Раздел 3

Анализ собственных колебаний

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Раздел 3. Анализ собственных колебаний

- НЕОБХОДИМОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ… 3 - 3
- ОБЗОР ТЕОРИИ…… 3 - 4
- ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ…..…… 3 - 8
- ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ…… 3 - 12
- МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ…….…… 3 - 14
- ТЕОРИЯ МЕТОДА Штурма……3 - 16
- МЕТОД Ланцоша…….…… 3 - 17
- ИНТЕРФЕЙС ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ МЕТОДА Ланцоша…….. 3 - 18
- ИНТЕРФЕЙС ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ ДРУГИХ МЕТОДОВ…… 3 - 19
- УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЕМ ПРИ АНАЛИЗЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ…… 3 - 21
- ВИДЫ ВЫЧИСЛЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН..…… 3 - 22
- ПРИМЕР №1 – МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ…… 3 - 23
- “ГЕОМЕТРИЯ” ПЛАСТИНЫ…….…… 3 - 26
- ВХОДНОЙ ФАЙЛ ДЛЯ ПРИМЕРА №1…….…… 3 - 29
- РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ПРИМЕРА №1…….. 3 - 30

Необходимость выполнения анализа собственных колебаний

- Исследование динамических характеристик конструкции. Например, если ротационную машину предполагается установить на некоторое основание, то для исключения чрезмерных вибраций необходимо убедиться, что частота вращения ротора достаточно “далека” от частоты собственных колебаний основания.
- Исследование возможного увеличения нагрузок вследствие динамических эффектов.
- Использование информации о характеристиках собственных колебаний для планирования последующего динамического анализа (переходного процесса, частотного отклика): что необходимо предпринять, чтобы расчетная модель соответствовала требованиям, предъявляемым к вычислениям.
- Использование информации о характеристиках собственных колебаний для планирования последующего динамического анализа модальным методом.
- Планирование экспериментального исследования конструкции: выбор мест расположения датчиков ускорений и т.п.
- Оценивание конструктивных изменений.

MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Обзор теории

- Рассмотрим

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \qquad (1)$$

- Представим решение в форме

$$\{x\} = \{\phi\}e^{i\omega t} \qquad (2)$$

- (Физически это означает, что все координаты изменяются синхронно – форма деформаций системы остается постоянной, меняется только ее амплитуда.)
- Из уравнения (2):

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2\{\phi\}e^{i\omega t} \qquad (3)$$

- Подставляя уравнения (2) и (3) в уравнение (1), имеем

$$-\omega^2[M]\{\phi\}e^{i\omega t} + [K]\{\phi\}e^{i\omega t} = 0$$

- что (после деления на $e^{i\omega t}$) упрощается к виду

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = 0$$

- Это – формулировка задачи о собственных значениях.

MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Обзор теории

- Возможны два варианта:
  1. Если $\det([K]-\omega^2[M]) \neq 0$, то из уравнения (4):

$$\{\phi\} = 0$$

  - Что является тривиальным решением и с физической точки зрения не представляет интереса.
  2. В противном случае $\det([K]-\omega^2[M]) = 0$, что приводит к нетривиальному решению в отношении $\{\phi\}$.
- Т.о., задача о собственных значениях упрощается до задачи решения уравнения:

$$\det([K]-\omega^2[M]) = 0$$

  - или

$$\det([K]-\lambda[M]) = 0$$

  - где

$$\lambda = \omega^2$$

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

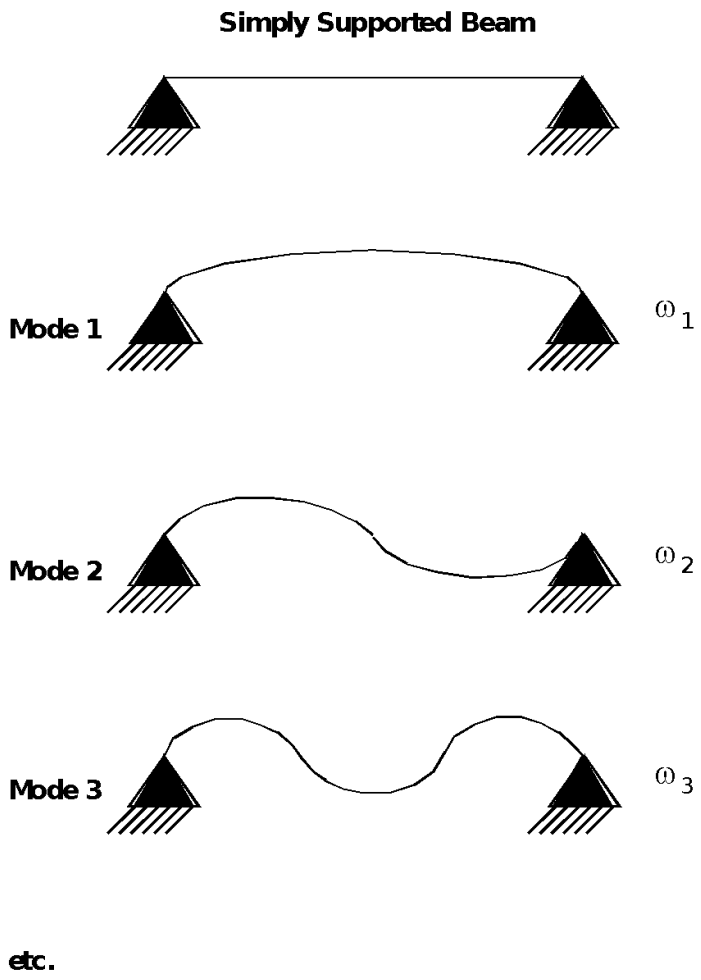
Обзор теории

- Если конструкция имеет N степеней свободы с “присоединенными” массами, тогда будет N ω' s которые являются решениями собственной задачи.. Эти ω’s(ω_1,ω_2,…,ω_n) – частоты собственных колебаний, характеристические частоты, фундаментальные частоты или резонансные частоты.
- Собственный вектор $\{\phi\}_j$, ассоциирующийся с частотой $\{\omega\}_j$, называется нормальной модой или модальной формой (*<u>формой собственных колебаний</u>*). Нормальная мода соответствует некоторой форме деформаций конструкции.
- При колебаниях форма конструкции в любой момент времени является линейной комбинацией её нормальных мод.

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Обзор теории

- **Пример**



MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Основные свойства собственных колебаний

- Если [K] и [M] симметричные и действительные (что характерно для конечно-элементных моделей обычных конструкций), справедливы следующие условия ортогональности:

$$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\} = 0 \qquad \text{If } i \neq j$$

- и

$$\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\} = 0 \qquad \text{If } i \neq j$$

- а также

$$\omega_j^2 = \frac{\{\phi_j\}^T[K]\{\phi_j\}}{\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_j\}}$$

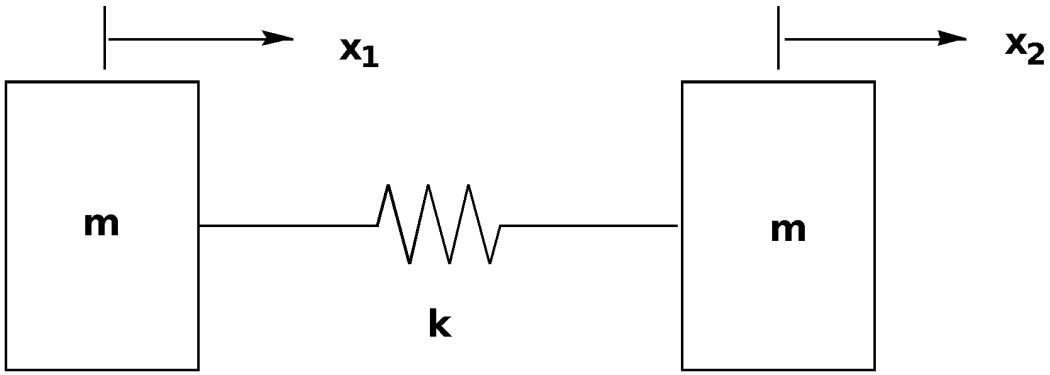
- Собственные частоты ($\omega_1, \omega_2, \ldots$) измеряются в рад/с. Для этого можно использовать также Гц (колебание/с), причем

$$f_j(\text{hertz}) = \frac{\omega_j(\text{radian/second})}{2\pi}$$

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Основные свойства собственных колебаний

- **Пример: незакрепленная структура имеет форму колебаний жесткого тела.**



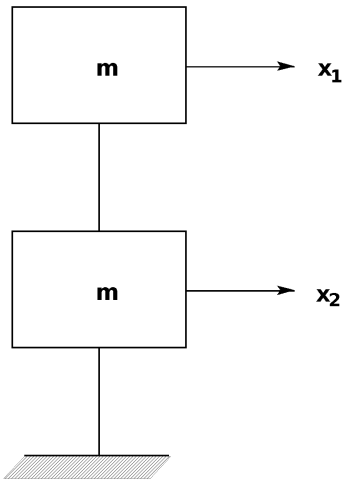
- **Если конструкция не полностью закреплена, т.е. существует мода колебаний жесткого тела (*бездеформационная мода*, ненапряженная мода) или механизм, то по крайней мере одна собственная частота будет равна нулю.**

$$\omega_1 = 0 \qquad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Основные свойства собственных колебаний

