

## СОДЕРЖАНИЕ

- ❑ **Технология решения *явным* методом**
- ❑ **Шаг интегрирования при *явном* методе**
- ❑ **Сравнение *явного* и *неявного* методов решения**
- ❑ **Границы применимости *явного* метода интегрирования**

## ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЯВНЫМ МЕТОДОМ

### □ Основы технологии

- Решение задачи в *пространстве* – методом конечных элементов и/или методом конечных объёмов
- Решение задачи во *времени* – *явным* методом интегрирования - большое количество небольших шагов по времени

### □ Использование в MSC.Dytran

- Решение задачи в пространстве
  - ✓ Моделирование *конструкции* - решатель Лагранжа – метод конечных элементов
  - ✓ Моделирование жидкости (газа) – решатель Эйлера – метод конечных объёмов
- Решение задачи во временной области – интегрирование по методу центральных разностей

## НЕЯВНЫЙ И ЯВНЫЙ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

### □ Неявный метод интегрирования

$$M \cdot a'_{n+1} + C \cdot v'_{n+1} + K \cdot d'_{n+1} = F^{ext}_{n+1}$$

$$[M + C \cdot \gamma \cdot \Delta t + K \cdot \beta \cdot \Delta t^2] \cdot a'_{n+1} = F^{ext}_{n+1} - C \cdot v^*_n - K \cdot d^*_n$$

$$F^{residual} = F^{ext} - F^{int}$$

$$a'_{n+1} = [M]^{-1} \cdot F^{residual}_{n+1}$$

### □ Явный метод интегрирования

$$M \cdot a_n + C \cdot v_n + K \cdot d_n = F^{ext}_n$$

$$a_n = [M]^{-1} \cdot F^{residual}_n$$

## ШАГ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ЯВНОМ И НЕЯВНОМ МЕТОДАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

### ЯВНЫЙ МЕТОД

Величина шага обычно определяется требованием устойчивости схемы интегрирования по методу центральных разностей

Шаг интегрирования должен быть меньше самого малого периода собственных колебаний всех элементов сетки

Моделирование быстроизменяющихся процессов не представляет проблемы

### НЕЯВНЫЙ МЕТОД

Решение безусловно устойчиво, поэтому величина шага интегрирования определяется только требуемой точностью

Шаг интегрирования должен быть меньше самого малого представляющего интерес периода собственных колебаний конструкции

Моделирование быстроизменяющихся процессов (например, всплесков давления) может представлять проблему

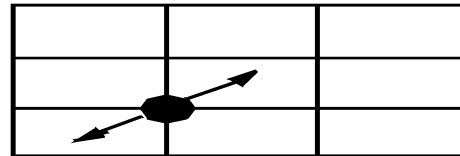
### НЕЯВНЫЙ ШАГ ИНТЕГРИРОВАНИЯ >> ЯВНЫЙ ШАГ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Обычно неявный шаг интегрирования в 10-100 раз больше явного шага интегрирования

## ШАГ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ЯВНОМ МЕТОДЕ

- Шаг интегрирования должен быть меньше самого малого периода собственных колебаний всех элементов сетки

Шаг интегрирования, используемый MSC.Dytran должен быть меньше самого малого периода собственных колебаний всех элементов сетки. Представьте себе “анализатор” собственных колебаний, вычисляющий все моды КЭ модели. Шаг интегрирования должен быть меньше периода самого высокочастотного собственного колебания. Соответствующая мода колебаний – это колебание одного узла на “жёсткости” соседнего элемента.



- Условие устойчивости Куранта

Поскольку невозможно на каждом шаге интегрирования выполнять анализ собственных колебаний, для обеспечения устойчивости решения используется критерий Куранта. Он основывается на учёте времени прохождения волны распространения напряжения через элементы.

Это время зависит от характерного размера наименьшего элемента  $L$ :  $\Delta t = SL / c$

где  $c$  – скорость распространения звука в материале и  $S$  – масштабный фактор ( $<1$ ), называемый также *числом Куранта*.

