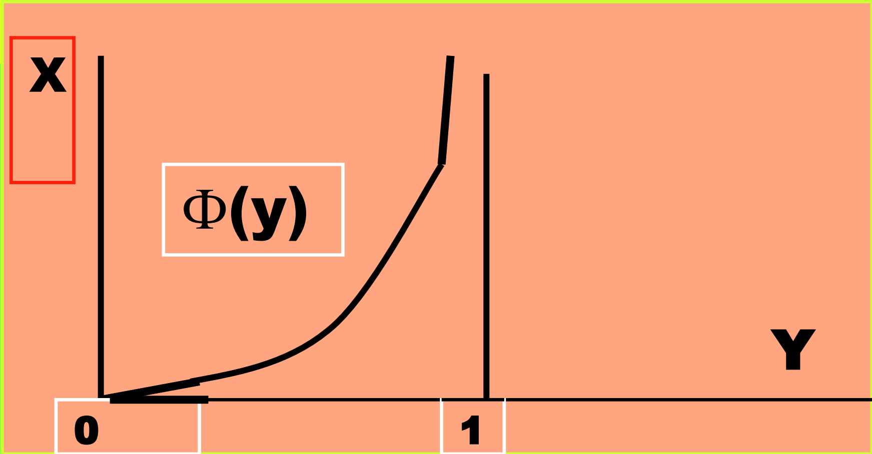
Теорема. Если случайная величина X имеет функцию распределения $F(t)=P(x<t)$, тогда случайная величина $Y=F(x)$ равномерно распределена в интервале (0,1).

Пуассоновский поток событий описывается формулой: $F(t)=1-e^{-\lambda t}$. На основании теоремы можно записать $Y=1- e^{-\lambda x}$. Значения Y будут равномерно распределены в интервале (0,1). Доказательство: $e^{-\lambda x} =1-y$, прологарифмируем выражение. Получаем: $-\lambda x= \ln (1-y)$ или $x=\ln(1-y)^{-1} *1/\lambda$.

$$x = \frac{1}{\lambda} * \ln(\frac{1}{1-y})$$

Получаем правило обратной функции

Значение **0,9998** выпадает в **0,00199%** случаев



Формирование входных воздействий в системе GPSS World

Случайные входные воздействия описываются законами времен появления заявок

Простейшим законом является закон равномерно распределенных случайных времен появления заявок на заданном отрезке.

Система позволяет использовать множество генераторов случайных чисел RN1, RN2,…. RN100…. Система моделирования автоматически настраивается на заданный диапазон входных воздействий. [A, B]

Наиболее известные функции распределения случайных чисел - это нормальное и пуассоновское.

GENERATE 150,50

GENERATE (Exponential(1,0,150))

GENERATE (Poisson(2,150))

GENERATE (Normal(1,150,50)) =10

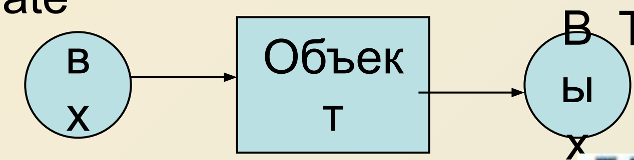
Визуализация процесса моделирования

Равномерный закон времён поступления заявок

M=150 $D = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(180-120)^2}{12} = 300$ $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{300} = 17{,}32$

```
        GENERATE  150,30
………………………………………………
    ADVANCE            TABULATE
tt1
    TERMINATE
    GENERATE     1000000
    TERMINATE     1
 tt1    table     x1,0,10,50
```

Задач отрезок → [120, 180]



