

Раздел 3

Анализ собственных колебаний

Раздел 3. Анализ собственных колебаний

• НЕОБХОДИМОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ...	3 - 3
• ОБЗОР ТЕОРИИ.....	3 - 4
• ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ.....	3 - 8
• ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ.....	3 - 12
• МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ.....	3 - 14
• ТЕОРИЯ МЕТОДА Штурма.....	3 - 16
• МЕТОД Ланцоша.....	3 - 17
• ИНТЕРФЕЙС ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ МЕТОДА Ланцоша.....	3 - 18
• ИНТЕРФЕЙС ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ ДРУГИХ МЕТОДОВ.....	3 - 19
• УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЕМ ПРИ АНАЛИЗЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ.....	3 - 21
• ВИДЫ ВЫЧИСЛЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН.....	3 - 22
• ПРИМЕР №1 – МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ.....	3 - 23
• “ГЕОМЕТРИЯ” ПЛАСТИНЫ.....	3 - 26
• ВХОДНОЙ ФАЙЛ ДЛЯ ПРИМЕРА №1.....	3 - 29
• РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ПРИМЕРА №1.....	3 - 30

Необходимость выполнения анализа собственных колебаний

- Исследование динамических характеристик конструкции. Например, если ротационную машину предполагается установить на некоторое основание, то для исключения чрезмерных вибраций необходимо убедиться, что частота вращения ротора достаточно “далека” от частоты собственных колебаний основания.
- Исследование возможного увеличения нагрузок вследствие динамических эффектов.
- Использование информации о характеристиках собственных колебаний для планирования последующего динамического анализа (переходного процесса, частотного отклика): что необходимо предпринять, чтобы расчетная модель соответствовала требованиям, предъявляемым к вычислениям.
- Использование информации о характеристиках собственных колебаний для планирования последующего динамического анализа модальным методом.
- Планирование экспериментального исследования конструкции: выбор мест расположения датчиков ускорений и т.п.
- Оценивание конструктивных изменений.

Обзор теории

- Рассмотрим

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \mathbf{0} \quad (1)$$

- Представим решение в форме

$$\{\mathbf{x}\} = \{\phi\} e^{i\omega t} \quad (2)$$

- (Физически это означает, что все координаты изменяются синхронно – форма деформаций системы остается постоянной, меняется только ее амплитуда.)

- Из уравнения (2):

$$\{\ddot{\mathbf{x}}\} = -\omega^2 \{\phi\} e^{i\omega t} \quad (3)$$

- Подставляя уравнения (2) и (3) в уравнение (1), имеем

$$-\omega^2 [\mathbf{M}]\{\phi\} e^{i\omega t} + [\mathbf{K}]\{\phi\} e^{i\omega t} = \mathbf{0}$$

- что (после деления на $e^{i\omega t}$) упрощается к виду

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\phi\} = \mathbf{0}$$

- Это – формулировка задачи о собственных значениях.

Обзор теории

- Возможны два варианта:

1. Если $\det(\mathbf{K} - \omega^2[\mathbf{M}]) \neq 0$, то из уравнения (4):

$$\{\phi\} = 0$$

- Что является тривиальным решением и с физической точки зрения не представляет интереса.

2. В противном случае $\det(\mathbf{K} - \omega^2[\mathbf{M}]) = 0$, что приводит к нетривиальному решению в отношении $\{\phi\}$

- Т.о., задача о собственных значениях упрощается до задачи решения уравнения:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2[\mathbf{M}]) = 0$$

