

# Раздел 1

## Обзор основ динамического анализа

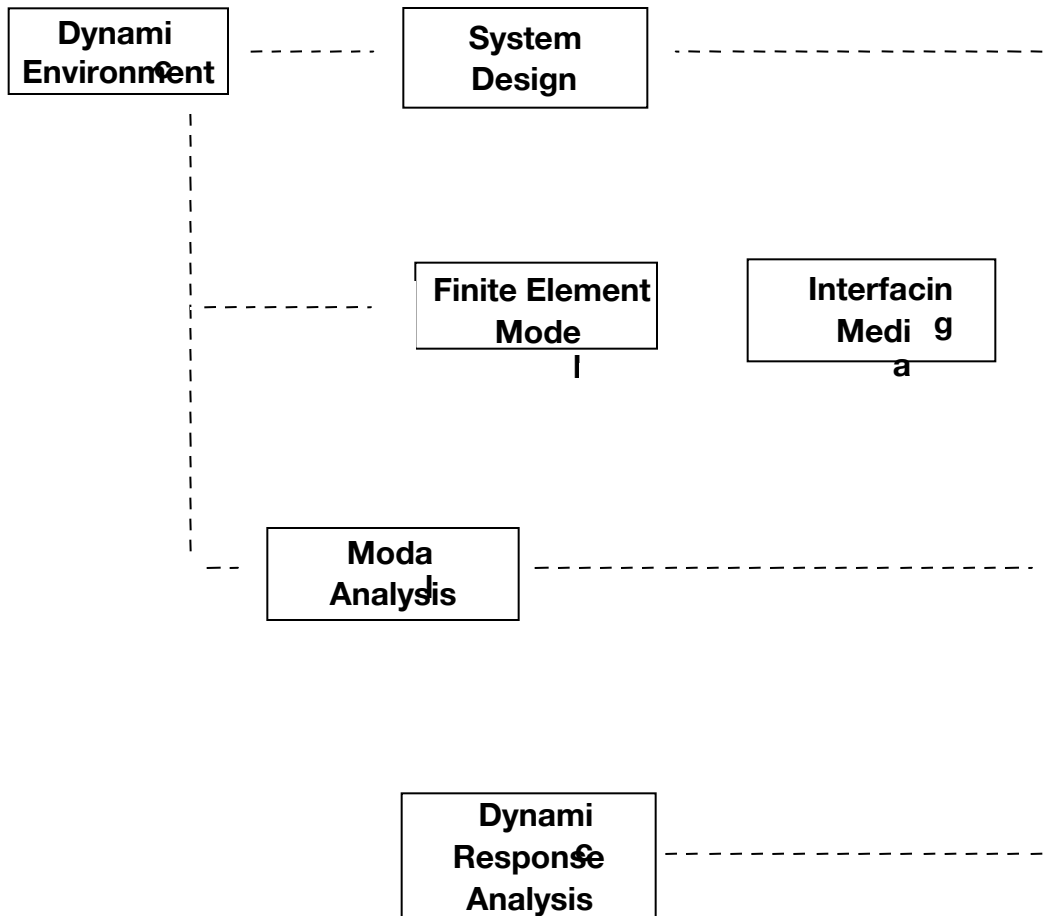
# Раздел 1. Обзор основ динамического анализа

• ПРОЦЕСС ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....	1 - 4
• СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....	1 - 5
• СИСТЕМА ЕДИНИЦ.....	1 - 6
• НЕЗАТУХАЮЩИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ (СС).....	1 - 9
• ЗАТУХАЮЩИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ .....	1- 11
• СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ - ПОДКРИТИЧЕСКОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ.....	1 - 13
• СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ – НЕЗАТУХАЮЩИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.....	1 - 14
• ДИНАМИЧЕСКИЙ ФАКТОР.....	1 - 16
• СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ – ЗАТУХАЮЩИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.....	1 - 17
• ДИНАМИЧЕСКИЙ ФАКТОР.....	1 -19
•	

# Обзор основ динамического анализа (продолж.)

- СИСТЕМА С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ..... 1 - 20
- ТИПЫ КОЛЕБАНИЙ..... 1 - 21
- ВИДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ..... 1 - 22
- ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МЕТОДОМ КЭ..... 1 - 23
- ДОКУМЕНТАЦИЯ ПО СИСТЕМЕ MSC.Nastran .....1 - 24
- ЛИТЕРАТУРА ПО ДИНАМИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.....1 - 26