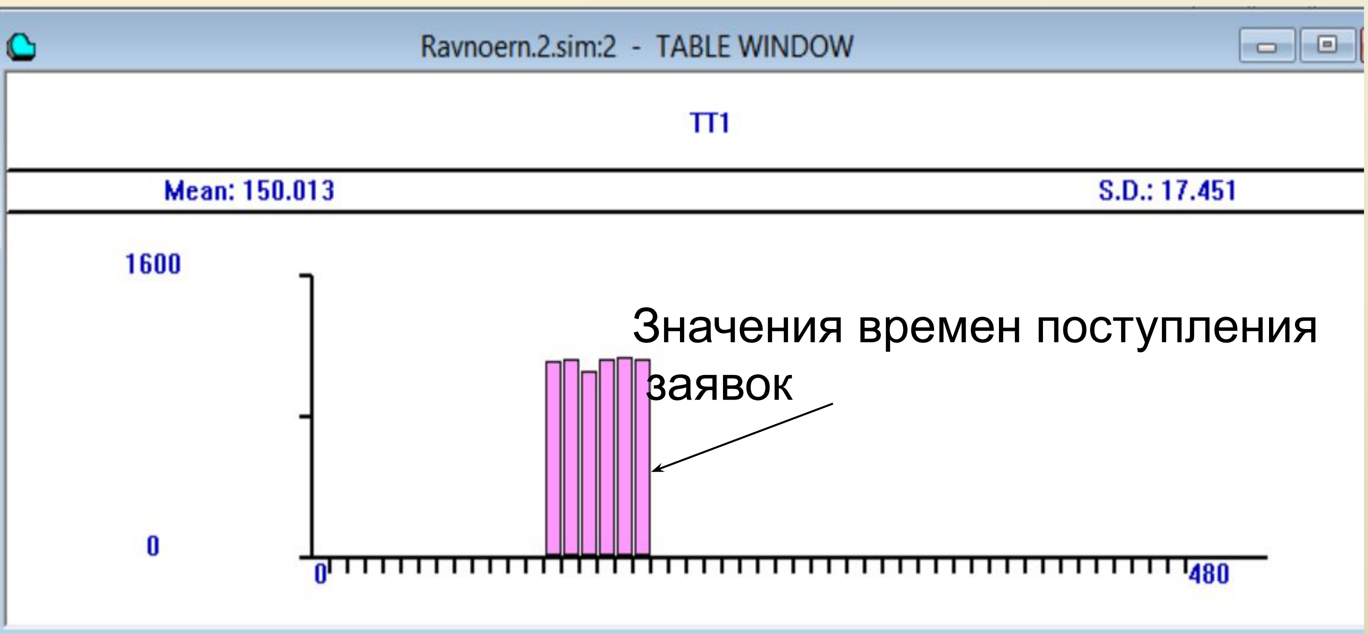
Операнды блока TABLE:

A – стандартный числовой атрибут или переменная. В примере отражается изменение модельного времени для равномерно распределенных случайных времен появления транзактов.

B – начало отсчета

C - интервал

D – количество интервалов



Моделирование экспоненциального распределения времен поступления заявок

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \sigma = \sqrt{D} = \lambda^{-1} \qquad M = S + \lambda^{-1}$$