- или

$$\det(\mathbf{K} - \lambda[\mathbf{M}]) = 0$$

- где

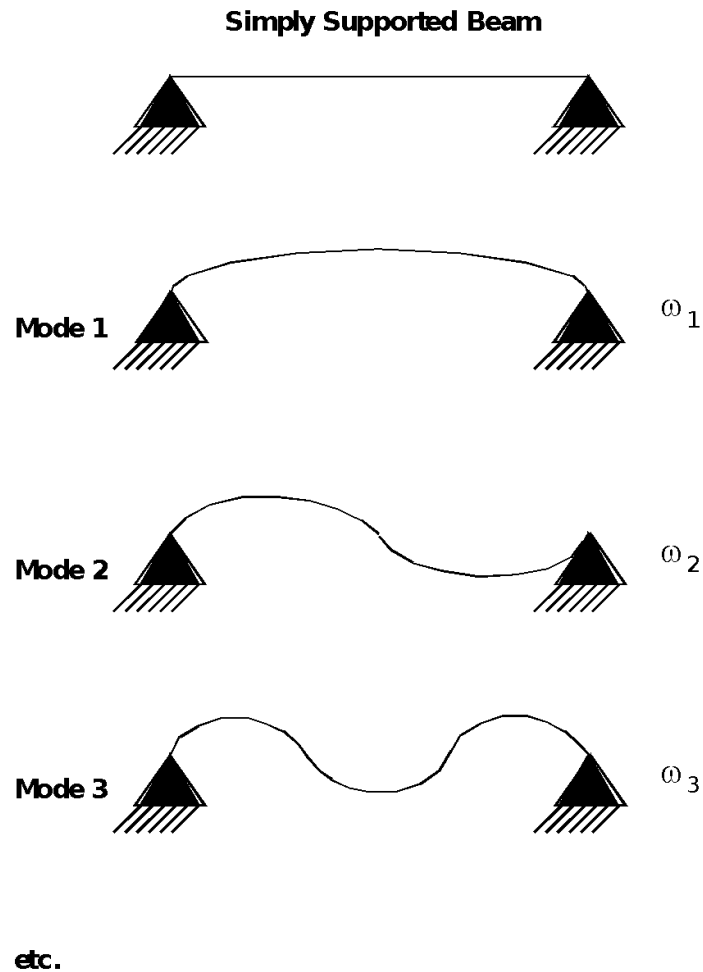
$$\lambda = \omega^2$$

Обзор теории

- Если конструкция имеет N степеней свободы с “присоединенными” массами, тогда будет N ω 's которые являются решениями собственной задачи.. Эти ω 's ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$) – частоты собственных колебаний, характеристические частоты, фундаментальные частоты или резонансные частоты.
- Собственный вектор $\{\phi\}_j$, ассоциирующийся с частотой $\{\omega\}_j$, называется нормальной модой или модальной формой (формой собственных колебаний). Нормальная мода соответствует некоторой форме деформаций конструкции.
- При колебаниях форма конструкции в любой момент времени является линейной комбинацией её нормальных мод.

Обзор теории

- Пример



Основные свойства собственных колебаний

- Если $[K]$ и $[M]$ симметричные и действительные (что характерно для конечно-элементных моделей обычных конструкций), справедливы следующие условия ортогональности:

$$\{\phi_i\}^T [M] \phi_j = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

- и

$$\{\phi_i\}^T [K] \phi_j = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

- а также

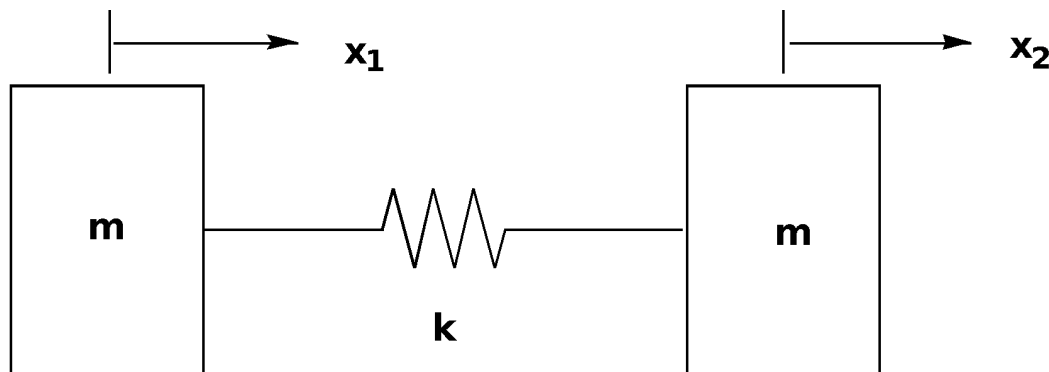
$$\omega_j^2 = \frac{\{\phi_j\}^T [K] \phi_j}{\{\phi_j\}^T [M] \phi_j}$$

- Собственные частоты ($\omega_1, \omega_2, \dots$) измеряются в рад/с. Для этого можно использовать также Гц (колебание/с), причем

$$f_j (\text{hertz}) = \frac{\omega_j (\text{radian/second})}{2\pi}$$

Основные свойства собственных колебаний

- Пример: незакрепленная структура имеет форму колебаний жесткого тела.