# Процесс динамического анализа



# Система с одной степенью свободы

- Уравнение движения:

$$m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) + n(u, \dot{u})$$

$m$  = масса

$b$  = демпфирование

$k$  = жесткость

$n$  = нелинейная восстанавливающая сила

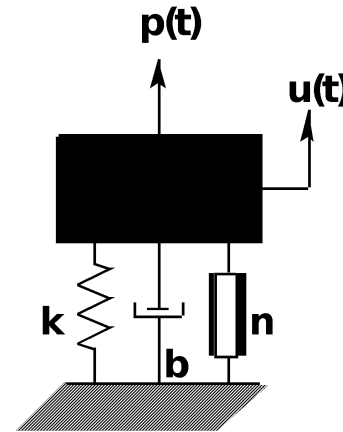
$p$  = внешняя сила

$u$  = перемещение

$\dot{u}$  = скорость

$\ddot{u}$  = ускорение

$u$ ,  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$  и  $p$  зависят от времени.  
 $m$ ,  $b$  и  $k$  - константы.  
 $n$  - нелинейная функция  $u$ ,  $\dot{u}$ .



# Система единиц

- **Основные единицы**

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| -Длина L (дюйм, метр)     | -Длина L (метр, миллиметр) |
| -Масса M (слаг,килограмм) | -Сила F (Ньютон)           |
| -Время T (секунда)        | -Время T (секунда)         |

- **Основные и производные единицы**

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| -m M                       | -m $FT^2/L = F/(LT^{-2})$  |
| -b $MT^{-1}$               | -b $FT/L = F/(T/L)$        |
| -k $MT^{-2}$               | -k $F/L$                   |
| -p $MLT^{-2}$              | -p F                       |
| -u L                       | -u L                       |
| -u <sup>·</sup> $LT^{-1}$  | -u <sup>·</sup> $LT^{-1}$  |
| -u <sup>··</sup> $LT^{-2}$ | -u <sup>··</sup> $LT^{-2}$ |

$$1 \frac{Ns^2}{mm} = 1000kg = 1t$$

# Система единиц

- Техническая система единиц.

Variable	Dimensions*	Common English Units	Common Metric Units
Length	L	in	m
Mass	M	lb-sec <sup>2</sup> /in	kg
Time	T	sec	sec
Area	L <sup>2</sup>	in <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
Volume	L <sup>3</sup>	in <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
Velocity	LT <sup>-1</sup>	in/sec	m/sec
Acceleration	LT <sup>-2</sup>	in/sec <sup>2</sup>	m/sec <sup>2</sup>
Rotation	-	rad	rad
Rotational Velocity	T <sup>-1</sup>	rad/sec	rad/sec
Rotational Acceleration	T <sup>-2</sup>	rad/sec <sup>2</sup>	rad/sec <sup>2</sup>
Circular Frequency	T <sup>-1</sup>	rad/sec	rad/sec
Frequency	T <sup>-1</sup>	cps; Hz	cps; Hz
Eigenvalue	T <sup>-2</sup>	rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup>	rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup>
Phase Angle	-	deg	deg
Force	MLT <sup>-2</sup>	lb	N
Weight	MLT <sup>-2</sup>	lb	N
Moment	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	in-lb	N-m
Mass Density	ML <sup>-3</sup>	lb-sec <sup>2</sup> /in <sup>4</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Young's Modulus	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	lb/in <sup>2</sup>	Pa; N/m <sup>2</sup>
Poisson's Ratio	-	-	-
Shear Modulus	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	lb/in <sup>2</sup>	Pa; N/m <sup>2</sup>
Area Moment of Inertia	L <sup>4</sup>	in <sup>4</sup>	m <sup>4</sup>
Torsional Constant	L <sup>4</sup>	in <sup>4</sup>	m <sup>4</sup>
Mass Moment of Inertia	ML <sup>2</sup>	in-lb-sec <sup>2</sup>	kg-m <sup>2</sup>
Stiffness	MT <sup>-2</sup>	lb/in	N/m
Viscous Damping Coefficient	MT <sup>-1</sup>	lb-sec/in	N-sec/m
Area Moment of Inertia	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	lb/in <sup>2</sup>	Pa; N/m <sup>2</sup>
Torsional Constant	-	-	-

\*L размерность длины  
 M размерность массы  
 T размерность времени  
 - безразмерная величина