- **Формы собственных колебаний произвольно масштабируются. Например,**



,

- $$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 300 \\ 150 \end{Bmatrix} \qquad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0.66 \\ 0.33 \end{Bmatrix}$$

- **являются одними и теми же модами колебаний.**

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Основные свойства собственных колебаний

- На практике формы колебаний нормализуются с помощью выбранного метода. В MSC.Nastran предусмотрены три метода нормализации (исключая метод Ланцоша):
  - Единичная обобщенная масса (по умолчанию)

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1.0$$

  - Единичное значение наибольшего для каждой моды компонента набора A-set
  - Единичное значение для указанного компонента (не рекомендуется)
- При использовании метода Ланцоша возможна нормализация по методу единичной обобщенной массы и методу единичного наибольшего компонента.

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Дополнительные свойства форм собственных колебаний

- **Поскольку деформации элементов, внутренние силы и напряжения в них зависят от величины деформации конструкции, могут быть вычислены дополнительные полезные модальные характеристики. *Учитывая***
  - **Соотношение перемещение – деформация**

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{K}_{\varepsilon \mathbf{u}}]\{\mathbf{u}\}$$

  - **Соотношение деформация - напряжение**

$$\{\sigma\} = [\mathbf{K}_{\sigma\varepsilon}]\{\varepsilon\}$$

  - **Соотношение перемещение - сила**

$$\{\mathbf{P}_{\mathbf{st}}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}$$

  - **Соотношение перемещения – энергия деформации**

$$\mathbf{V}_{\mathbf{e}} = 1/2\{\mathbf{u}_{\mathbf{e}}\}^{\mathbf{T}}[\mathbf{K}_{\mathbf{ee}}]\{\mathbf{u}_{\mathbf{e}}\}$$

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Дополнительные свойства форм собственных колебаний

- Для выбранного модального перемещения

$$\{\mathbf{u}\} = [\phi_{\mathbf{i}}]\xi_{\mathbf{i}}$$

- имеем
  - Модальные деформации $\{\varepsilon_{\phi}\}_{\mathbf{i}} = \{[\mathbf{K}_{\varepsilon\mathbf{u}}]\{\phi_{\mathbf{i}}\}\}\xi_{\mathbf{i}}$
  - Модальные напряжения $\{\sigma_{\phi}\}_{\mathbf{i}} = \{[\mathbf{K}_{\sigma\varepsilon}][\mathbf{K}_{\varepsilon\mathbf{u}}]\{\phi_{\mathbf{i}}\}\}\xi_{\mathbf{i}}$
  - Модальные силы $\{\mathbf{P}_{\phi}\}_{\mathbf{i}} = \{[\mathbf{K}]\{\phi_{\mathbf{i}}\}\}\xi_{\mathbf{i}}$
  - Модальную энергию деформации $\mathbf{V}_{\mathbf{e}_{\phi\mathbf{i}}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\phi_{\mathbf{e}_{\mathbf{i}}}\right\}^{\mathbf{T}}[\mathbf{K}_{\mathbf{ee}}]\left\{\phi_{\mathbf{e}_{\mathbf{i}}}\right\}\xi_{\mathbf{i}}^{2}$

- Дополнительные модальные характеристики могут быть получены в табличной форме путем задания соответствующих параметров в Case Control Section или в матричной форме путем использования модуля DRMS1 на языке DMAP.

MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Методы вычислений

В MSC.Nastran предусмотрены 3 группы методов вычислений собственных значений:

- <u>Последовательные (tracking) методы</u> (см. Приложение B)

  Собственные значения (или собственные частоты) определяются поочередно методом итераций. Возможен выбор между двумя вариантами метода “inverse power method”: INV и SINV. Эти методы более приемлемы при необходимости определения небольшого количества собственных частот. В целом, метод SINV более надежен, чем метод INV.

- <u>Методы трансформации</u> (см. Приложение B)

  Собственная задача

$$([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}])\{\phi\} = \mathbf{0}$$

преобразуется в форму

$$[\mathbf{A}]\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$$

где

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$$

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Методы вычислений

Затем матрица A трансформируется в тридиагональную форму с использованием метода Гивенса (Givens) или метода Хаусхолдера (Householder). После этого все собственные значения определяются одновременно с помощью алгоритма QR. Предусматривается по два варианта методов Гивенса и Хаусхолдера: GIV, MGIV, HOU и MHOU. Эти методы более эффективны, если необходимо определить большое количество собственных значений.