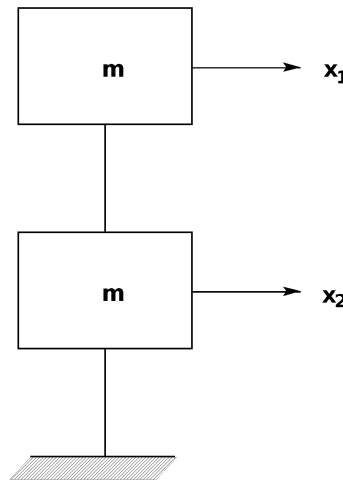


- Если конструкция не полностью закреплена, т.е. существует мода колебаний жесткого тела (*бездеформационная мода, ненапряженная мода*) или механизм, то по крайней мере одна собственная частота будет равна нулю.

$$\omega_{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \quad \{\phi_{\mathbf{1}}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

Основные свойства собственных колебаний

- **Формы собственных колебаний произвольно масштабируются. Например,**



- $$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 300 \\ 150 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0.66 \\ 0.33 \end{Bmatrix}$$
- **являются одними и теми же модами колебаний.**

Основные свойства собственных колебаний

- На практике формы колебаний нормализуются с помощью выбранного метода. В MSC.Nastran предусмотрены три метода нормализации (исключая метод Ланцоша):
 - Единичная обобщенная масса (по умолчанию)

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = \mathbf{10}$$

- Единичное значение наибольшего для каждой моды компонента набора A-set
 - Единичное значение для указанного компонента (не рекомендуется)
- При использовании метода Ланцоша возможна нормализация по методу единичной обобщенной массы и методу единичного наибольшего компонента.

Дополнительные свойства форм собственных колебаний

- Поскольку деформации элементов, внутренние силы и напряжения в них зависят от величины деформации конструкции, могут быть вычислены дополнительные полезные модальные характеристики. *Учитывая*

- Соотношение перемещение – деформация

$$\{\varepsilon\} = [K_{\varepsilon u}]\{u\}$$

- Соотношение деформация - напряжение

$$\{\sigma\} = [K_{\sigma \varepsilon}]\{\varepsilon\}$$

- Соотношение перемещение - сила

$$\{P_{st}\} = [K]\{u\}$$

- Соотношение перемещения – энергия деформации

$$V_e = 1/2\{u_e\}^T [K_{ee}]\{u_e\}$$

Дополнительные свойства форм собственных колебаний

- Для выбранного модального перемещения

$$\{\mathbf{u}\} = [\phi_i] \xi_i$$

- имеем

- Модальные деформации $\{\varepsilon_\phi\}_i = \{[\mathbf{K}_{\varepsilon u}]\{\phi_i\}\} \xi_i$

- Модальные напряжения $\{\sigma_\phi\}_i = \{[\mathbf{K}_{\sigma\varepsilon}][\mathbf{K}_{\varepsilon u}]\{\phi_i\}\} \xi_i$

- Модальные силы $\{\mathbf{P}_\phi\}_i = \{[\mathbf{K}]\{\phi_i\}\} \xi_i$

- Модальную энергию деформации $V_{e_{\phi i}} = \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \phi_{e_i} \right\}^T [\mathbf{K}_{ee}] \left\{ \phi_{e_i} \right\} \xi_i^2$

- Дополнительные модальные характеристики могут быть получены в табличной форме путем задания соответствующих параметров в Case Control Section или в матричной форме путем использования модуля DRMS1 на языке DMAP.