# Система единиц

- **Используйте согласованную систему единиц!**
- **Ошибки в выборе системы единиц – причина №1 при подготовке модели для динамического анализа!**
- **Наиболее частые ошибки – при выборе единиц для параметров массы и демпфирования.**
- **В MSC.Nastran нет “встроенной” системы единиц. Пользователь сам должен проверять согласованность единиц измерения величин.**
- **Согласованные единицы: Н, тм, мм, с или Н, кг, м, с**



# Незатухающие свободные колебания системы с одной СС

- Уравнение колебаний

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

- Общее решение

$$u(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{natural frequency (rad/sec)}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \text{natural frequency (cycles/sec)}$$

- Начальные условия

$u(0)$  и  $\dot{u}(0)$  - известны.

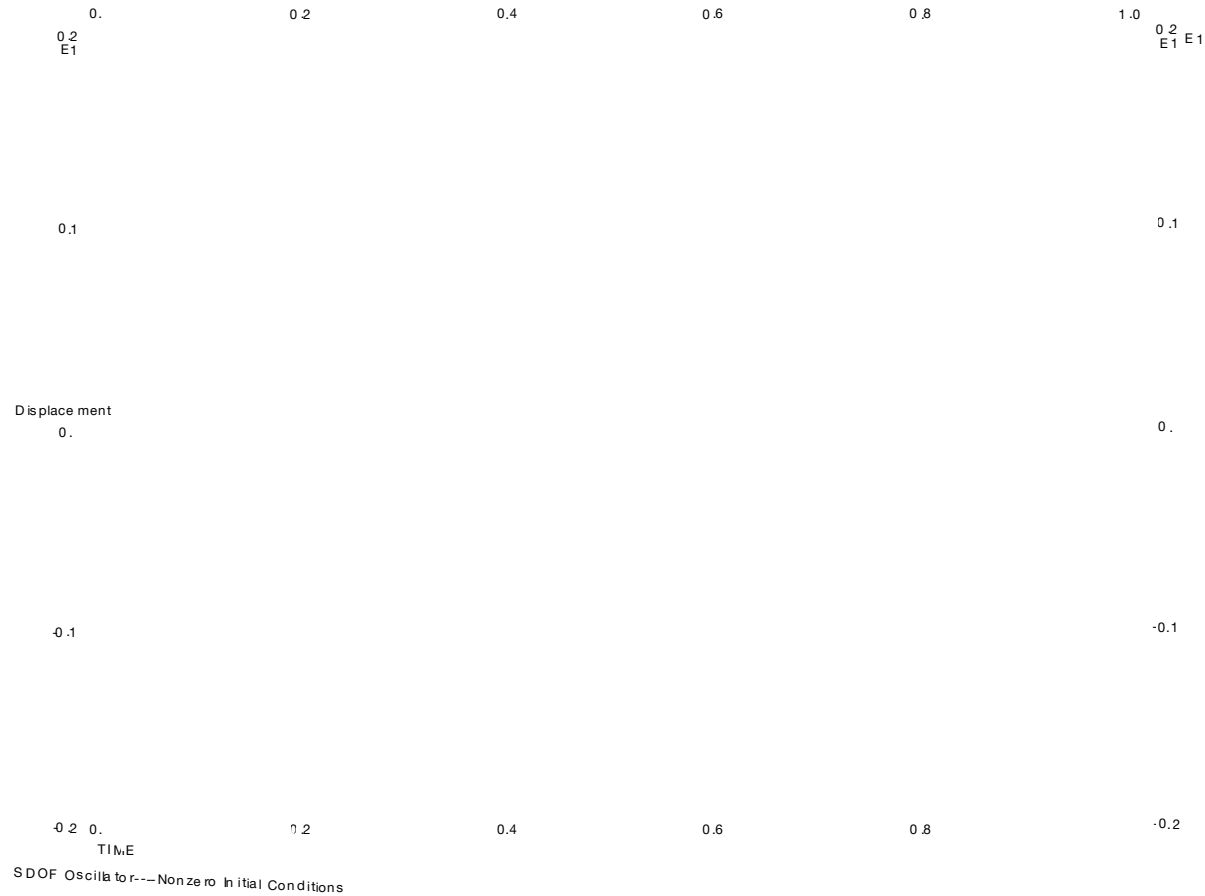
$$B = u(t=0)$$

$$A = \frac{\dot{u}}{\omega_n} (t=0)$$

- Результат

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + u(0) \cos \omega_n t$$

# Незатухающие свободные колебания системы с одной СС



# Затухающие свободные колебания системы с одной СС

- Уравнение колебаний

$$m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + Ku(t) = 0$$

- Критическое демпфирование

$$b_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

- Коэффициент аperiodичности

$$\zeta = \frac{b}{b_c}$$

- Влияние величины демпфирования на тип решения.

