算法设计与分析

山东师范大学计算机系
授课:徐连诚，软件工程研究所(3432)
2005年9月5日—2006年1月20日

主页:**http://lchxu.welkind.net/** 邮箱:**lchxu@163.com**
镜像:**http://lchxu1.welkind.net/**(迅腾) **http://lchxu2.welkind.net/**(网易)

第2章 递归与分治策略

- 本章主要知识点：
  - 2.1 递归的概念
  - 2.2 分治法的基本思想
  - 2.3 二分搜索技术
  - 2.4 大整数的乘法
  - 2.5 Strassen矩阵乘法
  - 2.6 棋盘覆盖
  - 2.7 合并排序
  - 2.8 快速排序
  - 2.9 线性时间选择
  - 2.10 最接近点对问题
  - 2.11 循环赛日程表
- 计划授课时间：6～8课时

2.1 递归的概念

- 直接或间接地调用自身的算法称为**递归算法**。用函数自身给出定义的函数称为**递归函数**。
- 在计算机算法设计与分析中，使用递归技术往往使函数的定义和算法的描述简洁且易于理解。
- 下面来看几个实例。

2.1 递归的概念

- 例1 阶乘函数
- 可递归地定义为：

$$n!=\begin{cases}1 & n=0\\ n(n-1)! & n>0\end{cases}$$

- 其中：
  - $n=0$时，$n!=1$为边界条件
  - $n>0$时，$n!=n(n-1)!$为递归方程
- 边界条件与递归方程是递归函数的二个要素，递归函数只有具备了这两个要素，才能在有限次计算后得出结果。

2.1 递归的概念

- 例2 Fibonacci数列
- 无穷数列
  1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…，被称为Fibonacci数列。它可以递归地定义为：
- 第n个Fibonacci数可递归地计算如下：

$$F(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 1 & n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & n>1\end{cases}$$

小兔子问题

```
public static int fibonacci(int n)
  {
    if (n <= 1) return 1;
    return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);
  }
```

2.1 递归的概念

- 例3 Ackerman函数
- 当一个函数及它的一个变量是由函数自身定义时，称这个函数是双递归函数。Ackerman函数A(n, m)定义如下：
- 前2例中的函数都可以找到相应的非递归方式定义。
- 但本例中的Ackerman函数却无法找到非递归的定义。

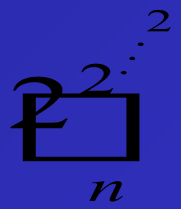
$$\begin{cases} A(1,0)=2 & \\ A(0,m)=1 & m\geq 0 \\ A(n,0)=n+2 & n\geq 2 \\ A(n,m)=A(A(n-1,m),m-1) & n,m\geq 1 \end{cases}$$

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \square \cdot (n-1)\cdot n$$

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}-\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}\right]$$

2.1 递归的概念

- A(n，m)的自变量m的每一个值都定义了一个单变量函数：
  - M=0时，A(n,0)=n+2
  - M=1时，A(n,1)=A(A(n-1,1),0)=A(n-1,1)+2，和A(1,1)=2故A(n,1)=2*n
  - M=2时，A(n,2)=A(A(n-1,2),1)=2A(n-1,2)，和A(1,2)=A(A(0,2),1)=A(1,1)=2，故A(n,2)= 2^n 。
  - M=3时，类似的可以推出
  - M=4时，A(n,4)的增长速度非常快，以至于没有适当的数学式子来表示这一函数。



- 定义单变量的Ackerman函数A(n)为，A(n)=A(n，n)。
  - 定义其拟逆函数α(n)为：α(n)=min{k｜A(k)≥n}。即α(n)是使n≤A(k)成立的最小的k值。
  - α(n)在复杂度分析中常遇到。对于通常所见到的正整数n，有α(n)≤4。但在理论上α(n)没有上界，随着n的增加，它以难以想象的慢速度趋向正无穷大。

2.1 递归的概念

例4 排列问题

- 设计一个递归算法生成n个元素{r1,r2,…,rn}的全排列。
- 设R={r1,r2,…,rn}是要进行排列的n个元素，Ri=R-{ri}。
- 集合X中元素的全排列记为perm(X)。
- (ri)perm(X)表示在全排列perm(X)的每一个排列前加上前缀得到的排列。R的全排列可归纳定义如下：
  - 当n=1时，perm(R)=(r)，其中r是集合R中唯一的元素；
  - 当n>1时，perm(R)由(r1)perm(R1)，(r2)perm(R2)，…，(rn)perm(Rn)构成。

2.1 递归的概念

- 例5 整数划分问题
  - 将正整数n表示成一系列正整数之和：n=n1+n2+…+nk，
  - 其中n1≥n2≥…≥nk≥1，k≥1。
  - 正整数n的这种表示称为正整数n的划分。求正整数n的不同划分个数。
  - 例如正整数6有如下11种不同的划分：
    - 6；
    - 5+1；
    - 4+2，4+1+1；
    - 3+3，3+2+1，3+1+1+1；
    - 2+2+2，2+2+1+1，2+1+1+1+1；
    - 1+1+1+1+1+1。

2.1 递归的概念

- 前面的几个例子中，问题本身都具有比较明显的递归关系，因而容易用递归函数直接求解。
- 在本例中，如果设p(n)为正整数n的划分数，则难以找到递归关系，因此考虑增加一个自变量:将最大加数n1不大于m的划分个数记作q(n,m)。可以建立q(n,m)的如下递归关系:
  1) q(n,1)=1，n≥1;当最大数n1不大于1时，任何正整数n只有一种划分形式:n=1+1+...+1(共n个)。
  2) Q(n,m)=q(n,n)，m≥n;最大加数n1实际上不能大于n。因此，q(1,m)=1。
  3) q(n,n)=1+q(n,n-1);正整数n的划分由n1=n的划分和n1≤n-1的划分组成。
  4) q(n,m)=q(n,m-1)+q(n-m,m),n>m>1;正整数n的最大加数n1不大于m的划分由n1=m的划分和n1≤m-1 的划分组成。