Методы вычислений

В MSC.Nastran предусмотрены 3 группы методов вычислений собственных значений:

- Последовательные (tracking) методы (см. Приложение В)

Собственные значения (или собственные частоты) определяются поочередно методом итераций. Возможен выбор между двумя вариантами метода “inverse power method”: INV и SINV. Эти методы более приемлемы при необходимости определения небольшого количества собственных частот. В целом, метод SINV более надежен, чем метод INV.

- Методы трансформации (см. Приложение В)

Собственная задача

$$([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}])\{\phi\} = \mathbf{0}$$
 преобразуется в форму

где
$$[\mathbf{A}]\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$$

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$$

Методы вычислений

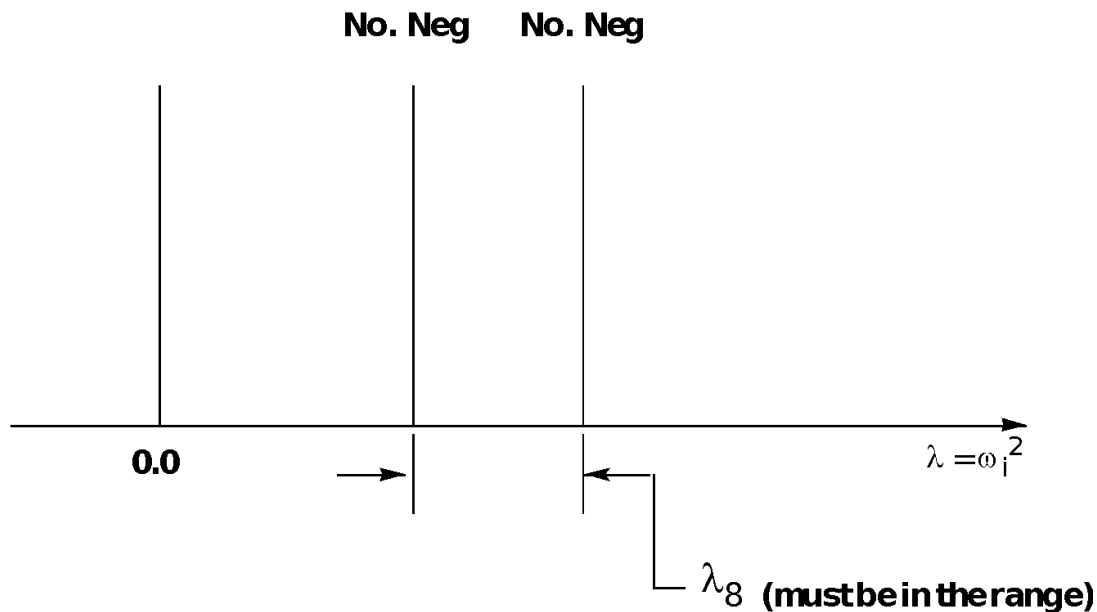
Затем матрица A трансформируется в тридиагональную форму с использованием метода Гивенса (Givens) или метода Хаусхолдера (Householder). После этого все собственные значения определяются одновременно с помощью алгоритма QR. Предусматривается по два варианта методов Гивенса и Хаусхолдера: GIV, MGIV, HOU и MHOU. Эти методы более эффективны, если необходимо определить большое количество собственных значений.

- Метод Ланцоша (рекомендуемый метод)

Этот метод является комбинированным (tracking-transformation) методом.

Теория метода Штурма

- Выбирается λ .
- Преобразуется $[\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}]$ в $[\mathbf{L}][\mathbf{D}][-\mathbf{L}^T]$
- Количество отрицательных членов на факторной диагонали равно количеству собственных значений с величиной, меньшей λ .



Метод Ланцоша

- Метод Ланцоша с использованием блоков, смещений (shifts), инверсий
- Случайные исходные (начальные) векторы
- Автоматическая логика смещений
- Частичная и выборочная ортогонализация
- Применение метода Штурма
- Применение метода Гивенса и алгоритма QL
- Возможность использования для модального анализа и анализа устойчивости
- Нормализация только по массе и наибольшему компоненту
- В отличие от метода GDR (см. Приложение А), нет необходимости в скалярных переменных (точках) типа QSET, ASET и т.п., (если только не выполняется анализ методом модального синтеза)

Интерфейс пользователя для метода Ланцоша

EIGRL Real Eigenvalue Extraction Data, Lanczos Method

Defines data needed to perform real eigenvalue (vibration or buckling) analysis with the Lanczos method.

