

# Раздел 5.1

## Расчет статической аэроупругости. Теория



© Hugues Beslier

# Цель

- Целью расчета статической аэроупругости является определение нагрузок на ЛА при стационарном или квазистационарном маневре.
- Маневр описывается набором балансирующих параметров.
- Часть балансирующих параметров задается пользователем, а часть определяется расчетом.

# Допущение

- Допускается что в расчете на статическую аэроупругость все нагрузки являются постоянными по времени.
- Уравнение равновесия

$$\mathbf{M}_{aa} \ddot{\mathbf{u}}_a + \mathbf{B}_{aa} \dot{\mathbf{u}}_a + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{u}_a = \mathbf{P}_a + \mathbf{A}_a$$

Инерциальные нагрузки

Демпфирующие усилия

Упругие нагрузки

Внешние нагрузки

Аэродинамические нагрузки

# Следствия

- Упругие нагрузки могут быть постоянными во времени только если упругие деформации тоже постоянны во времени.
- Суммарная деформация может быть представлена через упругую деформацию  $\mathbf{u}_a^e$  и перемещение твердого тела  $\mathbf{u}_a^r$ :

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_a^r + \mathbf{u}_a^e$$

- Следовательно  $\ddot{\mathbf{u}}_a = \ddot{\mathbf{u}}_a^r$  и  $\ddot{\mathbf{u}}_a = \ddot{\mathbf{u}}_a^e$
- Обычно перемещение твердого тела не вызывает демпфирующих усилий
- Таким образом:

$$\mathbf{M}_{aa} \ddot{\mathbf{u}}_a + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{u}_a^e = \mathbf{P}_a + \mathbf{A}_a$$

# Твердотельные тона

- Смещение жесткого тела может быть представлено как суперпозиция твердотельных тонов.
- Твердотельные тона определяются через  $r$ -многообразие степеней свободы, определенных в объекте `SUPPORT` в `bulk data`, то есть

$$\mathbf{D}_{ar} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ll}^{-1} \mathbf{K}_{lr} \\ \mathbf{I}_{rr} \end{bmatrix}$$

- где  $\mathbf{I}_{rr}$   $r$ -мерная единичная матрица
- Таким образом,  $\mathbf{u}_a = \mathbf{D}_{ar} \mathbf{h}_r$

# Связанная система координат

- Система координат (СК), перемещающаяся вместе с твердым телом (ЛА) называется связанной
- Она определяется в поле **RCSID** объекта **AEROS** в bulk data.
- В MSC.FlightLoads, она называется Aerodynamic Reference Coordinate System и задается в меню Global Data.

# Ускорение твердого тела

- Ускорение твердого тела  $\mathbf{h}_R$  определяется относительно связанной СК.
- Имеются 3 вида поступательного ускорения вдоль каждой из осей системы координат и 3 вида вращательного ускорения вокруг каждой оси.
- Эти ускорения можно выразить через ускорение твердого тела  $\mathbf{h}_I$  из соотношения