2.1 递归的概念

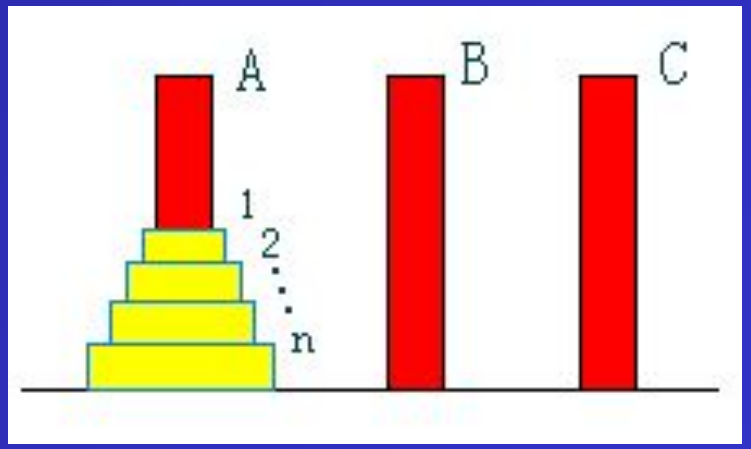
$$q(n,m)=\begin{cases}1 & n=1,m=1\\ q(n,n) & n<m\\ 1+q(n,n-1) & n=m\\ q(n,m-1)+q(n-m,m) & n>m>1\end{cases}$$

- 正整数n的划分数p(n)=q(n,n)。

2.1 递归的概念

- 例6 Hanoi塔问题
  - 设a,b,c是3个塔座。开始时，在塔座a上有一叠共n个圆盘，这些圆盘自下而上，由大到小地叠在一起。各圆盘从小到大编号为1,2,…,n,现要求将塔座a上的这一叠圆盘移到塔座b上，并仍按同样顺序叠置。在移动圆盘时应遵守以下移动规则：
    1) 每次只能移动1个圆盘；
    2) 任何时刻都不允许将较大的圆盘压在较小的圆盘之上；
    3) 在满足移动规则1和2的前提下，可将圆盘移至a,b,c中任一塔座上。
  - public static void hanoi(int n, int a, int b, int c)

```
{
  if (n > 0)
  {
    hanoi(n-1, a, c, b);
    move(a,b);
    hanoi(n-1, c, b, a);
  }
}
```



  - 思考：如果塔的个数变为a,b,c,d四个，现要将n个圆盘从a全部移动到d，移动规则不变，求移动步数最小的方案。

2.1 递归的概念

递归小结

- 优点:结构清晰，可读性强，而且容易用数学归纳法来证明算法的正确性，因此它为设计算法、调试程序带来很大方便。
- 缺点:递归算法的运行效率较低，无论是耗费的计算时间还是占用的存储空间都比非递归算法要多。
- 解决方法:在递归算法中消除递归调用，使其转化为非递归算法。
  1. 采用一个用户定义的栈来模拟系统的递归调用工作栈。该方法通用性强，但本质上还是递归，只不过人工做了本来由编译器做的事情，优化效果不明显。
  2. 用递推来实现递归函数。
  3. 通过Cooper变换、反演变换能将一些递归转化为尾递归，从而迭代求出结果。

  后两种方法在时空复杂度上均有较大改善，但其适用范围有限。

2.2 分治法的基本思想

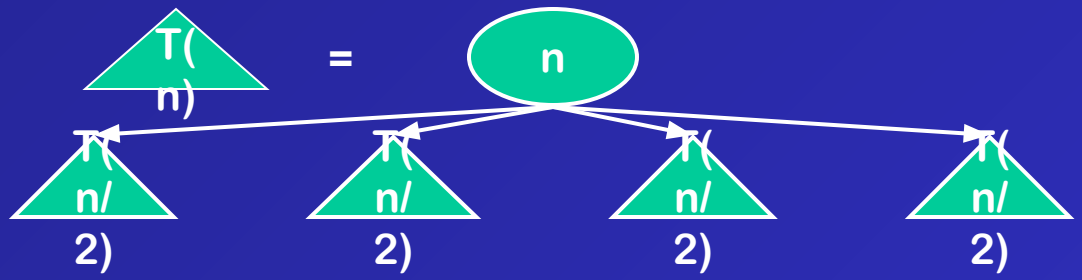
分治法的基本思想

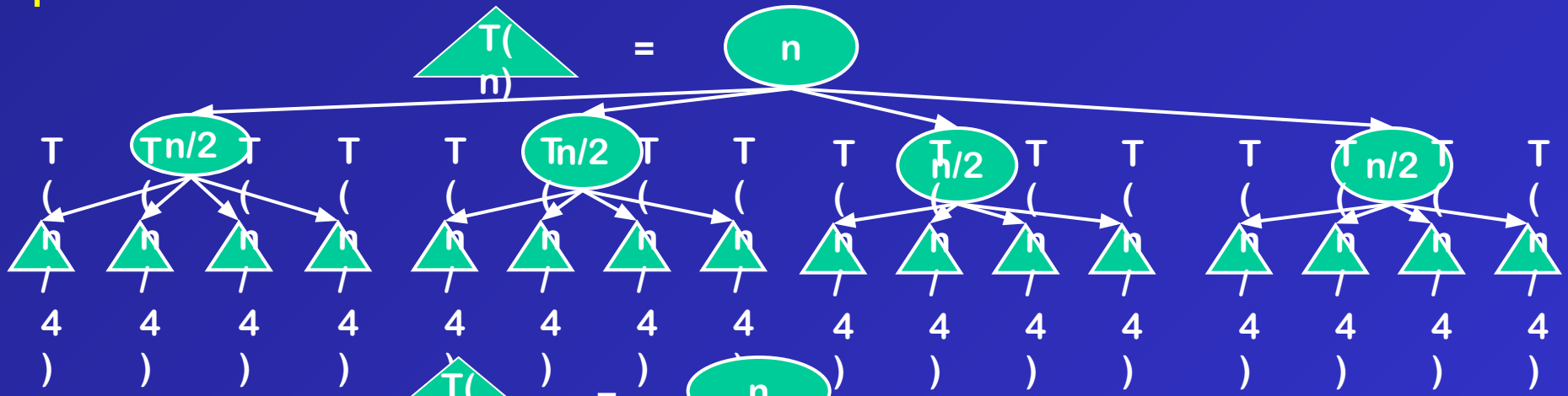
- 分治法的基本思想是将一个规模为n的问题分解为k个规模较小的子问题，这些子问题互相独立且与原问题相同。
- 对这k个子问题分别求解。如果子问题的规模仍然不够小，则再划分为k个子问题，如此递归的进行下去，直到问题规模足够小，很容易求出其解为止。
- 将求出的小规模的问题的解合并为一个更大规模的问题的解，自底向上逐步求出原来问题的解。
- 分治法的设计思想是，将一个难以直接解决的大问题，分割成一些规模较小的相同问题，以便各个击破，分而治之。