Format:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGRL	SID	V1	V2	ND	MSGVLV	MAXSET	SHFSCV	NORM	

Example:

EIGRL	1	0.1	3.2	10					
-------	---	-----	-----	----	--	--	--	--	--

Интерфейс пользователя для других методов

EIGR Real Eigenvalue Extraction Data

Defines data needed to perform real eigenvalue analysis.

Format:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGR	SID	METHOD	F1	F2	NE	ND				
	NORM	G	C							

Example:

EIGR	13	LAN				12				
------	----	-----	--	--	--	----	--	--	--	--

Field	Contents
SID	Set identification number. (Unique Integer > 0)
METHOD	Method of eigenvalue extraction. (Character) Modern Methods: LAN Lanczos Method AHOU Automatic selection of HOU or MHOU method. See Remark 13. Obsolete Methods: INV Inverse Power method. SINV Inverse Power method with enhancements. GIV Givens method of tridiagonalization. MGIV Modified Givens method. HOU Householder method of tridiagonalization. MHOU Modified Householder method. AGIV Automatic selection of METHOD = "GIV" or "MGIV". See Remark 13.

Интерфейс пользователя

Field	Contents
SID	Set identification number. (Unique Integer > 0)
V1, V2	For vibration analysis: frequency range of interest. For buckling analysis: eigenvalue range of interest. See Remark 4. (Real or blank, $-5 \times 10^{16} \leq V1 < V2 \leq 5. \times 10^{16}$)
ND	Number of roots desired. See Remark 4. (Integer > 0 or blank)
MSGVLVL	Diagnostic level. ($0 \leq$ Integer ≤ 4 ; Default = 0)
MAXSET	Number of vectors in block or set. Default is machine dependent. See Remark 14.
SHFSCL	Estimate of the first flexible mode natural frequency. See Remark 10. (Real or blank)
NORM	Method for normalizing eigenvectors (Character: "MASS" or "MAX")
MASS	Normalize to unit value of the generalized mass. Not available for buckling analysis. (Default for normal modes analysis.)
MAX	Normalize to unit value of the largest displacement in the analysis set. Displacements not in the analysis set may be larger than unity. (Default for buckling analysis.)

Управление решением при анализе собственных колебаний

- **Executive Control Section**
 - SOL 103
- **Case Control Section**
 - METHOD (инициализация оператора EIGRL)
- **Bulk Data Section**
 - EIGRL (метод Ланцоша)

Виды вычисляемых величин

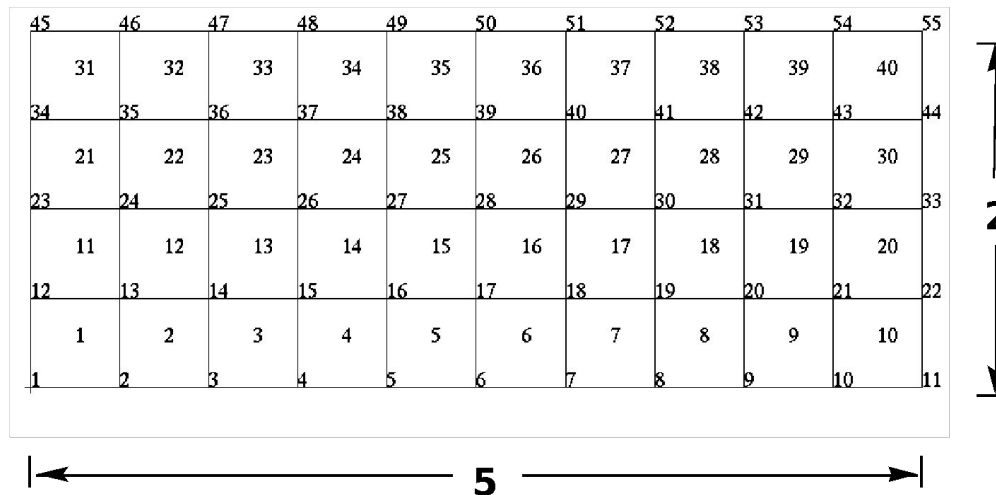
- Для узлов GRID
 - DISPLACEMENT (или VECTOR)
 - GPFORCE
 - GPSTRESS
 - SPCFORCE
 - GPKE
- Для элементов
 - ELSTRESS (или STRESS)
 - ESE
 - EKE
 - ELFORCE (или FORCE)
 - STRAIN
- Специальный оператор
 - MODES – результаты для каждой моды выводятся как результаты для отдельного “случая” расчета