$$D = \lambda^{-2}$$

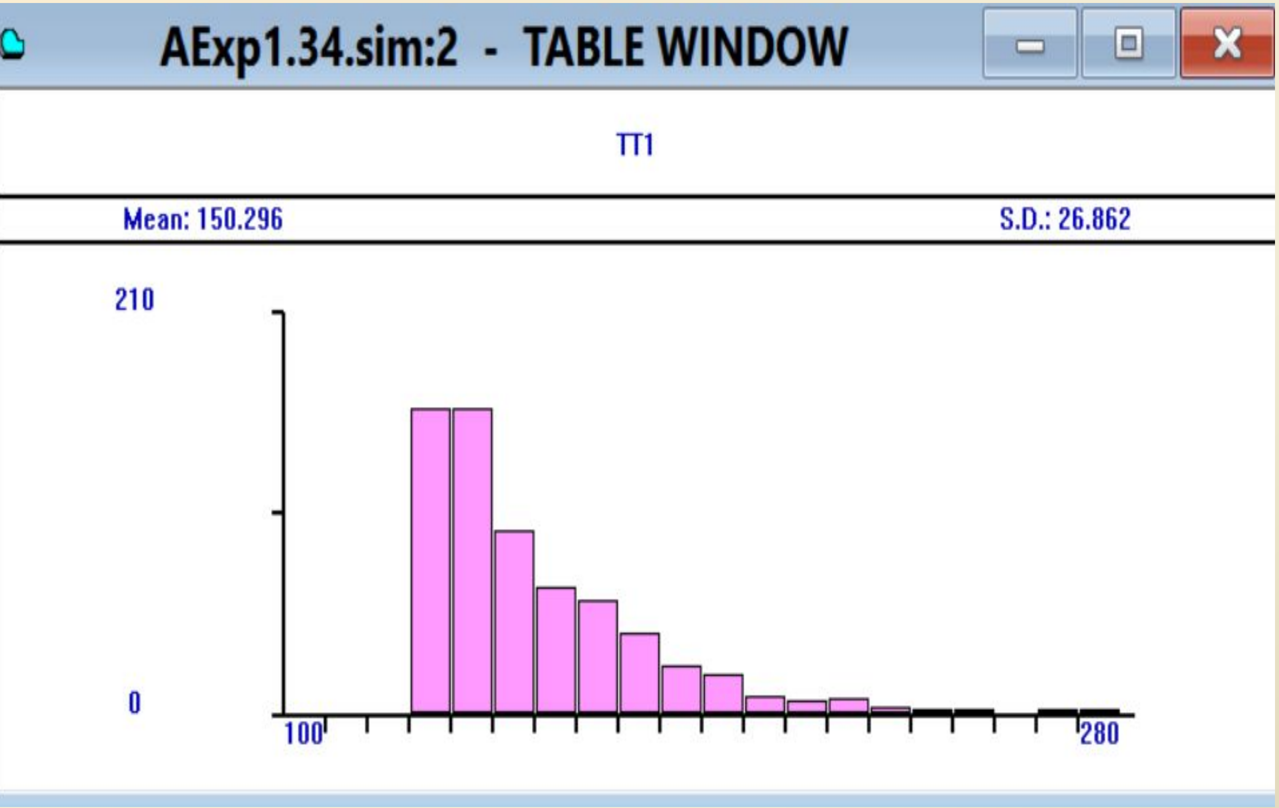
$$S = M - \lambda^{-1}$$

В описании функции распределения времен поступления заявок значения параметров:

1- номер генератора случайных чисел

S – сдвиг распределения

σ =среднее квадратичное отклонение



Все параметры – положительные

```
GENERATE  (Exponential(1,120,30))

    SAVEVALUE1,c1
    SAVEVALUE1-,x2
    SAVEVALUE2,c1
    ADVANCE
    TABULATE   tt1
    TERMINATE
    GENERATE  100000
    TERMINATE 1
 tt1    table     x1,100,10,50
```