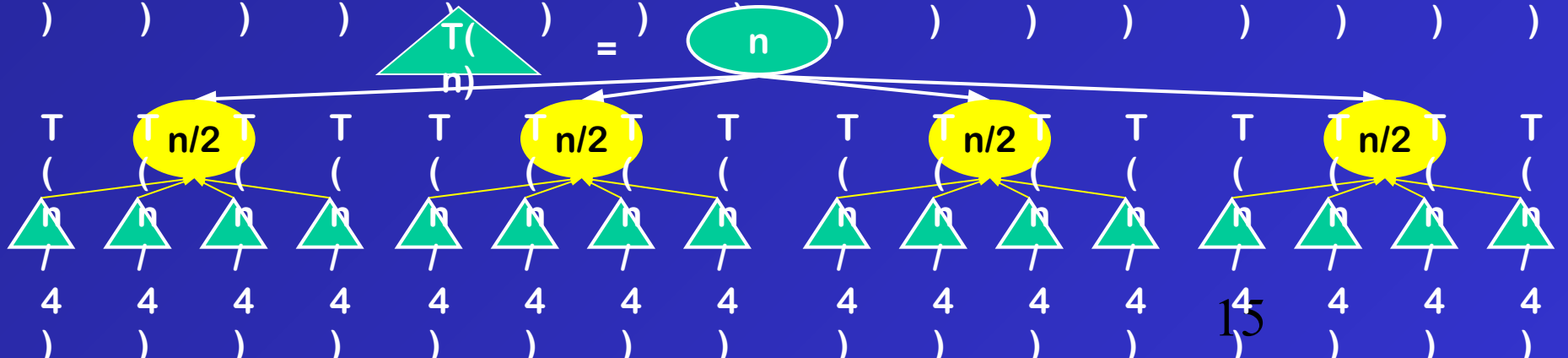
凡治众如治寡，分数是也。

——孙子兵法

2.2 分治法的基本思想







2.2 分治法的基本思想

分治法的适用条件

- 分治法所能解决的问题一般具有以下几个特征：
  - 该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；
  - 该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题，即该问题具有最优子结构性质
  - 利用该问题分解出的子问题的解可以合并为该问题的解；
  - 该问题所分解出的各个子问题是相互独立的，即子问题之间不包含公共的子问题。
- 这条特征涉及到分治法的效率，如果各子问题是不独立的，则分治法要做许多不必要的工作，重复地解公共的子问题，此时虽然也可用分治法，但一般用动态规划较好。

2.2 分治法的基本思想

- 分治法的基本步骤
  - divide-and-conquer(P)

```
{
  if ( | P | <= n0) adhoc(P);   //解决小规模的问题
  divide P into smaller subinstances P1,P2,...,Pk;//分解问题
  for (i=1,i<=k,i++)
  yi=divide-and-conquer(Pi);  //递归的解各子问题
  return merge(y1,...,yk);  //将各子问题的解合并为原问题的解
}
```

- 人们从大量实践中发现，在用分治法设计算法时，最好使子问题的规模大致相同。即将一个问题分成大小相等的k个子问题的处理方法是行之有效的。这种使子问题规模大致相等的做法是出自一种平衡(balancing)子问题的思想，它几乎总是比子问题规模不等的做法要好。

2.2 分治法的基本思想

- 分治法的复杂性分析
  - 一个分治法将规模为n的问题分成k个规模为n／m的子问题去解。设分解阀值n0=1，且adhoc解规模为1的问题耗费1个单位时间。再设将原问题分解为k个子问题以及用merge将k个子问题的解合并为原问题的解需用f(n)个单位时间。用T(n)表示该分治法解规模为|P|=n的问题所需的计算时间，则有(右上)。
  - 通过迭代法求得方程解(右下)。
  - 注意:递归方程及其解只给出n等于m的方幂时T(n)的值，但是如果认为T(n)足够平滑，那么由n等于m的方幂时T(n)的值可以估计T(n)的增长速度。通常假定T(n)是单调上升的，从而当mi≤n<mi+1时，T(mi)≤T(n)<T(mi+1)。

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ kT(n/m)+f(n) & n>1 \end{cases}$$

$$T(n)=n^{\log_m k}+\sum_{j=0}^{\log_m n-1} k^j f(n/m^j)$$

2.3 二分搜索技术

- 给定已按升序排好序的n个元素a[0:n-1]，现要在这n个元素中找出一特定元素x。
- 适用分治法求解问题的基本特征：
  - 该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；
  - 该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题；
  - 分解出的子问题的解可以合并为原问题的解；
  - 分解出的各个子问题是相互独立的。
- 很显然此问题分解出的子问题相互独立，即在a[i]的前面或后面查找x是独立的子问题，因此满足分治法的第四个适用条件。

算法及其复杂性

- 据此容易设计出二分搜索算法:

```
public static int binarySearch(int [] a, int x, int n)
{
    // 在 a[0] <= a[1] <= ... <= a[n-1] 中搜索 x
    // 找到x时返回其在数组中的位置, 否则返回-1
    int left = 0; int right = n - 1;
    while (left <= right) {
        int middle = (left + right)/2;
        if (x == a[middle]) return middle;
        if (x > a[middle]) left = middle + 1;
        else right = middle - 1;
    }
    return -1; // 未找到x
}
```

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ T\left(\frac{n}{2}\right)+1 & n>1\end{cases}$$

$$T(1)=1$$

$$T(2)=T(1)+1=2$$

$$T(4)=T(2)+1=3$$

□

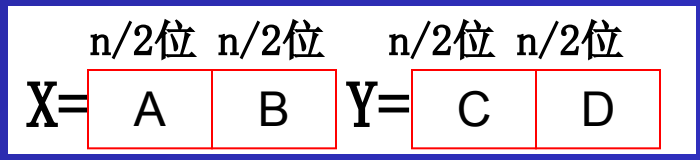
$$T(n) = T(2^m)=T(2^{m-1})+1$$

$$= m+1=\log n+1=O(\log n)$$

- 算法复杂度分析:每执行一次算法的while循环，待搜索数组的大小减少一半。因此，在最坏情况下，while循环被执行了O(logn) 次。循环体内运算需要O(1) 时间，因此整个算法在最坏情况下的计算时间复杂性为O(logn) 。
- 思考题:给定a, 用二分法设计出求an的算法。