- Подкритическое демпфирование

$$b < b_c$$

$$u(t) = e^{-bt/2m}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t)$$

- Частота колебаний системы с демпфированием

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

# Затухающие свободные колебания системы с одной СС

- **Критическое демпфирование**

- $b = b_c$

- **Колебания отсутствуют.**

- $u(t) = (A + Bt) e^{-bt/2m}$

- **Надкритическое демпфирование**

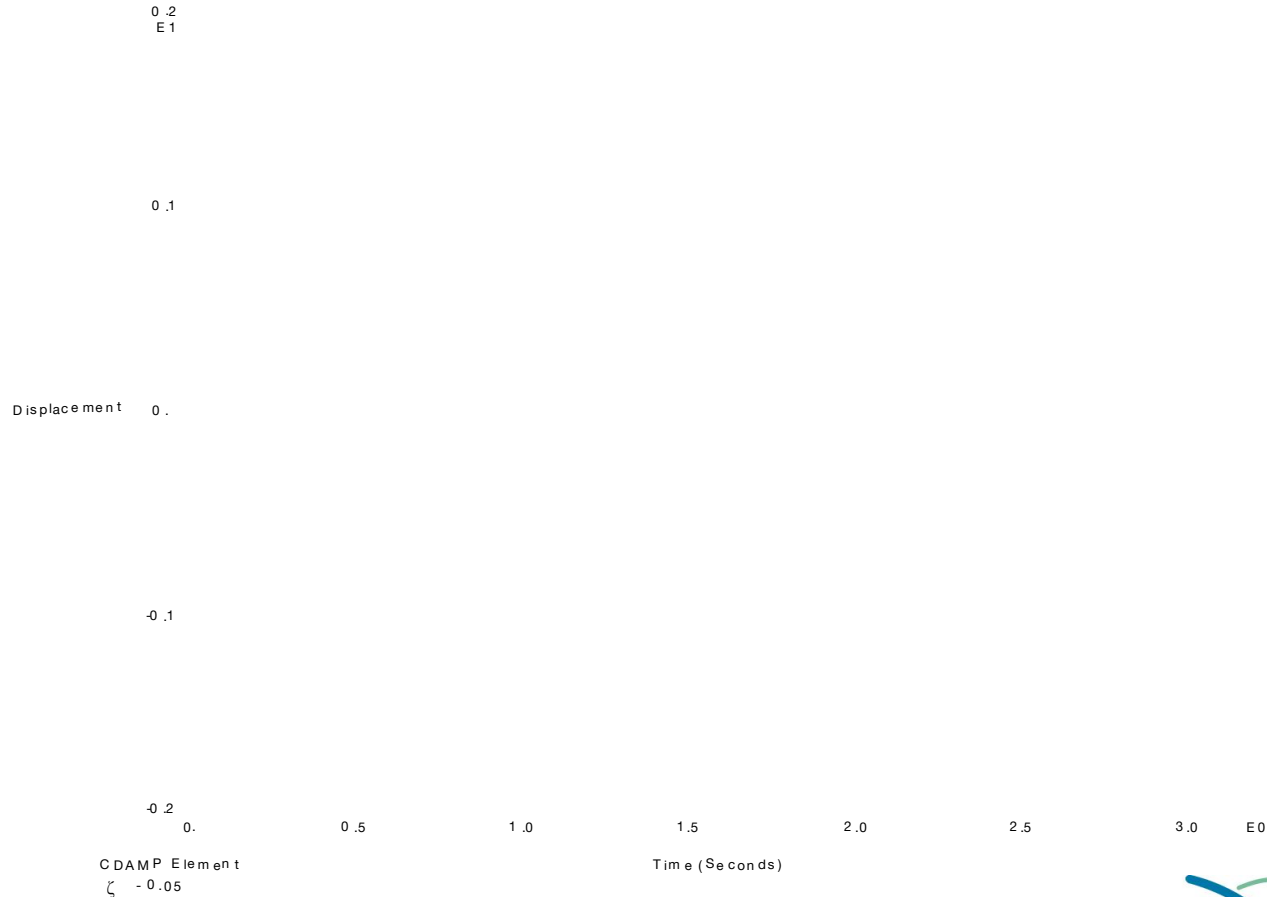
- $b > b_c$

- Колебания отсутствуют. Система постепенно возвращается в положение равновесия.