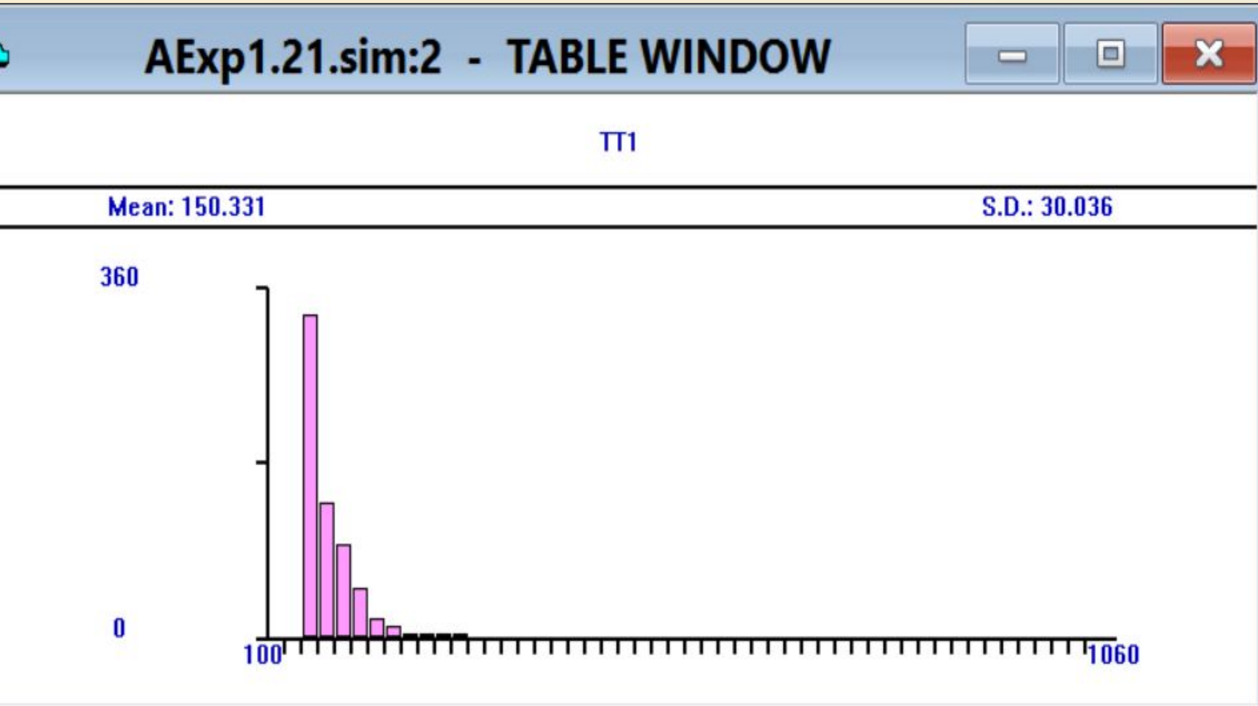
Моделирование экспоненциального распределения времен поступления заявок для отрезка [120,180]

В описании функции распределения времен поступления заявок значения параметров:

1- номер генератора случайных чисел

120 – Сдвиг для ненормированного распределения

30 - **Среднее квадратичное отклонение**



Все параметры – положительные

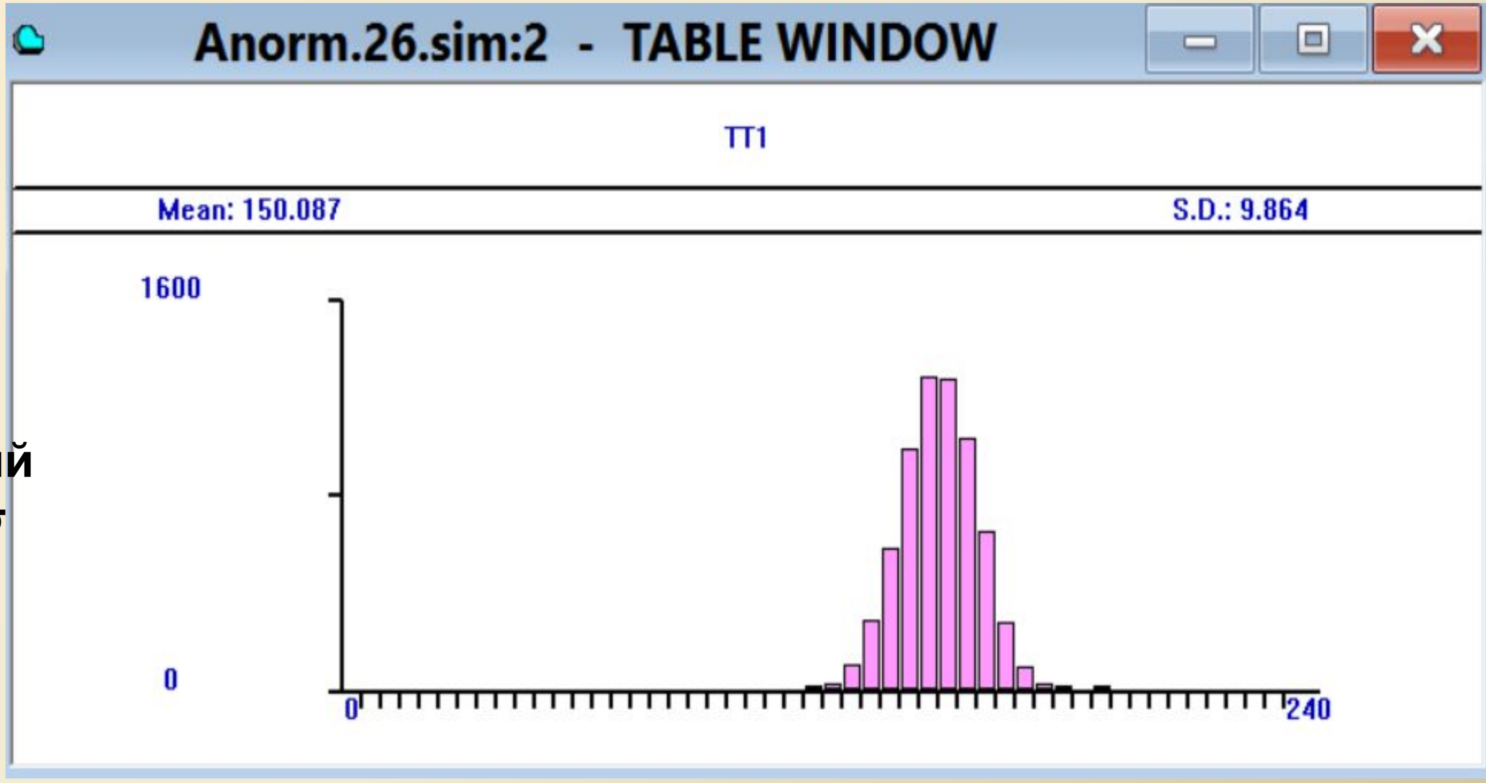
```
GENERATE   (Normal(1,150,10))
    SAVEVALUE 1,c1
    …………….……………………….
    ADVANCE    10
    TABULATE   tt1
    TERMINATE
    GENERATE   1000000
    TERMINATE 1
   tt1     table      x1,0,5,50
```