2.4 大整数的乘法

- 设计一个有效的算法，可以进行两个n位大整数的乘法运算
- 小学的方法：$O(n^2)$ □效率太低
- 分治法：
  - $X=a2^{n/2}+b$
  - $Y=c2^{n/2}+d$
  - $XY=ac2^{n}+(ad+bc)2^{n/2}+bd$
- 复杂度分析
  - $$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 4T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$
  - $T(n)=O(n^2)$ □没有改进☹



算法改进

- 为了降低时间复杂度，必须减少乘法的次数。为此，我们把XY写成另外的形式：
  - $XY = ac\ 2^n + ((a-c)(b-d)+ac+bd)\ 2^{n/2} + bd$ 或
  - $XY = ac\ 2^n + ((a+c)(b+d)-ac-bd)\ 2^{n/2} + bd$
- 复杂性：
  - 这两个算式看起来更复杂一些，但它们仅需要3次n/2位乘法[ac、bd和(a±c)(b±d)]，于是
  - $$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 3T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$
  - $T(n)=O(n^{\log 3})=O(n^{1.59})$ ✔较大的改进☺
- 细节问题：两个XY的复杂度都是O(nlog3)，但考虑到a+c,b+d可能得到m+1位的结果，使问题的规模变大，故不选择第2种方案。

更快的方法

- 小学的方法:$O(n^2)$——效率太低
- 分治法: $O(n^{1.59})$——较大的改进
- 更快的方法？
  - 如果将大整数分成更多段，用更复杂的方式把它们组合起来，将有可能得到更优的算法。
  - 最终的，这个思想导致了快速傅利叶变换(Fast Fourier Transform)的产生。该方法也可以看作是一个复杂的分治算法，对于大整数乘法，它能在O(nlogn)时间内解决。
  - 是否能找到线性时间的算法？目前为止还没有结果。

2.5 Strassen矩阵乘法

- $n \times n$矩阵A和B的乘积矩阵C中的元素C[i,j]定义为：

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

- 若依此定义来计算A和B的乘积矩阵C，则每计算C的一个元素C[i][j]，需要做n次乘法和n-1次加法。因此，算出矩阵C的 个元素所需的计算时间为$O(n^3)$

简单分治法求矩阵乘

- 首先假定n是2的幂。使用与上例类似的技术，将矩阵A，B和C中每一矩阵都分块成4个大小相等的子矩阵。由此可将方程C=AB重写为：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

- 由此可得：

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \qquad C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \qquad C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

- 复杂度分析

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 2 \\ 8T(n/2) + O(n^2) & n > 2 \end{cases}$$

- T(n)=O(n3) 没有改进☹

改进算法

- 为了降低时间复杂度，必须减少乘法的次数。而其关键在于计算2个2阶方阵的乘积时所用乘法次数能否少于8次。为此，Strassen提出了一种只用7次乘法运算计算2阶方阵乘积的方法（但增加了加/减法次数）：

  $M_1=A_{11}(B_{12}-B_{22})$ $M_2=(A_{11}+A_{12})B_{22}$
  $M_3=(A_{21}+A_{22})B_{11}$ $M_4=A_{22}(B_{21}-B_{11})$
  $M_5=(A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$ $M_6=(A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$
  $M_7=(A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$

- 做了这7次乘法后，在做若干次加/减法就可以得到：

  $C_{11}=M_5+M_4-M_2+M_6$ $C_{12}=M_1+M_2$
  $C_{21}=M_3+M_4$ $C_{22}=M_5+M_1-M_3-M_7$

- 复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=2 \\ 7T(n/2)+O(n^2) & n>2 \end{cases}$$

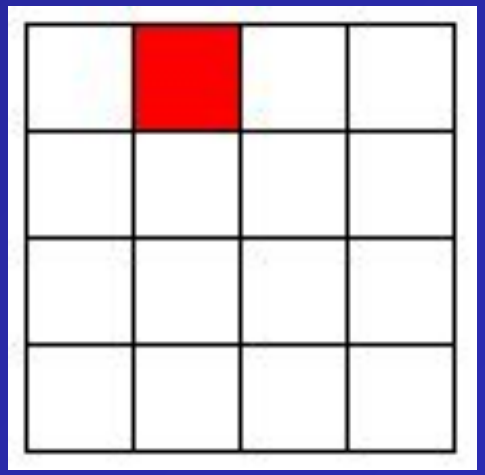
- $T(n)=O(n^{\log 7})=O(n^{2.81})$ ✔较大的改进☺

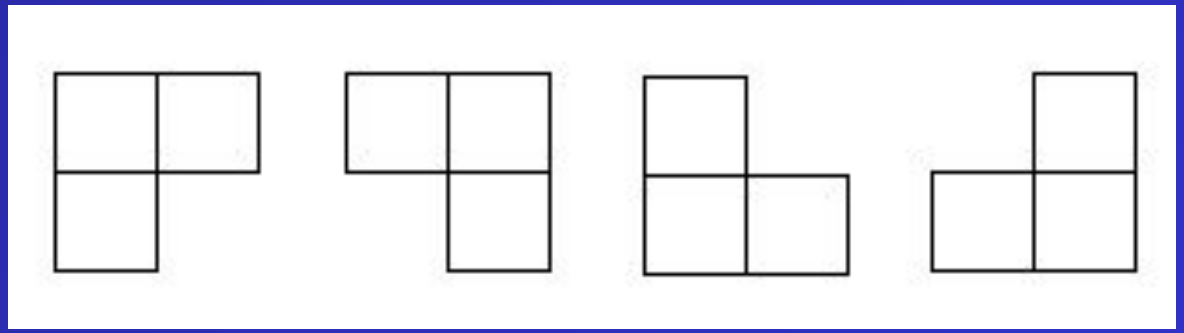
更快的方法

- Hopcroft和Kerr已经证明(1971)，计算2个2×2矩阵的乘积，7次乘法是必要的。因此，要想进一步改进矩阵乘法的时间复杂性，就不能再基于计算2×2矩阵的7次乘法这样的方法了。或许应当研究3×3或5×5矩阵的更好算法。
- 在Strassen之后又有许多算法改进了矩阵乘法的计算时间复杂性。
- 目前最好的计算时间上界是 $O(n^{2.376})$
- 是否能找到$O(n^2)$的算法？目前为止还没有结果。