- **Обычно исследуются колебания с подкритическим демпфированием.**

- **Для конструкций характерно вязкое демпфирование в диапазоне  $0 - 0,1$ .**

# Свободные затухающие колебания – подкритическое демпфирование



# Система с одной СС – незатухающие синусоидальные колебания

## Уравнение колебаний

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = P \sin \omega t$$

где  $\omega$  = частота внешней силы

## Решение

$$u(t) = \underbrace{A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t}_{\text{Initial Condition}} + \underbrace{\frac{P/k}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} \sin \omega t}_{\text{Steady-State}}$$

где

$$B = u(t = 0)$$

$$A = \frac{\dot{u}(t = 0)}{\omega_n} - \frac{\omega P / k}{(1 - \omega^2 / \omega_n^2) \omega_n}$$

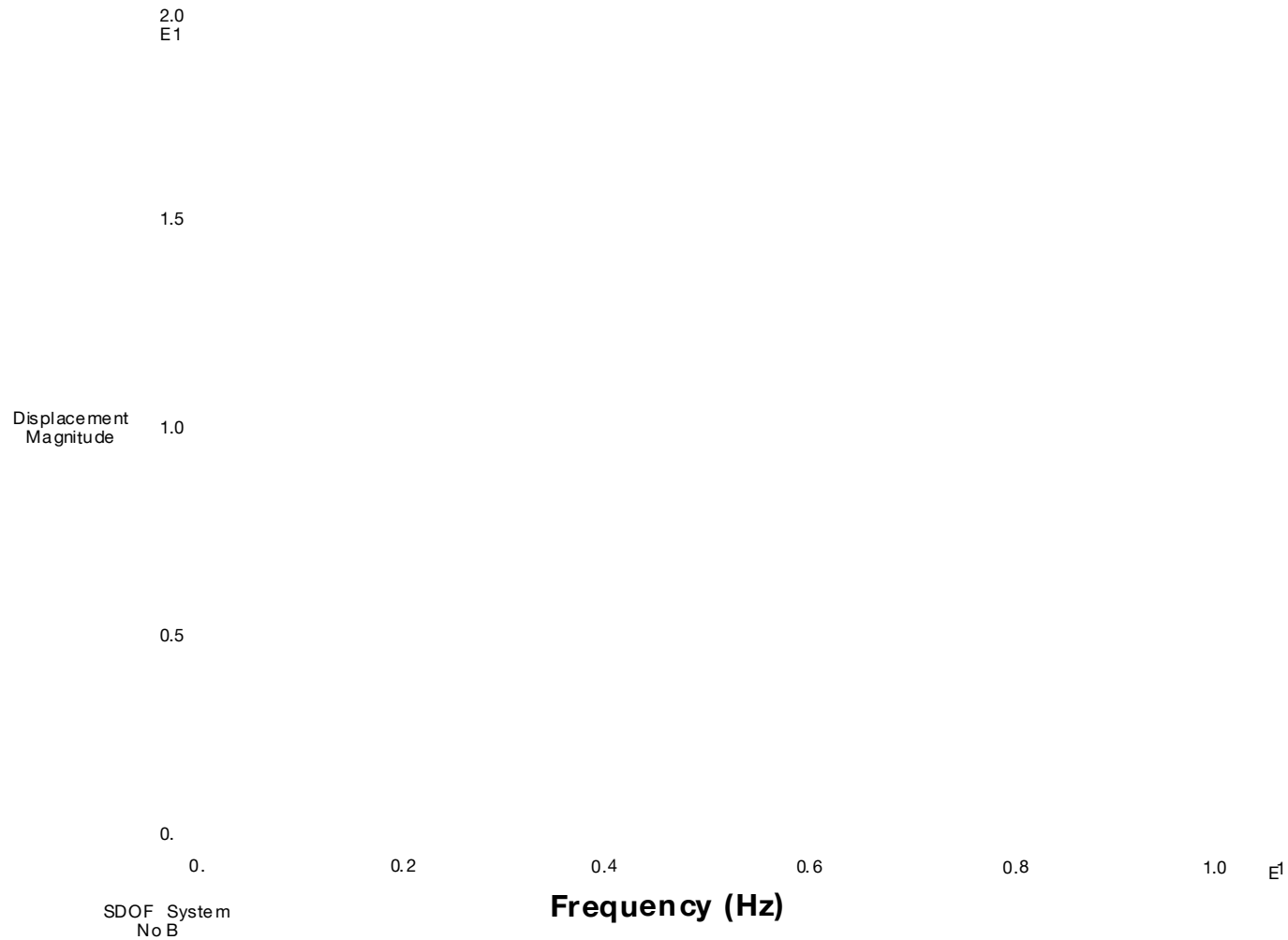
# Система с одной СС – незатухающие синусоидальные колебания