Моделирование нормального закона времен поступления заявок

Отрезок времён поступления заявок [120,180]

В описании нормального закона
$m_x = 150$
$\sigma_x = 10$

Учитываем, что разброс значений не превышает 3σ



Моделирование закона Пуассона времен поступления заявок

Математическое ожидание: $M = \lambda$. Среднее квадратичное отклонение:

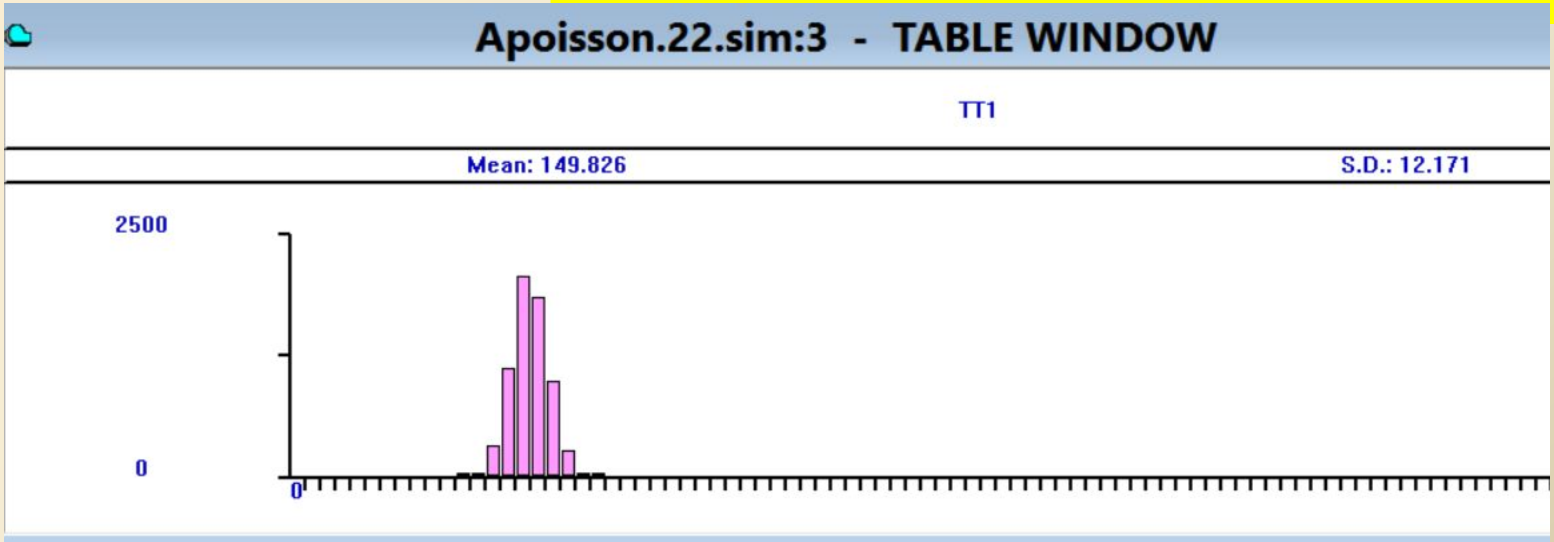
Дисперсия: $D = \lambda$. $\sigma_x = \sqrt{D} = \sqrt{\lambda}$