Пример №1

Модальный анализ плоской пластины

Пример №1. Модальный анализ плоской пластины

- Используя метод Ланцоша, найти первые десять собственных частот и форм колебаний плоской прямоугольной пластины. Ниже представлена конечно-элементная модель прямоугольной пластины, включающая также граничные условия. Таблица 3А содержит необходимые данные для создания входного файла.
- Координаты узлов Grid и топология элементов



Пример №1. Модальный анализ плоской пластины

● Граничные условия

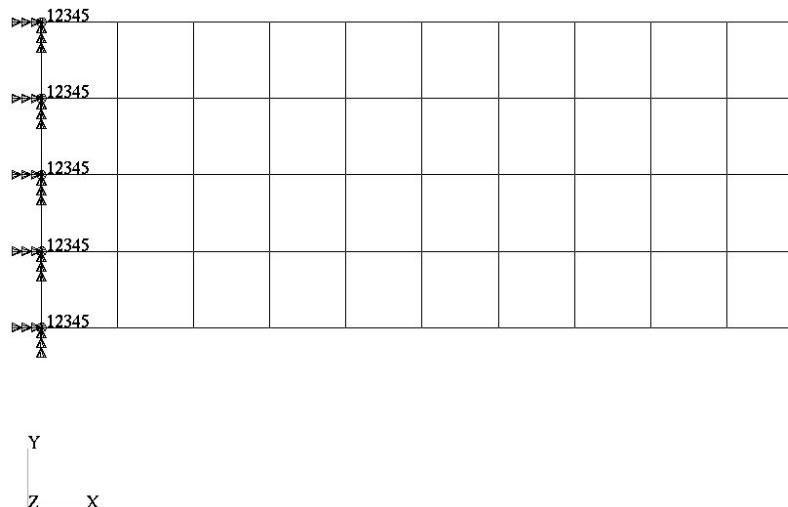


Table 3A.

Length (a)	5 in
Height (b)	2 in
Thickness	0.100 in
Weight Density	0.282 lbs/in ³
Mass/Weight Factor	2.59E-3 sec ² /in
Elastic Modulus	30.0E6 lbs/in ²
Poisson's Ratio	0.3

“Геометрия” пластины

```
$
$   plate.bdf
$
$   geometric input file for plate model
$
PSHELL      1      1      0.1      1      1
CQUAD4      1      1      1      2      13      12
CQUAD4      2      1      2      3      14      13
CQUAD4      3      1      3      4      15      14
CQUAD4      4      1      4      5      16      15
CQUAD4      5      1      5      6      17      16
CQUAD4      6      1      6      7      18      17
CQUAD4      7      1      7      8      19      18
CQUAD4      8      1      8      9      20      19
CQUAD4      9      1      9      10     21      20
CQUAD4     10      1      10     11     22      21
CQUAD4     11      1      12     13     24      23
CQUAD4     12      1      13     14     25      24
CQUAD4     13      1      14     15     26      25
CQUAD4     14      1      15     16     27      26
CQUAD4     15      1      16     17     28      27
CQUAD4     16      1      17     18     29      28
CQUAD4     17      1      18     19     30      29
CQUAD4     18      1      19     20     31      30
CQUAD4     19      1      20     21     32      31
CQUAD4     20      1      21     22     33      32
CQUAD4     21      1      23     24     35      34
CQUAD4     22      1      24     25     36      35
CQUAD4     23      1      25     26     37      36
CQUAD4     24      1      26     27     38      37
CQUAD4     25      1      27     28     39      38
CQUAD4     26      1      28     29     40      39
CQUAD4     27      1      29     30     41      40
CQUAD4     28      1      30     31     42      41
CQUAD4     29      1      31     32     43      42
CQUAD4     30      1      32     33     44      43
CQUAD4     31      1      34     35     46      45
CQUAD4     32      1      35     36     47      46
CQUAD4     33      1      36     37     48      47
CQUAD4     34      1      37     38     49      48
CQUAD4     35      1      38     39     50      49
CQUAD4     36      1      39     40     51      50
CQUAD4     37      1      40     41     52      51
CQUAD4     38      1      41     42     53      52
CQUAD4     39      1      42     43     54      53
CQUAD4     40      1      43     44     55      54
$
$   MAT1      1      3. +7      0. 3      0. 282
$
```

