Нелинейное программирование

Геометрический способ решения ЗНЛП

Метод неопределенных множителей Лагранжа

Нелинейное программирование

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min)$$
$$g_i(x_1,\dots,x_n) \le b_i \quad (i=\overline{1,m})$$

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min)$$
$$g_i(x_1,\dots,x_n) = b_i \quad (i=\overline{1,m})$$

- задача классической оптимизации

Отличия от ЗЛП:

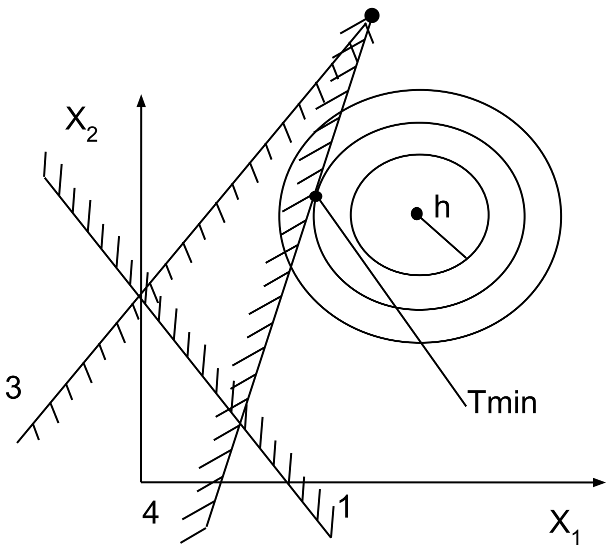
1. ОДЗ не обязательно выпуклая.
2. Экстремум не обязан находится на границе ОДЗ.

Пример:

$$F(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \to \min,\max$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \ge 7 \\ 10x_1-x_2 \le 8 \\ -18x_1+4x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=h$$

$$2(x_1-3)+2(x_2-4)x_2'=0$$

$$x_2'=\frac{-2(x_1-3)}{2(x_2-4)}=\frac{x_1-3}{4-x_2}$$

$$x_1^*=\frac{123}{101};\ x_2^*=\frac{422}{101}$$

$$f(\min)=\frac{324}{101}$$

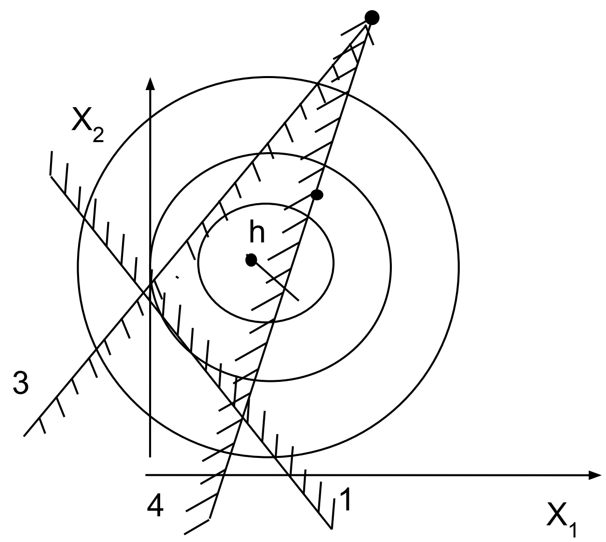
$$\begin{cases} x_1-3=10(4-x_2) \\ 10x_1-x_2=8 \end{cases}$$

$$x^{**}{}_1=2,\ x^{**}{}_2=12,$$

$$f(\max)=65$$

Пример:

$$F(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min, \max$$



Метод неопределенных множителей Лагранжа

Данным методом решаются задачи нелинейного программирования с условным экстремумом:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max$$

$$g_i(x_1,\ldots,x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

$$F = f(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1,\ldots,x_n)]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} = 0 \ (j = \overline{1,n}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = b_i - g_i(x_1,\ldots,x_n) = 0 \ (i = \overline{1,m}) \end{cases}$$

Задача

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Они могут быть изготовлены двумя способами.

При производстве x_1 штук первым способом затраты на них $4x_1 + x_1^2$ рублей.

При производстве x_2 штук вторым способом затраты на них $8x_2 + x_2^2$ рублей.

Определить: сколько изделий каждым способом нужно изготовить, чтобы затраты на производство были минимальными.

$$F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 = 180$$

$$F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 - \lambda_1(180 - x_1 - x_2) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4x + 2x_1 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -180 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^* = 91, \quad x_2^* = 89$$

$F = 17278$ – затраты.