В описании нормального закона

$m_x = 150$

$\sigma_x = \sqrt{150} = 12{,}25$

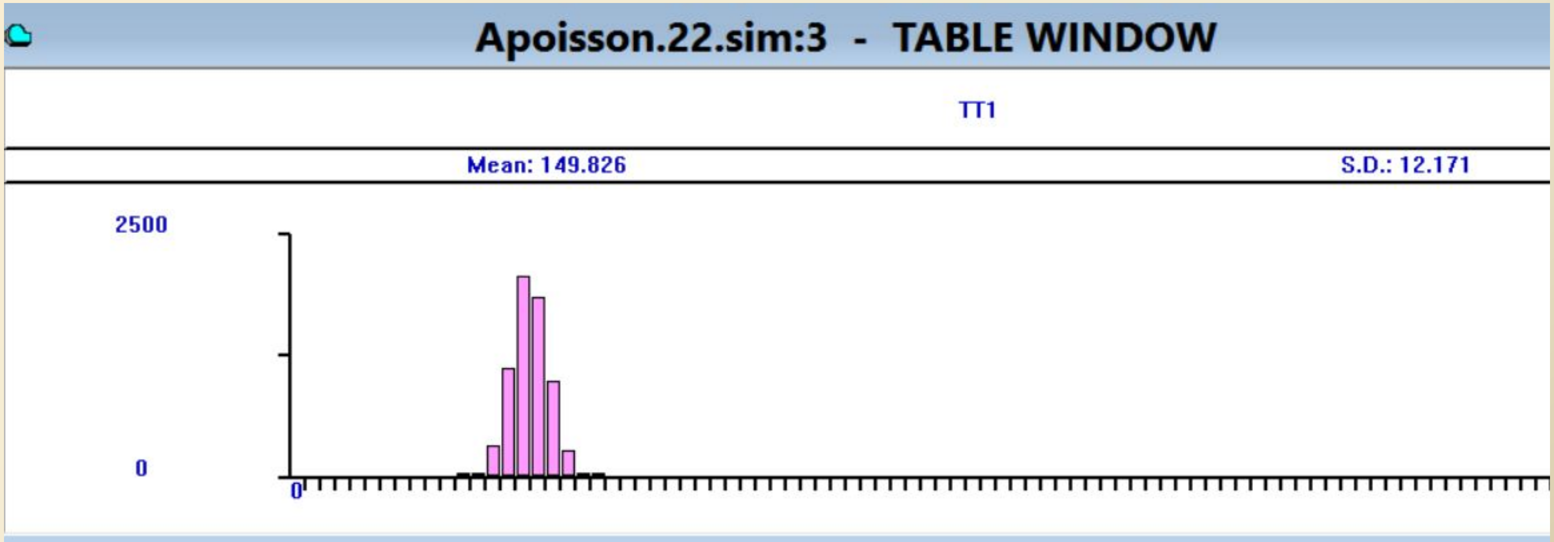
TABLE	MEAN	STD.DE	RANGE		RETRY	FREQUENCY	CUM.%
TT1	149.826	12.171		0			
			100.000 -	110.000		2	0.03
			110.000 -	120.000		38	0.60
			120.000 -	130.000		323	5.44
			130.000 -	140.000		1114	22.13
			140.000 -	150.000		2067	53.10
			150.000 -	160.000		1843	80.72
			160.000 -	170.000		984	95.46
			170.000 -	180.000		272	99.54
			180.000 -	190.000		24	99.90
			190.000 -	200.000		7	100.00