2.6 棋盘覆盖

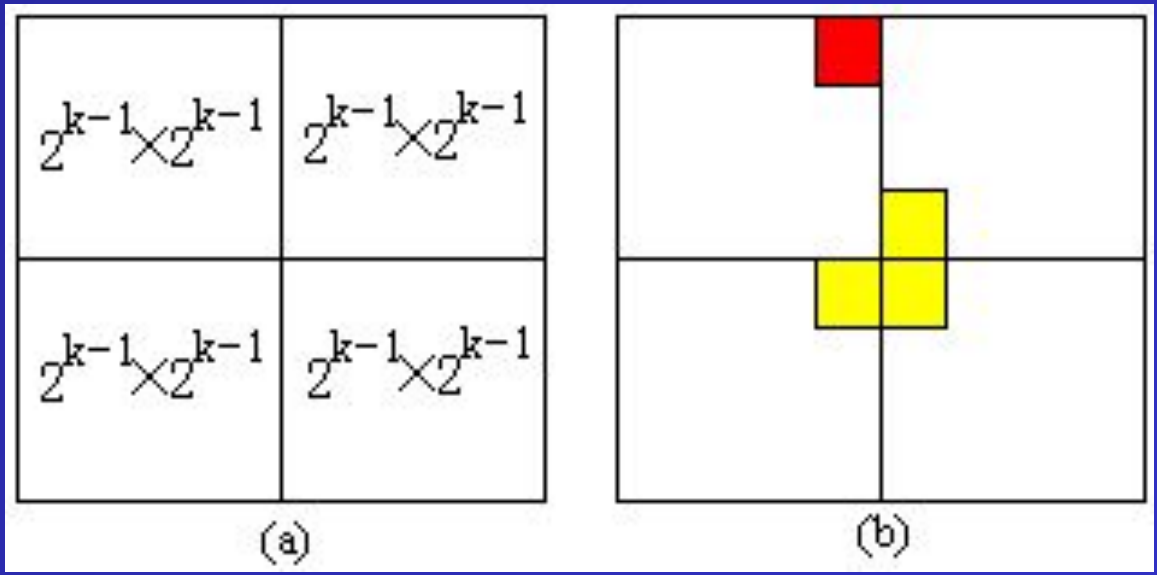
- 在一个$2^k \times 2^k$个方格组成的棋盘中，恰有一个方格与其他方格不同，称该方格为一特殊方格，且称该棋盘为一特殊棋盘。在棋盘覆盖问题中，要用图示的4种不同形态的L型骨牌覆盖给定的特殊棋盘上除特殊方格以外的所有方格，且任何2个L型骨牌不得重叠覆盖。
- 易知，覆盖任意一个$2^k \times 2^k$的特殊棋盘，用到的骨牌数恰好为$(4^K-1)/3$。





分治策略求解

- 当k>0时，将2k×2k棋盘分割为4个2k-1×2k-1 子棋盘(a)所示。特殊方格必位于4个较小子棋盘之一中，其余3个子棋盘中无特殊方格。为了将这3个无特殊方格的子棋盘转化为特殊棋盘，可以用一个L型骨牌覆盖这3个较小棋盘的会合处，如 (b)所示，从而将原问题转化为4个较小规模的棋盘覆盖问题。递归地使用这种分割，直至棋盘简化为棋盘1×1。



算法描述

```
void CB(int tr,tc,dr,dc,size)
{       if (size == 1) return;
        int t = tile++; // L型骨牌号
        s = size/2; // 分割棋盘
        // 覆盖左上角子棋盘
        if (dr < tr + s && dc < tc + s)
                // 特殊方格在此棋盘中
                chessBoard(tr, tc, dr, dc, s);
        else {// 此棋盘中无特殊方格
                // 用 t 号L型骨牌覆盖右下角
                board[tr + s - 1][tc + s - 1] = t;
                // 覆盖其余方格
                CB(tr, tc, tr+s-1, tc+s-1, s);}
        // 覆盖右上角子棋盘
        if (dr < tr + s && dc >= tc + s)
                // 特殊方格在此棋盘中
                CB(tr, tc+s, dr, dc, s);
        else {// 此棋盘中无特殊方格
                // 用 t 号L型骨牌覆盖左下角
                board[tr + s - 1][tc + s] = t;
                // 覆盖其余方格
                CB(tr,tc+s,tr+s-1,tc+s, s);}
        // 覆盖左下角子棋盘
        if (dr >= tr + s && dc < tc + s)
                // 特殊方格在此棋盘中
                CB(tr+s, tc, dr, dc, s);
        else {// 用 t 号L型骨牌覆盖右上角
                board[tr + s][tc + s - 1] = t;
                // 覆盖其余方格
                CB(tr+s, tc, tr+s, tc+s-1, s);}
        // 覆盖右下角子棋盘
        if (dr >= tr + s && dc >= tc + s)
                // 特殊方格在此棋盘中
                CB(tr+s, tc+s, dr, dc, s);
        else {// 用 t 号L型骨牌覆盖左上角
                board[tr + s][tc + s] = t;
                // 覆盖其余方格
                CB(tr+s, tc+s, tr+s, tc+s, s);}
}
```

复杂度分析

- 说明：
  - 整形二维数组Board表示棋盘，Borad[0][0]使棋盘的左上角方格。
  - tile是一个全局整形变量，用来表示L形骨牌的编号，初始值为0。
  - tr：棋盘左上角方格的行号；tc：棋盘左上角方格的列号；
  - dr：特殊方各所在的行号；dc：特殊方各所在的列号；
  - size：size=2^k，棋盘规格为$2^k \times 2^k$。
- 复杂度分析：
  - $$T(k)=\begin{cases} O(1) & k=0 \\ 4T(k-1)+O(1) & k>1 \end{cases}$$
  - $T(k)=4^k-1=O(4^k)$ 渐进意义下的最优算法