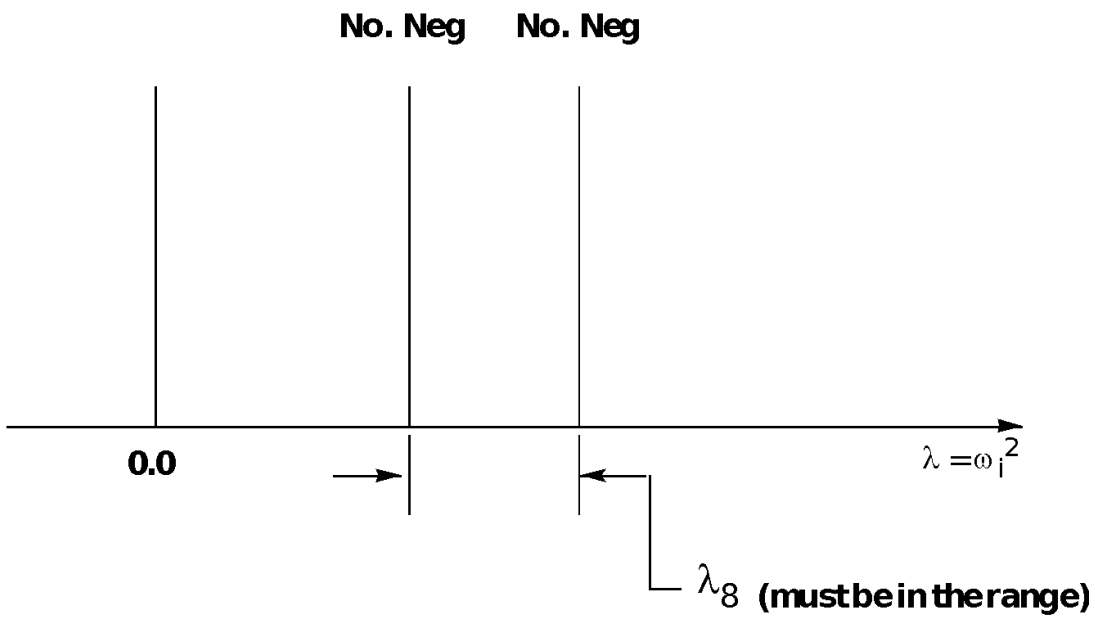
- <u>Метод Ланцоша (рекомендуемый метод)</u>

  Этот метод является комбинированным (tracking-transformation) методом.

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Теория метода Штурма

- Выбирается λ.
- Преобразуется $[K - \lambda_i M]$ в $[L][D][L^T]$
- Количество отрицательных членов на факторной диагонали равно количеству собственных значений с величиной, меньшей λ.



MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Метод Ланцоша

- Метод Ланцоша с использованием блоков, смещений (shifts), инверсий
- Случайные исходные (начальные) векторы
- Автоматическая логика смещений
- Частичная и выборочная ортогонализация
- Применение метода Штурма
- Применение метода Гивенса и алгоритма QL
- Возможность использования для модального анализа и анализа устойчивости
- Нормализация только по массе и наибольшему компоненту
- В отличие от метода GDR (см. Приложение A), нет необходимости в скалярных переменных (точках) типа QSET, ASET и т.п., (если только не выполняется анализ методом модального синтеза)

MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Интерфейс пользователя для метода Ланцоша

EIGRL Real Eigenvalue Extraction Data, Lanczos Method

Defines data needed to perform real eigenvalue (vibration or buckling) analysis with the Lanczos method.

Format:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGRL	SID	V1	V2	ND	MSGLVL	MAXSET	SHFSCL	NORM	

Example:

EIGRL	1	0.1	3.2	10					

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Интерфейс пользователя для других методов

EIGR Real Eigenvalue Extraction Data

Defines data needed to perform real eigenvalue analysis.

Format:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGR	SID	METHOD	F1	F2	NE	ND			
	NORM	G	C						

Example:

EIGR	13	LAN				12			

Field	Contents
SID	Set identification number. (Unique Integer > 0)
METHOD	Method of eigenvalue extraction. (Character)
	Modern Methods:
	LAN Lanczos Method
	AHOU Automatic selection of HOU or MHOU method. See Remark 13.
	Obsolete Methods:
	INV Inverse Power method.
	SINV Inverse Power method with enhancements.
	GIV Givens method of tridiagonalization.
	MGIV Modified Givens method.
	HOU Householder method of tridiagonalization.
	MHOU Modified Householder method.
	AGIV Automatic selection of METHOD = "GIV" or "MGIV". See Remark 13.