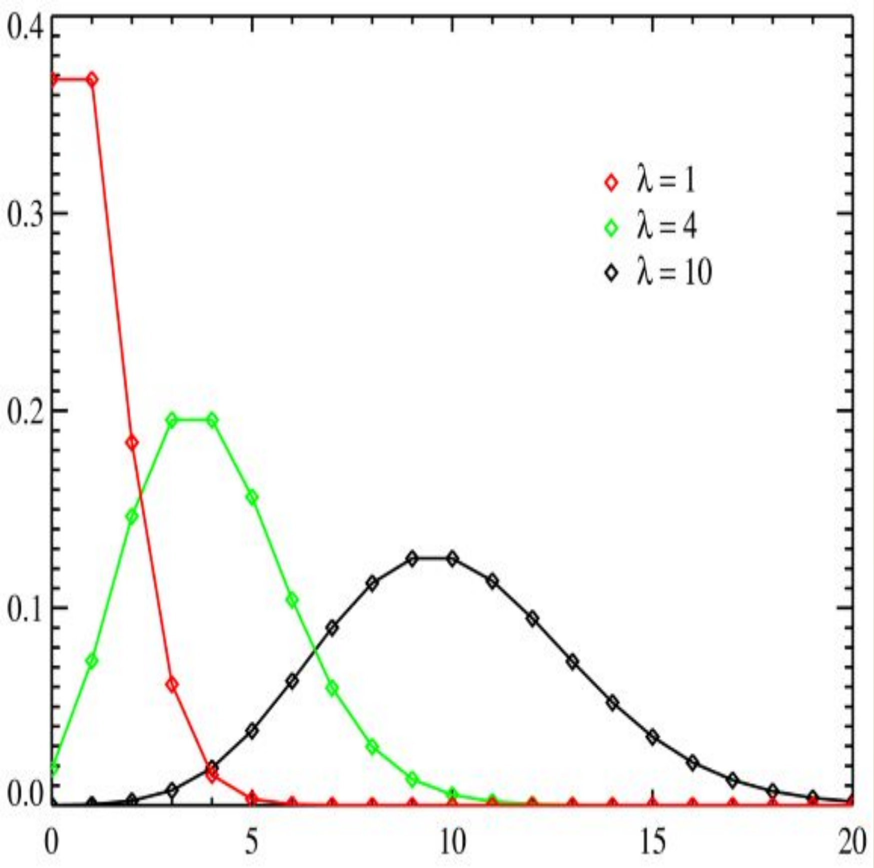
Моделирование закона Пуассона времен поступления заявок

```
GENERATE   (poisson(1,150))
    SAVEVALUE1,c1
    SAVEVALUE1-,x2
    SAVEVALUE2,c1
    ADVANCE
    TABULATE tt1
    TERMINATE
    GENERATE 1000000
    TERMINATE1
tt1     table      x1,0,10,100
```

LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT
1	GENERATE	6674
2	SAVEVALUE	6674
3	SAVEVALUE	6674
4	SAVEVALUE	6674
5	ADVANCE	6674
6	TABULATE	6674
7	TERMINATE	6674
8	GENERATE	1
9	TERMINATE	1



Стандартный график плотности распределения вероятностей появления событий для закона Пуассона



Всегда надо помнить, что при внешнем сходстве зависимостей, необходимо доказательство с определением моментов распределения.

Для равномерно распределенных случайных чисел период случайных последовательностей
2 147 483 647