- Установившиеся колебания

- $P/k$  – статическая деформация (перемещение).

- $\frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}$  - динамический фактор.

# Динамический фактор





# Система с одной СС – затухающие синусоидальные колебания

- Уравнение колебаний

- $m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = P \sin \omega t$

- Переходный процесс быстро затухает и не представляет интереса.

- Установившиеся колебания

- $$u(t) = P/k \frac{\sin(\omega t + \theta)}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2}}$$

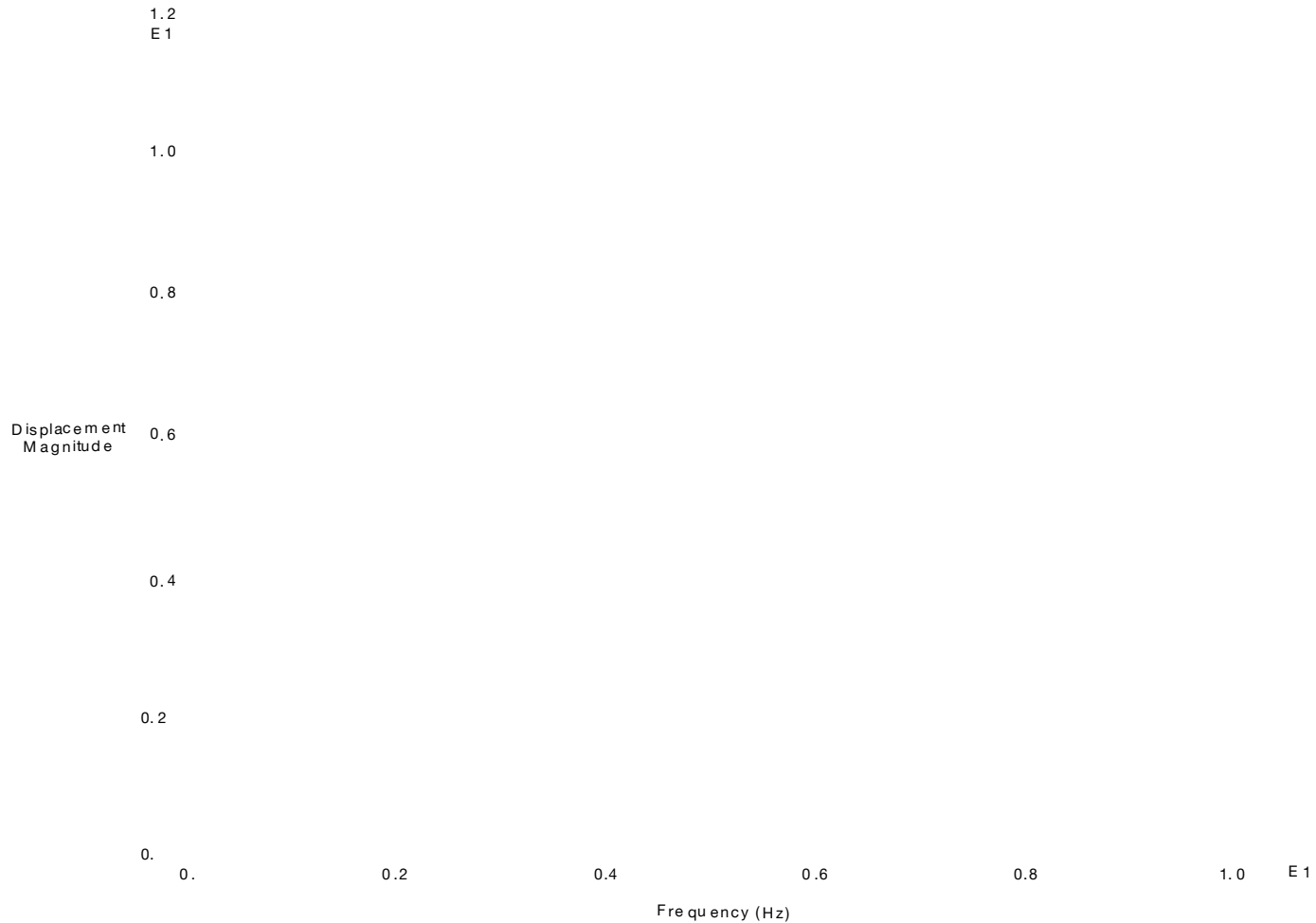
- $$\theta = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}$$