2.7 合并排序

- 基本思想:将待排序元素分成大小大致相同的2个子集合，分别对2个子集合进行排序，最终将排好序的子集合合并成为所要求的排好序的集合。
- 递归算法描述:

```
public static void mergeSort(Comparable a[], int left, int right)
{
    if (left<right) {//至少有2个元素
        int i=(left+right)/2;  //取中点
        mergeSort(a, left, i);
        mergeSort(a, i+1, right);
        merge(a, b, left, i, right);  //合并到数组b
        copy(a, b, left, right);    //复制回数组a
    }
}
```

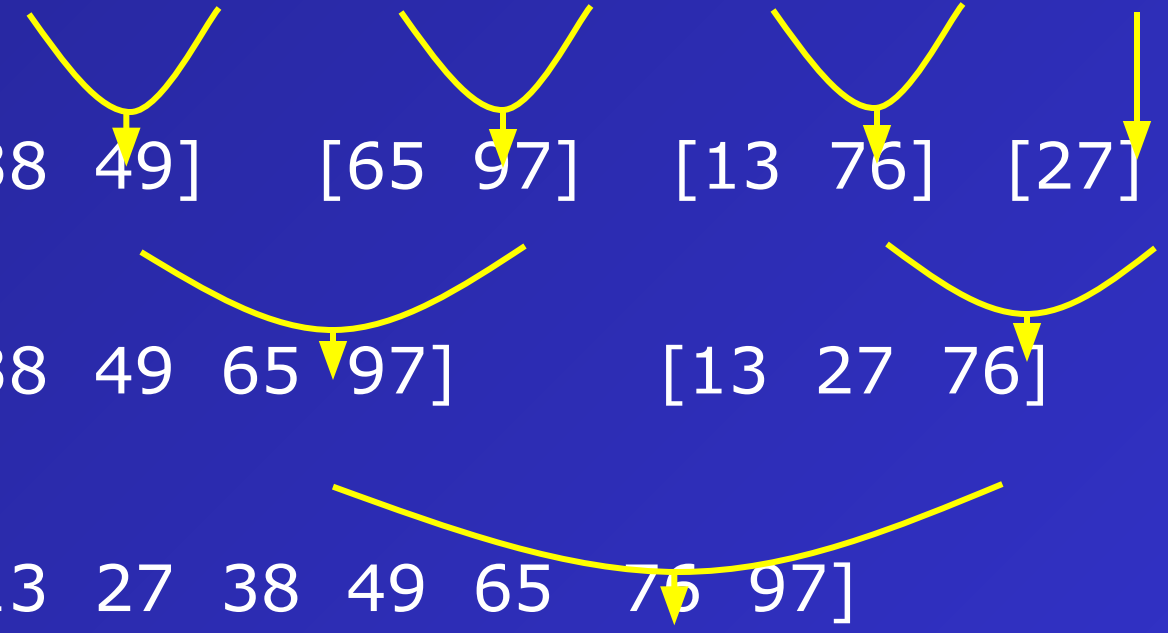
- 复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n \le 1 \\ 2T(n/2)+O(n) & n > 1 \end{cases}$$

  - T(n)=O(nlogn) 渐进意义下的最优算法

算法改进

- 算法mergeSort的递归过程可以消去。
  - 初始序列 [49] [38] [65] [97] [76] [13] [27]
  - 第一步 [38 49] [65 97] [13 76] [27]
  - 第二步 [38 49 65 97] [13 27 76]
  - 第三步 [13 27 38 49 65 76 97]



改进后的算法描述及其复杂性

- 算法描述:略
- 复杂性分析:
  - 最坏时间复杂度:O(nlogn)
  - 平均时间复杂度:O(nlogn)
  - 辅助空间:O(n)
- 思考题:给定有序表A[1:n], 修改合并排序算法, 求出该有序表的逆序对数。

2.8 快速排序

- 快速排序是基于分治策略的另一个排序算法，其基本思想是：
  - 分解——以a_p为基准元素将$a_{p:r}$划分成3段$a_{p:q-1}$、a_q和$a_{q+1:r}$，使得$a_{p:q-1}$中任何元素小于a_q，$a_{q+1:r}$中任何元素大于a_q；下标q在划分过程中确定；
  - 递归求解——通过递归调用快速排序算法分别对$a_{p:q-1}$和$a_{q+1:r}$进行排序；
  - 合并——由于对$a_{p:q-1}$和$a_{q+1:r}$的排序是就地进行的，所以在$a_{p:q-1}$和$a_{q+1:r}$都已排好序后不需要执行任何计算$a_{p:r}$就已排好序。
- 在快速排序中，记录的比较和交换是从两端向中间进行的，关键字较大的记录一次就能交换到后面单元，关键字较小的记录一次就能交换到前面单元，记录每次移动的距离较大，因而总的比较和移动次数较少。
- 快速算法描述：

```
template<class Type>
void QuickSort (Type a[], int p, int r)
{
      if (p<r) {
      int q=Partition(a,p,r);
      QuickSort (a,p,q-1); //对左半段排序
      QuickSort (a,q+1,r); //对右半段排序
      }
}
```

分解/划分算法描述

- 分解/划分算法描述：

```
template<class Type>
int Partition (Type a[], int p, int r)
{
        int i = p, j = r + 1;
        Type x=a[p];
        // 将< x的元素交换到左边区域
        // 将> x的元素交换到右边区域
        while (true) {
                while (a[++i] <x);
                while (a[- -j] >x);
                if (i >= j) break;
                Swap(a[i], a[j]);
        }
        a[p] = a[j];
        a[j] = x;
        return j;
}
```

{6, 7, 5^1, 2, 5, 8} 初始序列

{6, 7, 5^1, 2, 5, 8} j--;

↑i ↑j

{5, 7, 5^1, 2, 6, 8} i++;

↑i ↑j

{5, 6, 5^1, 2, 7, 8} j--;

↑i ↑j

{5, 2, 5^1, 6, 7, 8} i++;