“Геометрия” пластины

GRI D	1	0.	0.	0.
GRI D	2	0.5	0.	0.
GRI D	3	1.	0.	0.
GRI D	4	1.5	0.	0.
GRI D	5	2.	0.	0.
GRI D	6	2.5	0.	0.
GRI D	7	3.	0.	0.
GRI D	8	3.5	0.	0.
GRI D	9	4.	0.	0.
GRI D	10	4.5	0.	0.
GRI D	11	5.	0.	0.
GRI D	12	0.	0.5	0.
GRI D	13	0.5	0.5	0.
GRI D	14	1.	0.5	0.
GRI D	15	1.5	0.5	0.
GRI D	16	2.	0.5	0.
GRI D	17	2.5	0.5	0.
GRI D	18	3.	0.5	0.
GRI D	19	3.5	0.5	0.
GRI D	20	4.	0.5	0.
GRI D	21	4.5	0.5	0.
GRI D	22	5.	0.5	0.
GRI D	23	0.	1.	0.
GRI D	24	0.5	1.	0.
GRI D	25	1.	1.	0.
GRI D	26	1.5	1.	0.
GRI D	27	2.	1.	0.
GRI D	28	2.5	1.	0.
GRI D	29	3.	1.	0.
GRI D	30	3.5	1.	0.
GRI D	31	4.	1.	0.
GRI D	32	4.5	1.	0.
GRI D	33	5.	1.	0.
GRI D	34	0.	1.5	0.
GRI D	35	0.5	1.5	0.
GRI D	36	1.	1.5	0.
GRI D	37	1.5	1.5	0.
GRI D	38	2.	1.5	0.
GRI D	39	2.5	1.5	0.
GRI D	40	3.	1.5	0.
GRI D	41	3.5	1.5	0.
GRI D	42	4.	1.5	0.
GRI D	43	4.5	1.5	0.
GRI D	44	5.	1.5	0.
GRI D	45	0.	2.	0.
GRI D	46	0.5	2.	0.
GRI D	47	1.	2.	0.
GRI D	48	1.5	2.	0.
GRI D	49	2.	2.	0.

NAS102

Декабрь 2001, Стр. 3-27

MSC Moscow

“Геометрия” пластины

GRI D	50		2.5	2.	0.		
GRI D	51		3.	2.	0.		
GRI D	52		3.5	2.	0.		
GRI D	53		4.	2.	0.		
GRI D	54		4.5	2.	0.		
GRI D	55		5.	2.	0.		
\$							
SPC1	1	12345	1	12	23	34	45