$$\mathbf{h}_I = \mathbf{T}_{rR} \mathbf{h}_R$$



# Аэродинамические нагрузки

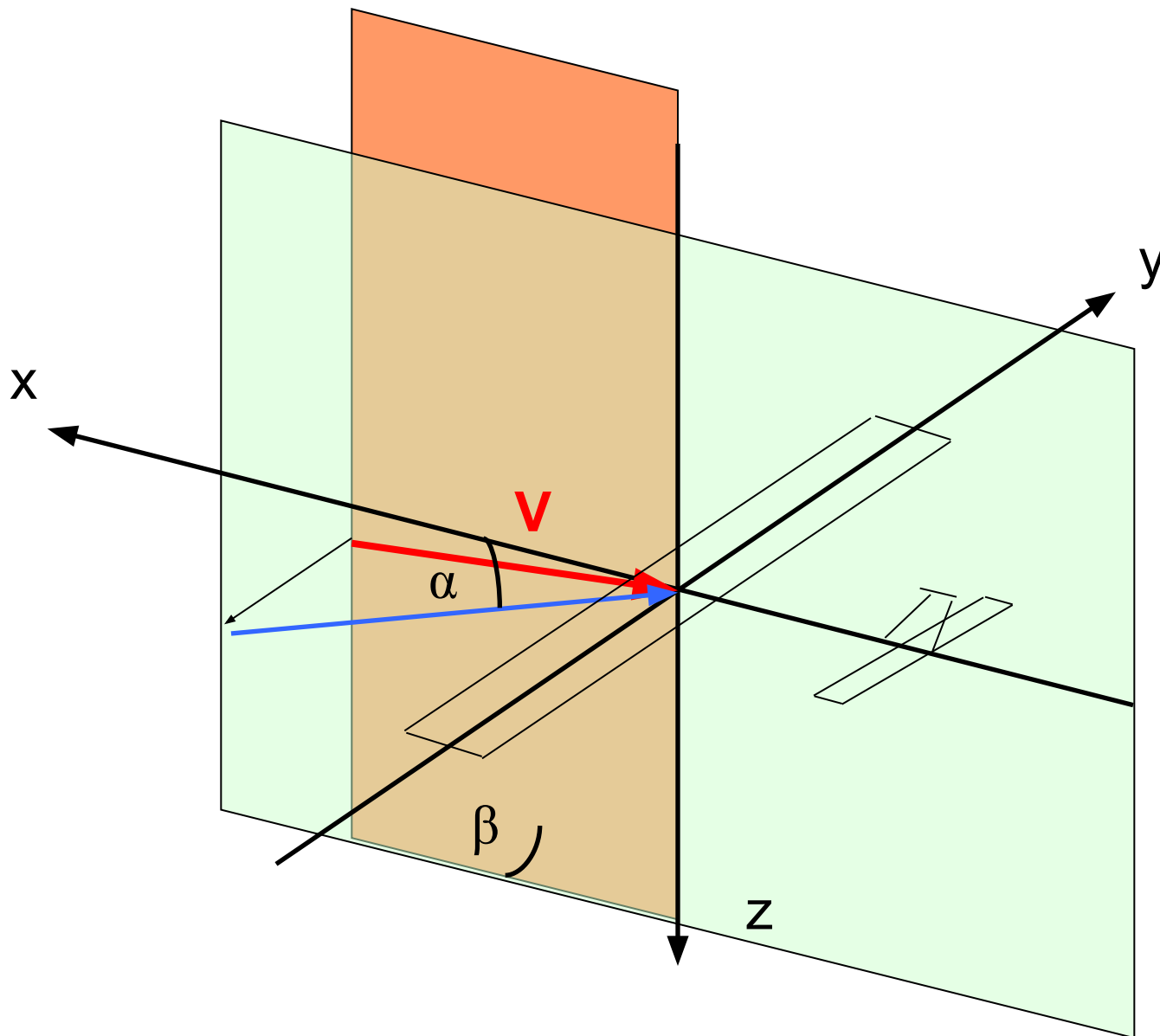
Аэродинамические нагрузки являются функцией от:

- Упругих деформаций
- Аэродинамических углов, которые описывают положение ЛА относительно набегающего потока
- Вращательных производных, которые описывают вращение ЛА вокруг осей связанной СК.
- Отклонения управляющих поверхностей

# Аэродинамические углы

- Угол скольжения  $\beta$  – угол между плоскостью  $xz$  связанной СК и плоскостью, проходящей через ось  $z$  и вектор, определяющий направление потока. Угол считается положительным, если вектор направлен в начало СК со стороны положительного направления оси  $y$ .
- Угол атаки  $\alpha$  – угол между проекцией вектора, определяющего направление потока, на плоскость  $xz$  и осью  $x$  связанной СК.

# Аэродинамические углы



# Скорости вращения

- Скорость крена  $p$  (*roll rate*) – описывает вращение ЛА вокруг продольной оси.
- Скорость тангажа  $q$  (*pitch rate*) - описывает вращение ЛА вокруг поперечной оси.
- Скорость курса  $r$  (*yaw rate*) – описывает вращения ЛА вокруг вертикальной оси.
- В MSC.Nastran, используются также и безразмерные скорости вращения  $pb/2V$ ,  $qc/2V$  и  $rb/2V$ , где  $b$ - размах,  $c$ - длина хорды и  $V$ - скорость полета.