↑i ↑j

{5, 2, 5^1}6{7, 8} 完成

快速排序具有不稳定性！

复杂性分析及随机化的快速排序算法

- 算法复杂性分析：
  - 最坏时间复杂度：$O(n^2)$
  - 平均时间复杂度：O(nlogn)
  - 辅助空间：O(n)或O(logn)
- 快速排序算法的性能取决于划分的对称性。通过修改算法partition，可以设计出采用随机选择策略的快速排序算法。在快速排序算法的每一步中，当数组还没有被划分时，可以在a[p:r]中随机选出一个元素作为划分基准，这样可以使划分基准的选择是随机的，从而可以期望划分是较对称的。
- 算法描述：
  - template<class Type>
  - int RandomizedPartition (Type a[], int p, int r)潼
  - {
    - int i = Random(p,r);
    - Swap(a[i], a[p]);
    - return Partition (a, p, r);
  - }

2.9 线性时间选择

- 元素选择问题:给定线性序集中n个元素和一个整数k，1≤k≤n，要求找出这n个元素中第k小的元素。
- RandomizedSelect算法:模仿快速排序算法，首先对输入数组进行划分，然后对划分出的子数组之一进行递归处理。算法描述如下:

```
template<class Type>
Type RandomizedSelect(Type a[],int p,int r,int k)
{
    if (p==r) return a[p];
    int i=RandomizedPartition(a,p,r),
    j=i-p+1;
    if (k<=j) return RandomizedSelect(a,p,i,k);
    else return RandomizedSelect(a,i+1,r,k-j);
}
```

- 算法复杂性:在最坏情况下，算法randomizedSelect需要$O(n^2)$计算时间。但可以证明，算法RandomizedSelect可以在O(n)平均时间内找出n个输入元素中的第k小元素。

改进算法

- 基本思路:如果能在线性时间内找到一个划分基准,使得按这个基准所划分出的2个子数组的长度都至少为原数组长度的ε倍(0<ε<1是某个正常数),那么就可以在最坏情况下用O(n)时间完成选择任务。
- 例如,若ε=9/10,算法递归调用所产生的子数组的长度至少缩短1/10。所以,在最坏情况下,算法所需的计算时间T(n)满足递归式$T(n)\leq T(9n/10)+O(n)$。由此可得T(n)=O(n)。

一个较好的基准划分步骤

- 步骤(如图所示):
  - 将n个输入元素划分成⌈n/5⌉个组，每组5个元素，只可能有一个组不是5个元素。用任意一种排序算法，将每组中的元素排好序，并取出每组的中位数，共⌈n/5⌉个。
  - 递归调用select来找出这⌈n/5⌉个元素的中位数。如果⌈n/5⌉是偶数，就找它的2个中位数中较大的一个。以这个元素作为划分基准。
- 说明:
  - 设所有元素互不相同。在这种情况下，找出的基准x至少比3(n-5)/10个元素大，因为在每一组中有2个元素小于本组的中位数，而n/5个中位数中又有(n-5)/10个小于基准x(如图)。同理，基准x也至少比3(n-5)/10个元素小。而当n≥75时，3(n-5)/10≥n/4所以按此基准划分所得的2个子数组的长度都至少缩短1/4。

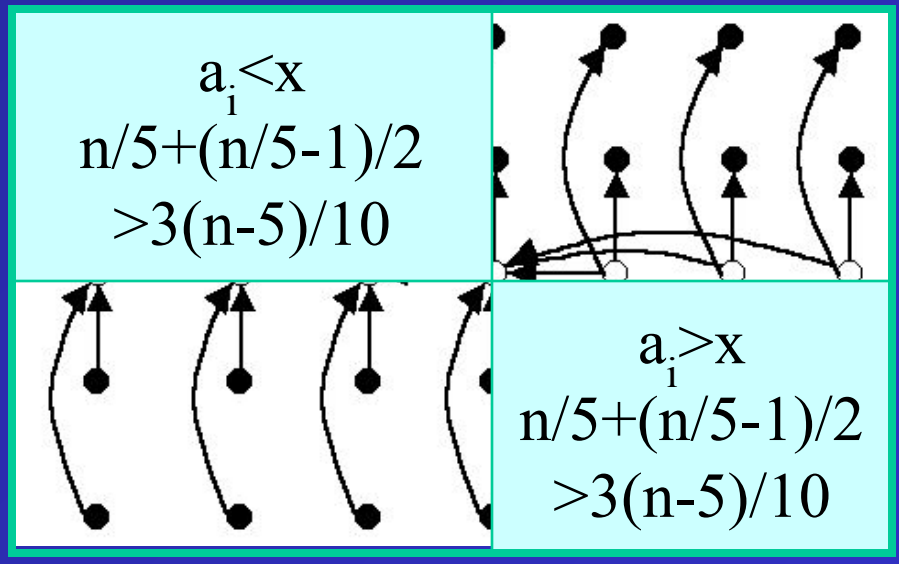


图2-7 选择划分基准

其中，n个元素用小圆点表示，
空心圆点为每组元素的中位数；
x为中位数的中位数；
箭头由较大元素指向较小元素。

只要等于基准的元素不太多，利用这个基准来划分的两个数组的大小就不会相差太远。

算法描述及复杂性分析

```
private static Comparable select (int p, int r, int k)
{
    //用某个简单排序算法对数组a[p:r]排序;
    if (r-p<75) {
        bubbleSort(p,r);
        return a[p+k-1];
    }
    //将a[p+5*i]至a[p+5*i+4]的第3小元素与a[p+i]交换;
    //找中位数的中位数，r-p-4即前述n-5;
    for ( int i = 0; i<=(r-p-4)/5; i++ )
    {
        int s=p+5*i,
        t=s+4;
        for (int j=0;j<3;j++) bubble(s,t-j);
        MyMath.swap(a, p+i, s+2);
    }
    Comparable x = select(p, p+(r-p-4)/5, (r-p+6)/10);
    int i=partition(p,r,x),
    j=i-p+1;
    if (k<=j) return select(p,i,k);
    else return select(i+1,r,k-j);
}
```