Входной файл для Примера №1

```
SOL 103
TIME 600
CEND
TITLE = NORMAL MODES EXAMPLE
ECHO = UNSORTED
SUBCASE 1
  SUBTITLE= USING LANCZOS
  METHOD = 1
  SPC = 1
  VECTOR=ALL
BEGIN BULK
PARAM COUPMASS 1
PARAM WTMASS .00259
EI GRL 1 10
PSHELL 1 1 .1 1 1
COUAD4 1 1 1 2 13 12
=> *1, => *1, *1, *1, *1
=>8
COUAD4 11 1 12 13 24 23
=> *1, => *1, *1, *1, *1
=>8
COUAD4 21 1 23 24 35 34
=> *1, => *1, *1, *1, *1
=>8
```

```
COUAD4 31 1 34 35 46 45
=> *1, => *1, *1, *1, *1
=>8
MAT1 1 3. +7 .3 .282
GRID 1 0. 0. 0.
=> *1, => *0.5, ==
=>9
GRID 12 0. .5 0.
=> *1, => *0.5, ==
=>9
GRID 23 0. 1. 0.
=> *1, => *0.5, ==
=>9
GRID 34 0. 1.5 0.
=> *1, => *0.5, ==
=>9
GRID 45 0. 2. 0.
=> *1, => *0.5, ==
=>9
SPC1 1 12345 1 12 23 34 45
ENDDATA
```

Результаты решения Примера №1

```

*** SYSTEM INFORMATION MESSAGE 6916 (DFMSYN)
    DECOMP ORDERING METHOD CHOSEN: DEFAULT, ORDERING METHOD USED: MMD
*** USER INFORMATION MESSAGE 5010 (LNCILD)
    STURM SEQUENCE DATA FOR EIGENVALUE EXTRACTION.
    TRIAL EIGENVALUE = 9.433958D+07, CYCLES = 1.545849D+03 NUMBER OF EIGENVALUES BELOW THIS VALUE = 3
*** USER INFORMATION MESSAGE 5010 (LNCILD)
    STURM SEQUENCE DATA FOR EIGENVALUE EXTRACTION.
    TRIAL EIGENVALUE = 1.912348D+09, CYCLES = 6.959910D+03 NUMBER OF EIGENVALUES BELOW THIS VALUE = 10
TABLE OF SHIFTS: (LNNRIGL)
SHIFT #          SHIFT VALUE          FREQUENCY, CYCLES      # EIGENVALUES BELOW    # NEW EIGENVALUES FOUND
  1.             9.4339576E+07          1.5458490E+03          3                       10
  2.             1.9123482E+09          6.9599097E+03          10                      0
1  NORMAL MODES EXAMPLE                                APRIL 8, 1998  MSC.Nastran  4/6/98  PAGE 6

0
0
                                SUBCASE 1

      E I G E N V A L U E  A N A L Y S I S  S U M M A R Y  (READ MODULE)
                                BLOCK SIZE USED ..... 7
                                NUMBER OF DECOMPOSITIONS ..... 2
                                NUMBER OF ROOTS FOUND ..... 10
                                NUMBER OF SOLVES REQUIRED ..... 7
1  NORMAL MODES EXAMPLE                                APRIL 8, 1998  MSC.Nastran  4/6/98  PAGE 7

0
                                SUBCASE 1

MODE NO.          EXTRACTION ORDER          EIGENVALUE          REAL EIGENVALUES
                                RADIANS          CYCLES          GENERALIZED          GENERALIZED
                                MASS          STIFFNESS
  1             1             7.056994E+05          8.400591E+02          1.336996E+02          1.000000E+00          7.056994E+05
  2             2             1.878432E+07          4.334088E+03          6.897916E+02          1.000000E+00          1.878432E+07
  3             3             2.811467E+07          5.302327E+03          8.438915E+02          1.000000E+00          2.811467E+07
  4             4             1.931709E+08          1.389859E+04          2.212030E+03          1.000000E+00          1.931709E+08
  5             5             2.234434E+08          1.494802E+04          2.379052E+03          1.000000E+00          2.234434E+08
  6             6             2.328801E+08          1.526041E+04          2.428770E+03          1.000000E+00          2.328801E+08
  7             7             6.845924E+08          2.616472E+04          4.164244E+03          1.000000E+00          6.845924E+08
  8             8             9.602215E+08          3.098744E+04          4.931804E+03          1.000000E+00          9.602215E+08
  9             9             1.365611E+09          3.695418E+04          5.881439E+03          1.000000E+00          1.365611E+09
 10            10            1.855386E+09          4.307420E+04          6.855471E+03          1.000000E+00          1.855386E+09

```


NAS102

Декабрь 2001, Стр. 3-32
MSC Moscow