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Интерфейс пользователя

Field	Contents
SID	Set identification number. (Unique Integer > 0)
V1, V2	For vibration analysis: frequency range of interest. For buckling analysis: eigenvalue range of interest. See Remark 4. (Real or blank, $-5 \times 10^{16} \le V1 < V2 \le 5. \times 10^{16}$)
ND	Number of roots desired. See Remark 4. (Integer > 0 or blank)
MSGLVL	Diagnostic level. ($0 \le$ Integer ≤ 4; Default = 0)
MAXSET	Number of vectors in block or set. Default is machine dependent. See Remark 14.
SHFSCL	Estimate of the first flexible mode natural frequency. See Remark 10. (Real or blank)
NORM	Method for normalizing eigenvectors (Character: "MASS" or "MAX")
	MASS — Normalize to unit value of the generalized mass. Not available for buckling analysis. (Default for normal modes analysis.)
	MAX — Normalize to unit value of the largest displacement in the analysis set. Displacements not in the analysis set may be larger than unity. (Default for buckling analysis.)

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Управление решением при анализе собственных колебаний

- Executive Control Section
  - SOL 103
- Case Control Section
  - METHOD (инициализация оператора EIGRL)
- Bulk Data Section
  - EIGRL (метод Ланцоша)

MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Виды вычисляемых величин

- Для узлов GRID
  - DISPLACEMENT (или VECTOR)
  - GPFORCE
  - GPSTRESS
  - SPCFORCE
  - GPKE
- Для элементов
  - ELSTRESS (или STRESS)
  - ESE
  - EKE
  - ELFORCE (или FORCE)
  - STRAIN
- Специальный оператор
  - MODES – результаты для каждой моды выводятся как результаты для отдельного “случая” расчета

MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

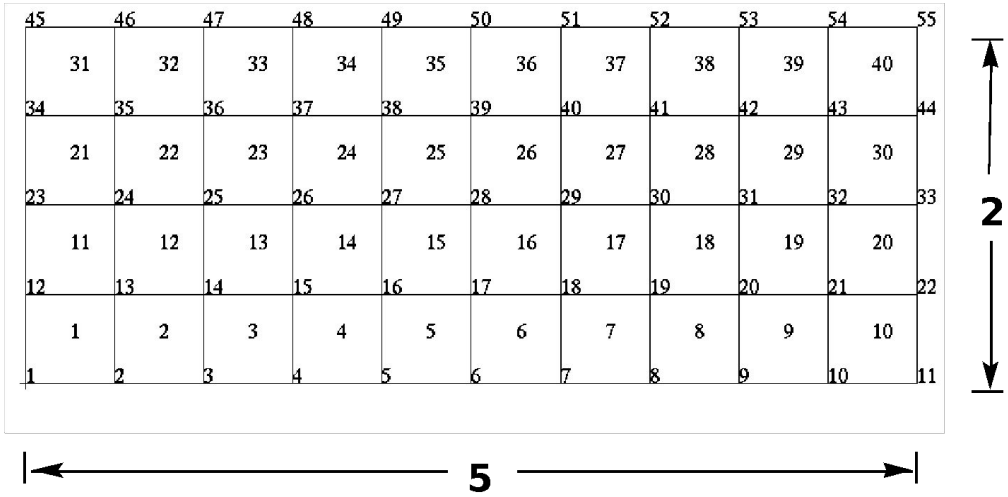
Пример №1

Модальный анализ плоской пластины

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Пример №1. Модальный анализ плоской пластины

- Используя метод Ланцоша, найти первые десять собственных частот и форм колебаний плоской прямоугольной пластины. Ниже представлена конечно-элементная модель прямоугольной пластины, включающая также граничные условия. Таблица 3А содержит необходимые данные для создания входного файла.
- <u>Координаты узлов Grid и топология элементов</u>