# Балансировочные параметры

- Твердотельные ускорения, аэродинамические производные и углы отклонения управляющих поверхностей входят в множество балансировочных параметров

$$\tilde{\mathbf{u}}_x^T = \left\{ \mathbf{h}_R^T \quad \alpha \quad \beta \quad pb/2V \quad q\bar{c}/2V \quad rb/2V \quad \mathbf{h}_c^T \right\}$$

где матрица  $\mathbf{h}_c$  описывает отклонение управляющих поверхностей.

- Матрицу  $\tilde{\mathbf{T}}_{Rx}$  можно выразить через значение ускорений твердого тела:

$$\mathbf{h}_R = \tilde{\mathbf{T}}_{Rx} \tilde{\mathbf{u}}_x$$

# Линеаризация: упругие деформации

- Используя понятие линейной упругости, необходимо учитывать что линейные деформации должны иметь небольшую величину.
- Таким образом, получаем линеаризацию аэродинамических нагрузок относительно упругих деформаций

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_a(\mathbf{u}_a^e, \tilde{\mathbf{u}}_x) &= \mathbf{A}_a(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{u}}_x) + \frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial \mathbf{u}_a^e}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{u}}_x) \mathbf{u}_a^e = \\ &= \mathbf{A}_a^r(\tilde{\mathbf{u}}_x) + \bar{q} \mathbf{Q}_{aa}(\tilde{\mathbf{u}}_x) \mathbf{u}_a^e\end{aligned}$$

где  $\bar{q}$  скоростной напор

# Линеаризация: определение

- $\mathbf{A}_a^r(\tilde{\mathbf{u}}_x) = \mathbf{A}_a(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{u}}_x)$  - аэродинамические нагрузки на жесткий ЛА
- $\mathbf{A}_a^e = \bar{q} \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{u}_a^e$  - изменения аэродинамических нагрузок, вносимые упругими деформациями. Эти нагрузки называются «упругим» приращением
- $\bar{q} \mathbf{Q}_{aa} = \partial \mathbf{A}_a / \partial \mathbf{u}_a^e$  - матрица аэродинамической жесткости.

# Нелинейная статическая аэроупругость

- В нелинейной статической аэроупругости, реализованной в MSC.Nastran, аэродинамические нагрузки линеаризуются относительно линейных деформаций, но не относительно балансирующих параметров.
- Уравнение равновесие записывается в виде

$$[\mathbf{K}_{aa} - \bar{q}\mathbf{Q}_{aa}(\tilde{\mathbf{u}}_x)]\mathbf{u}_a^e = \mathbf{P}_a - \mathbf{M}_{aa}\mathbf{D}_{ar}\mathbf{T}_{rR}\tilde{\mathbf{T}}_{Rx}\tilde{\mathbf{u}}_x + \mathbf{A}_a^r(\tilde{\mathbf{u}}_x)$$



# Линеаризация: балансировочные параметры

- В линейной статической аэроупругости аэродинамические нагрузки линеаризуются относительно балансировочных параметров

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_a(\mathbf{u}_a^e, \tilde{\mathbf{u}}_x) &= \mathbf{A}_a(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial \mathbf{u}_a^e}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \mathbf{u}_a^e + \frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_x}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \tilde{\mathbf{u}}_x \\ &= \mathbf{A}_a^r + \bar{q} \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{u}_a^e + \bar{q} \tilde{\mathbf{Q}}_{ax} \tilde{\mathbf{u}}_x \\ &= \bar{q} \mathbf{Q}_{ax} \mathbf{u}_x + \bar{q} \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{u}_a^e\end{aligned}$$

где  $\mathbf{Q}_{ax} = \left[ \mathbf{A}_a^r / \bar{q} \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{ax} \right]$  и  $\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_x \end{bmatrix}$ .

# Линейная статическая аэроупругость

- Уравнение равновесия

$$(\mathbf{K}_{aa} - \bar{q}\mathbf{Q}_{aa})\mathbf{u}_a^e = \mathbf{P}_a + (\bar{q}\mathbf{Q}_{ax} - \mathbf{M}_{aa}\mathbf{D}_{ar}\mathbf{T}_{rR}\mathbf{T}_{Rx})\mathbf{u}_x$$

где матрица  $\mathbf{T}_{Rx}$  матрица ускорений твердого тела  
выраженная через расширенное множество  
балансирующих параметров  $\mathbf{u}_x$ .