- $\theta$  – сдвиг (запаздывание) фазы

# Система с одной СС – затухающие синусоидальные колебания

- Для  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ 
  - Динамический фактор  $\rightarrow 1$  (статическое решение)
  - Фазовый угол  $\rightarrow 360^\circ$  (отклик синфазен возмущению)
- Для  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ 
  - Динамический фактор  $\rightarrow 0$  (отклик ноль)
  - Фазовый угол  $\rightarrow 180^\circ$  (отклик противофазен возмущению)
- Для  $\frac{\omega}{\omega_n} \approx 1$ 
  - Динамический фактор  $\approx \frac{1}{2\zeta}$
  - Фазовый угол  $\approx 270^\circ$

# Динамический фактор



# Система с многими степенями свободы

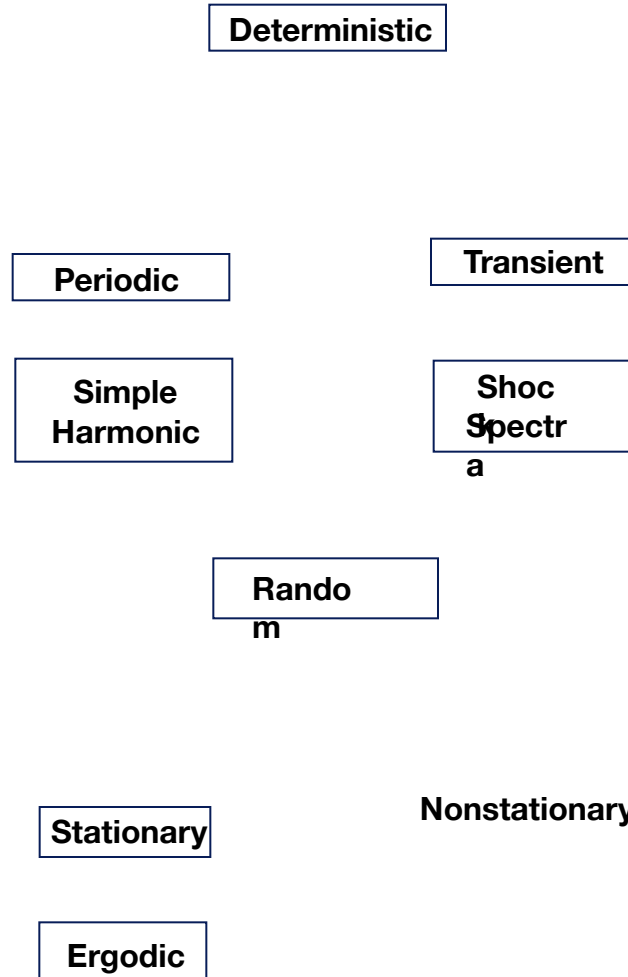
- Уравнение колебаний преобразуется к виду

$$[M] \{\ddot{u}\} + [B] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{P\} + \{N\}$$

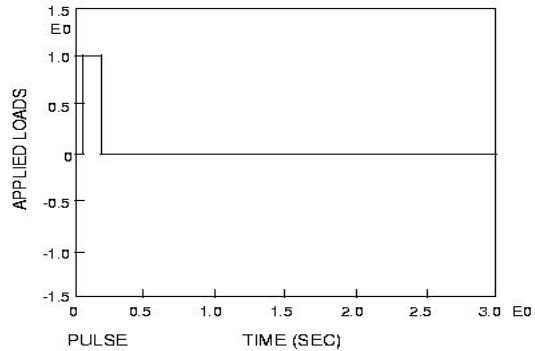
- где

- $\{u\}$  = вектор перемещений
- $\{M\}$  = матрица масс
- $\{B\}$  = матрица демпфирования
- $\{K\}$  = матрица жесткости
- $\{P\}$  = вектор внешнего воздействия
- $\{N\}$  = вектор нелинейных сил