MSC Mechanical Solutions
A Division of MSC.Software

Пример №1. Модальный анализ плоской пластины

- **Граничные условия**

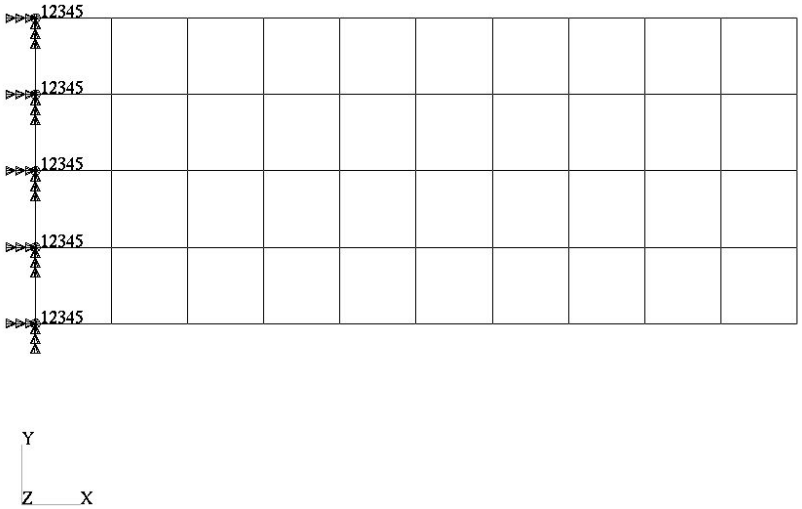


Table 3A.

Length (a)	5 in
Height (b)	2 in
Thickness	0.100 in
Weight Density	0.282 lbs/in3
Mass/Weight Factor	2.59E-3 sec2/in
Elastic Modulus	30.0E6 lbs/in2
Poisson's Ratio	0.3

“Геометрия” пластины

```
$
$       plate.bdf
$
$       geometric input file for plate model
$
PSHELL          1       1       0.1     1               1
CQUAD4          1       1       1       2       13      12
CQUAD4          2       1       2       3       14      13
CQUAD4          3       1       3       4       15      14
CQUAD4          4       1       4       5       16      15
CQUAD4          5       1       5       6       17      16
CQUAD4          6       1       6       7       18      17
CQUAD4          7       1       7       8       19      18
CQUAD4          8       1       8       9       20      19
CQUAD4          9       1       9       10      21      20
CQUAD4          10      1       10      11      22      21
CQUAD4          11      1       12      13      24      23
CQUAD4          12      1       13      14      25      24
CQUAD4          13      1       14      15      26      25
CQUAD4          14      1       15      16      27      26
CQUAD4          15      1       16      17      28      27
CQUAD4          16      1       17      18      29      28
CQUAD4          17      1       18      19      30      29
CQUAD4          18      1       19      20      31      30
CQUAD4          19      1       20      21      32      31
CQUAD4          20      1       21      22      33      32
CQUAD4          21      1       23      24      35      34
CQUAD4          22      1       24      25      36      35
CQUAD4          23      1       25      26      37      36
CQUAD4          24      1       26      27      38      37
CQUAD4          25      1       27      28      39      38
CQUAD4          26      1       28      29      40      39
CQUAD4          27      1       29      30      41      40
CQUAD4          28      1       30      31      42      41
CQUAD4          29      1       31      32      43      42
CQUAD4          30      1       32      33      44      43
CQUAD4          31      1       34      35      46      45
CQUAD4          32      1       35      36      47      46
CQUAD4          33      1       36      37      48      47
CQUAD4          34      1       37      38      49      48
CQUAD4          35      1       38      39      50      49
CQUAD4          36      1       39      40      51      50
CQUAD4          37      1       40      41      52      51
CQUAD4          38      1       41      42      53      52
CQUAD4          39      1       42      43      54      53
CQUAD4          40      1       43      44      55      54
$
MAT1            1       3.+7            0.3     0.282
$
```


MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

“Геометрия” пластины

GRID	1	0.	0.	0.
GRID	2	0.5	0.	0.
GRID	3	1.	0.	0.
GRID	4	1.5	0.	0.
GRID	5	2.	0.	0.
GRID	6	2.5	0.	0.
GRID	7	3.	0.	0.
GRID	8	3.5	0.	0.
GRID	9	4.	0.	0.
GRID	10	4.5	0.	0.
GRID	11	5.	0.	0.
GRID	12	0.	0.5	0.
GRID	13	0.5	0.5	0.
GRID	14	1.	0.5	0.
GRID	15	1.5	0.5	0.
GRID	16	2.	0.5	0.
GRID	17	2.5	0.5	0.
GRID	18	3.	0.5	0.
GRID	19	3.5	0.5	0.
GRID	20	4.	0.5	0.
GRID	21	4.5	0.5	0.
GRID	22	5.	0.5	0.
GRID	23	0.	1.	0.
GRID	24	0.5	1.	0.
GRID	25	1.	1.	0.
GRID	26	1.5	1.	0.
GRID	27	2.	1.	0.
GRID	28	2.5	1.	0.
GRID	29	3.	1.	0.
GRID	30	3.5	1.	0.
GRID	31	4.	1.	0.
GRID	32	4.5	1.	0.
GRID	33	5.	1.	0.
GRID	34	0.	1.5	0.
GRID	35	0.5	1.5	0.
GRID	36	1.	1.5	0.
GRID	37	1.5	1.5	0.
GRID	38	2.	1.5	0.
GRID	39	2.5	1.5	0.
GRID	40	3.	1.5	0.
GRID	41	3.5	1.5	0.
GRID	42	4.	1.5	0.
GRID	43	4.5	1.5	0.
GRID	44	5.	1.5	0.
GRID	45	0.	2.	0.
GRID	46	0.5	2.	0.
GRID	47	1.	2.	0.
GRID	48	1.5	2.	0.
GRID	49	2.	2.	0.

MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

“Геометрия” пластины

```
GRI D     50          2. 5    2.      0.
GRI D     51          3.      2.      0.
GRI D     52          3. 5    2.      0.
GRI D     53          4.      2.      0.
GRI D     54          4. 5    2.      0.
GRI D     55          5.      2.      0.
$
SPC1      1     12345 1       12      23      34      45
```


MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Входной файл для Примера №1

```
SOL     103
TIME    600
CEND
TITLE = NORMAL MODES EXAMPLE
ECHO = UNSORTED
SUBCASE 1
        SUBTITLE= USING LANCZOS
        METHOD = 1
        SPC = 1
        VECTOR=ALL
BEGIN BULK
PARAM COUPMASS 1
PARAM WTMASS .00259
EIGRL 1                         10
PSHELL 1        1       .1      1       1
COUAD4 1        1       1       2       13      12
=,*1,=,*1,*1,*1,*1
=8
COUAD4 11       1       12      13      24      23
=,*1,=,*1,*1,*1,*1
=8
COUAD4 21       1       23      24      35      34
=,*1,=,*1,*1,*1,*1
=8
COUAD4 31       1       34      35      46      45
=,*1,=,*1,*1,*1,*1
=8
MAT1    1       3.+7    .3      .282
GRID    1       0.      0.      0.
=,*1,=,*0.5,==
=9
GRID    12      0.      .5      0.
=,*1,=,*0.5,==
=9
GRID    23      0.      1.      0.
=,*1,=,*0.5,==
=9
GRID    34      0.      1.5     0.
=,*1,=,*0.5,==
=9
GRID    45      0.      2.      0.
=,*1,=,*0.5,==
=9
SPC1    1       12345   1       12      23      34      45
ENDDATA
```


MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Результаты решения Примера №1

```
*** SYSTEM INFORMATION MESSAGE 6916 (DFMSYN)
    DECOMP ORDERING METHOD CHOSEN: DEFAULT, ORDERING METHOD USED: MMD
*** USER INFORMATION MESSAGE 5010 (LNCILD)
    STURM SEQUENCE DATA FOR EIGENVALUE EXTRACTION.
    TRIAL EIGENVALUE = 9.433958D+07, CYCLES = 1.545849D+03 NUMBER OF EIGENVALUES BELOW THIS VALUE =  3
*** USER INFORMATION MESSAGE 5010 (LNCILD)
    STURM SEQUENCE DATA FOR EIGENVALUE EXTRACTION.
    TRIAL EIGENVALUE = 1.912348D+09, CYCLES = 6.959910D+03 NUMBER OF EIGENVALUES BELOW THIS VALUE = 10
TABLE OF SHIFTS:  (LNNRIGL)
SHIFT #        SHIFT VALUE         FREQUENCY, CYCLES     # EIGENVALUES BELOW    # NEW EIGENVALUES FOUND
     1.        9.4339576E+07          1.5458490E+03                3                      10
     2.               1.9123482E+09          6.9599097E+03                10                      0
1    NORMAL MODES EXAMPLE                                   APRIL 8, 1998  MSC.Nastran  4/6/98   PAGE 6

0                                                                                        SUBCASE 1
0
                E I G E N V A L U E  A N A L Y S I S   S U M M A R Y   (READ MODULE)
                              BLOCK SIZE USED ......................    7
                              NUMBER OF DECOMPOSITIONS .............    2
                              NUMBER OF ROOTS FOUND ................    10
                              NUMBER OF SOLVES REQUIRED ............    7
1    NORMAL MODES EXAMPLE                                   APRIL 8, 1998  MSC.Nastran  4/6/98   PAGE 7

0                                                                                        SUBCASE 1

                                     R E A L   E I G E N V A L U E S
MODE    EXTRACTION     EIGENVALUE         RADIANS          CYCLES        GENERALIZED      GENERALIZED
 NO.      ORDER                                                             MASS            STIFFNESS
  1           1       7.056994E+05     8.400591E+02     1.336996E+02     1.000000E+00     7.056994E+05
  2           2       1.878432E+07     4.334088E+03     6.897916E+02     1.000000E+00     1.878432E+07
  3           3       2.811467E+07     5.302327E+03     8.438915E+02     1.000000E+00     2.811467E+07
  4           4       1.931709E+08     1.389859E+04     2.212030E+03     1.000000E+00     1.931709E+08
  5           5       2.234434E+08     1.494802E+04     2.379052E+03     1.000000E+00     2.234434E+08
  6           6       2.328801E+08     1.526041E+04     2.428770E+03     1.000000E+00     2.328801E+08
  7           7       6.845924E+08     2.616472E+04     4.164244E+03     1.000000E+00     6.845924E+08
  8           8       9.602215E+08     3.098744E+04     4.931804E+03     1.000000E+00     9.602215E+08
  9           9       1.365611E+09     3.695418E+04     5.881439E+03     1.000000E+00     1.365611E+09
 10          10       1.855386E+09     4.307420E+04     6.855471E+03     1.000000E+00    1.855386E+09
```


MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software

Результаты решения Примера №1

```
1    NORMAL MODES EXAMPLE                          APRIL 8, 1998  MSC.Nastran  4/6/98   PAGE    8
0                                                                                   SUBCASE 1
1    NORMAL MODES EXAMPLE                          APRIL 8, 1998  MSC.Nastran  4/6/98   PAGE    9
      USING LANCZOS
0                                                                                   SUBCASE 1
      EIGENVALUE =  7.056994E+05
          CYCLES =  1.336996E+02      R E A L   E I G E N V E C T O R   N O .         1

      POINT ID.  TYPE         T1             T2             T3             R1             R2        R3
            1     G        .0             .0             .0             .0             .0        .0
            2     G     -3.515604E-14  -2.083550E-14  -9.748799E-01  -1.090191E+00   4.011783E+00  .0
            3     G     -5.976152E-14  -6.029845E-14  -4.170314E+00  -1.593278E+00   8.679599E+00  .0

            4     G     -6.872012E-14  -1.060940E-13  -9.445755E+00  -1.531076E+00   1.230244E+01  .0
            5     G     -6.341396E-14  -1.494814E-13  -1.636251E+01  -1.362968E+00   1.522316E+01  .0
                                                        .
                                                        .
                                                        .
            54    G     -2.994638E-14  -1.751692E-13  -6.384793E+01   2.199729E-01   2.066229E+01  .0
            55    G     -2.713030E-14  -1.739597E-13  -7.419337E+01   1.691507E-01   2.070036E+01  .0
                                                        .
                                                        .
                                                        .
                                                        .
                                                        .
                                                        .
      EIGENVALUE =  1.878432E+07
          CYCLES =  6.897916E+02      R E A L   E I G E N V E C T O R   N O .         2

      POINT ID.   TYPE        T1             T2             T3             R1             R2        R3

          1      G      .0             .0             .0             .0             .0        .0
          2      G     2.689105E-14   2.049585E-14  -6.305859E+00   5.289161E+00   2.135918E+01  .0
          3      G     4.441315E-14   5.120965E-14  -1.933128E+01   1.932312E+01   2.758354E+01   0
          4      G     5.540902E-14   8.667080E-14  -3.398484E+01   3.400354E+01   2.819633E+01  .0
          5      G     6.112096E-14   1.273261E-13  -4.831832E+01   4.840071E+01   2.654789E+01  .0
          6      G     6.240562E-14   1.721406E-13  -6.144451E+01   6.153912E+01   2.363943E+01  .0
          7      G     5.830800E-14   2.121037E-13  -7.283444E+01   7.294494E+01   1.992698E+01  .0
                                                      .
                                                      .
                                                      .
          53      G   -8.359115E-14   2.867785E-13   8.914771E+01   8.923321E+01  -1.121007E+01  .0
          54      G   -8.422337E-14   3.180499E-13   9.390352E+01   9.367941E+01  -7.136850E+00  .0
          55      G   -8.453551E-14   3.525693E-13   9.704356E+01   9.580685E+01  -5.385391E+00  .0
```


MSC MECHANICAL SOLUTIONS
A Division of MSC.Software