Для элемента 1D:  $c = \sqrt{\text{Young's Modulus/Density}}$

## ШАГ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**Явный метод**

$$\Delta t \leq \frac{L}{c}$$

**Неявный метод**

$$\Delta t \geq \frac{L}{c}$$

F

$$\Delta t \leq \frac{L}{c}$$

L: размер наименьшего элемента

$\Delta t$ : шаг интегрирования

Сил  
а

t

c: скорость звука

$$\Delta t \geq \frac{L}{c}$$

**Явный метод:**

-Малый шаг решения

**Неявный метод:**

-Большой шаг решения

-Отсутствие больших матриц  
и необходимости их обращения

-Необходимость обращения  
больших матриц

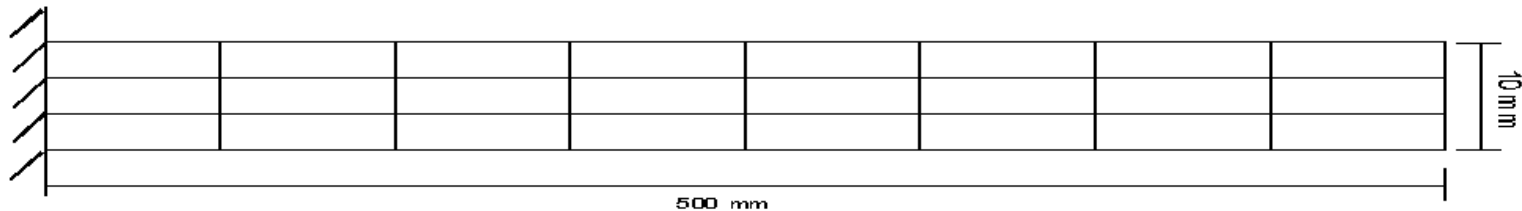
-Матрицы диагональные

-Усложнение процедуры  
решения при возрастании  
степени нелинейности  
задачи

-Надёжная процедура решения  
несмотря на высокую нелинейность

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ (ПРИМЕР)

Рассмотрим призматическую консольную стальную балку



### ЯВНЫЙ МЕТОД

Минимальный размер элемента  $L = 3,33 \text{ мм}$

Скорость звука  $c = 5113 \text{ м/с}$

Шаг интегрирования  $= 0,9 L/c = 0,586 \text{ мс}$

### НЕЯВНЫЙ МЕТОД

Предположим, что интерес представляют три моды колебаний

Частота  $= 3643 \text{ рад/с}$ ; период  $= 1725 \text{ мс}$

Для точности решения примем шаг, равным  $1/20$  периода колебаний третьей моды

Шаг интегрирования  $= 86,2 \text{ мс}$

Шаг при *неявном* методе  $= 147 \times$  шаг при *явном* методе



## СРАВНЕНИЕ ЯВНОГО И НЕЯВНОГО МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

**ЯВНЫЕ** методы эффективнее для решения задач, отличающихся:

- **Короткой продолжительностью процесса**

Вычислительные затраты растут линейно с возрастанием длительности процесса, но даже для моделирования непродолжительных явлений требуется большое количество временных шагов

- **Существенно нелинейным характером или большим количеством нелинейностей**

Вычислительные затраты не зависят от степени нелинейности задачи, в то время как при *неявном* методе с ростом степени нелинейности затраты времени на решение растут экспоненциально

- **Большим размером**

Вычислительные затраты пропорциональны размерности задачи: время CPU увеличивается вдвое при удвоении количества элементов

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ: НЕЯВНЫЙ И ЯВНЫЙ МЕТОДЫ



## ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ЯВНОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

- **НЕЛИНЕЙНЫЕ ФАКТОРЫ**

- **Большие перемещения**

Модель может быть подвержена большим перемещениям и вращениям. В MSC.Dytran нет понятия “малое перемещение”, но препятствий к выполнению моделирования малых перемещений нет

- **Контакт и взаимодействие конструкция - жидкость**

“Простое” моделирование сложного взаимодействия между двумя или более телами

- **Пластичность**

Большое количество моделей материалов (металлов, сплавов, пластиков, композитов и т.д.), обеспечивающих моделирование широкого спектра типов их поведения

## ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ЯВНОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

- **Большие деформации**

Большинство типов элементов допускают учёт больших деформаций. Для оболочечных элементов допускается учёт изменения толщины при деформировании (растяжении)

- **Разрушение**

- **Течение материала**

В случае очень больших деформаций может использоваться *решатель* Эйлера, учитывающий напряжения сдвига

- **СУЩЕСТВЕННО ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ**

MSC.Dytran наиболее подходит для моделирования быстропротекающих явлений типа взрыва и высокоскоростного удара

MSC.Dytran наиболее целесообразно применять для моделирования динамических явлений. Решение статических задачи с его помощью целесообразно только при наличии существенных нелинейностей