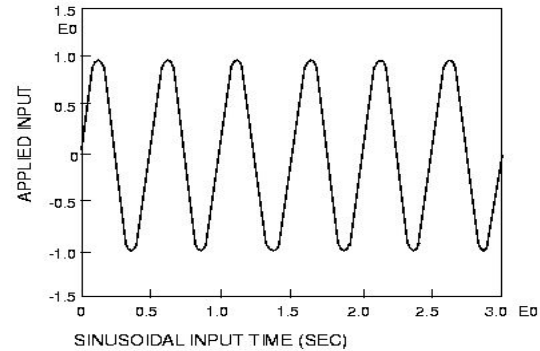
# Типы колебаний



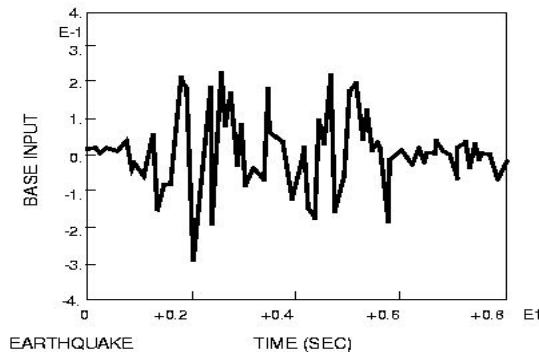
# Виды динамического воздействия



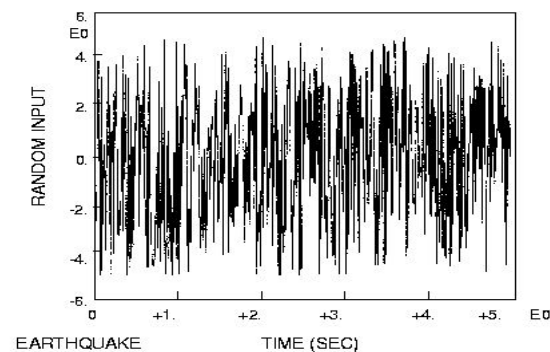
**PULSE**



**SINUSOIDAL**



**TRANSIENT**



**RANDOM**

# Вопросы моделирования динамики методом КЭ

- Частотный диапазон
- Узлы/закрепления/элементы
- Линейное и нелинейное решение
- “Полная” модель и модель с суперэлементами
- Взаимодействие с внешней средой
- Сравнительный/совместный анализ расчетных и экспериментальных результатов
- Демпфирование

# Документация по системе MSC.Nastran

- **Документация**

- *MSC.Nastran Quick Reference Guide*
- *MSC.Nastran Reference Manual*

- **Руководства пользователя**

- *Getting Started with MSC.Nastran*
- *MSC.Nastran Linear Static Analysis*
- *MSC.Nastran Basic Dynamic Analysis*
- *MSC.Nastran Advanced Dynamic Analysis*
- *MSC.Nastran Design Sensitivity and Optimization*
- *MSC.Nastran DMAP Module Dictionary*
- *MSC.Nastran Numerical Methods*
- *MSC.Nastran Aeroelastic Analysis*
- *MSC.Nastran Thermal Analysis*



# Документация по системе MSC.Nastran

- Другая документация
  - *MSC.Nastran Common Questions and Answers*
  - *MSC.Nastran Bibliography*
- Документация в электронной форме (для рабочих станций и персональных компьютеров)

# Литература по динамическому анализу

- W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, 1964.
- R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975.
- S. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering*, 4th Ed., John Wiley & Sons, 1974.
- K. J. Bathe and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1976.
- J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.
- C. M. Harris and C. E. Crede, *Shock and Vibration Handbook*, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1976.
- L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, MacMillan, 1967.
- L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 1975.
- M. Paz, *Structural Dynamics Theory and Computation*, Prentice-Hall, 1981.

# Литература по динамическому анализу

- W. T. Thomson, *Theory of Vibrations with Applications*, Prentice-Hall, 1981.
- R. R. Craig, *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons, 1981.
- S. H. Crandall and W. D. Mark, *Random Vibration in Mechanical Systems*, Academic Press, 1963.
- J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random Data Analysis and Measurement Techniques*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, 1986.

**NAS102**

**Декабрь 2001, Стр. 1-28**  
**MSC Moscow**