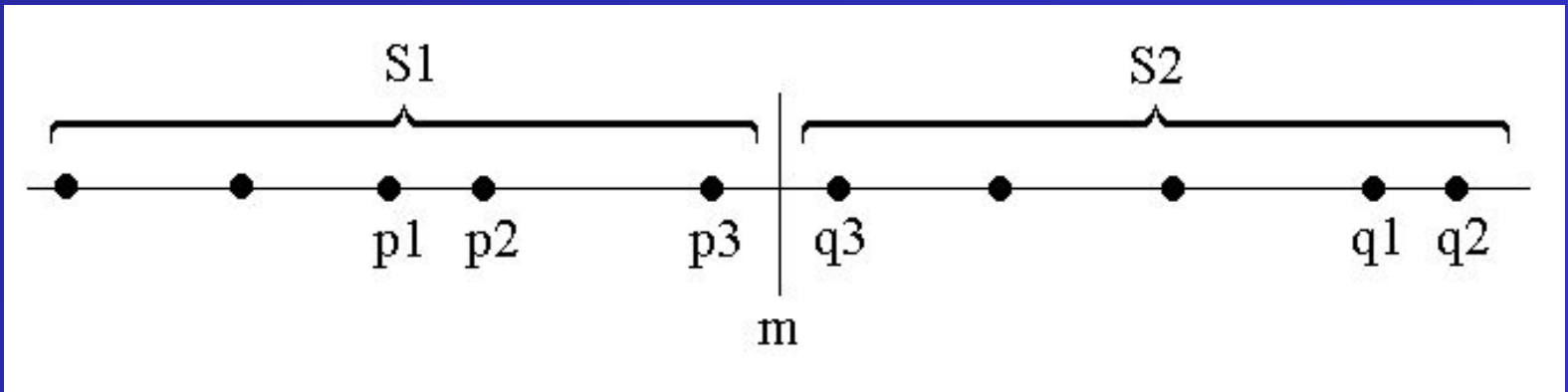
- 复杂度分析
  - $T(n)\le\begin{cases} C_1 & n<75 \\ C_2 n+T(n/5)+T(3n/4) & n\ge 75 \end{cases}$
  - C_1为直接简单排序时间
  - $C_2 n$为执行for循环的时间
  - 解递归方程得$T(n)=O(n)$
- 说明：
  - 上述算法将每一组的大小定为5，并选取75作为是否作递归调用的分界点。这2点保证了T(n)的递归式中2个自变量之和n/5+3n/4=19n/20=εn，0<ε<1。这是使T(n)=O(n)的关键之处。当然，除了5和75之外，还有其他选择。
  - 上述算法中我们假设元素互不相等已保证划分后子数组不超过3n/4。当元素可能相等时，设有m个（将他们集中起来），若j≤k≤j+m-1时返回a_i；否则调用select(i+m+1, r, k-j-m)。

2.10 最接近点对问题

- 问题描述:给定平面上n个点，找其中的一对点，使得在n个点所组成的所有点对中，该点对间的距离最小。
- 说明:
  - 严格来讲，最接近点对可能多于一对，为简便起见，我们只找其中的一对作为问题的解。
  - 一个简单的做法是将每一个点与其他n-1个点的距离算出，找出最小距离的点对即可。该方法的时间复杂性是$T(n)=n(n-1)/2+n=O(n^2)$，效率较低。
  - 已经证明，该算法的计算时间下界是$\Omega(n\log n)$。

一维空间中的情形

- 为了使问题易于理解和分析，先来考虑一维的情形。此时，S中的n个点退化为x轴上的n个实数x1,x2,…,xn。最接近点对即为这n个实数中相差最小的2个实数。
- 一个简单的办法是先把x1,x2,…,xn排好序，再进行一次线性扫描就可以找出最接近点对，T(n)=O(nlogn)。然而这种方法无法推广到二维情形。
- 假设我们用x轴上某个点m将S划分为2个子集S1和S2，基于平衡子问题的思想，用S中各点坐标的中位数来作分割点。
- 递归地在S1和S2上找出其最接近点对{p1,p2}和{q1,q2}，并设d=min{|p1-p2|,|q1-q2|}，S中的最接近点对或者是{p1,p2}，或者是{q1,q2}，或者是某个{p3,q3}，其中p3∈S1且q3∈S2。
- 能否在线性时间内找到p3,q3？



算法描述及复杂性

- 如果S的最接近点对是{p3,q3}，即|p3-q3|<d，则p3和q3两者与m的距离不超过d，即p3∈(m-d,m]，q3∈(m,m+d]。
- 由于在S1中，每个长度为d的半闭区间至多包含一个点(否则必有两点距离小于d)，并且m是S1和S2的分割点，因此(m-d,m]中至多包含S中的一个点。由图可以看出，如果(m-d,m]中有S中的点，则此点就是S1中最大点。
- 因此，我们用线性时间就能找到区间(m-d,m]和(m,m+d]中所有点，即p3和q3。从而我们用线性时间就可以将S1的解和S2的解合并成为S的解。
- 分割点m的选取不当，会造成$|S_i|=1$，$|S_j|=n-1(i+j=1)$的情形，使得$T(n)=T(n-1)+O(n)=O(n^2)$。这种情形可以通过“平衡子问题”方法加以解决：选取各点坐标的中位数作分割点。

- 算法描述：

```
bool CPair1(S, d)
{
    n=|S|;
    if (n<2){d=∞; return false;}
    m=Blum(S); //S各点坐标中位数
    S=>S1+S2;//S1={x|x<=m}
      S2={x|x>m}
    CPair1(S1, d1);
    CPair1(S2, d2);
    p=max(S1);
    q=min(S2);
    d=min(d1, d2, q-p);
    return ture;
}
```

- 复杂性分析：
  - $$T(n)=\begin{cases} O(1) & n<4 \\ 2T(n/2)+O(n) & n\geq 4 \end{cases}$$
  - T(n)=O(nlogn)
  - 该算法可推广到二维的情形中去。

二维空间的最接近点对问题

- 下面来考虑二维的情形。
  - 选取一垂直线l:x=m来作为分
    中各点x坐标的中位数。由此
  - 递归地在S1和S2上找出其最
    d=min{d1,d2}，S中的最接近
    某个{p,q}，其中p∈P1且q∈
- 能否在线性时间内找到p,q？
  - 考虑P1中任意一点p，它若与P2中的点q构成最接近点对的候选者，则必有distance(p，q)＜d。满足这个条件的P2中的点一定落在一个d×2d的矩形R中，如图2-10所示。
  - 由d的意义可知，P2中任何2个S中的点的距离都不小于d。由此可以推出矩形R中最多只有6个S中的点。

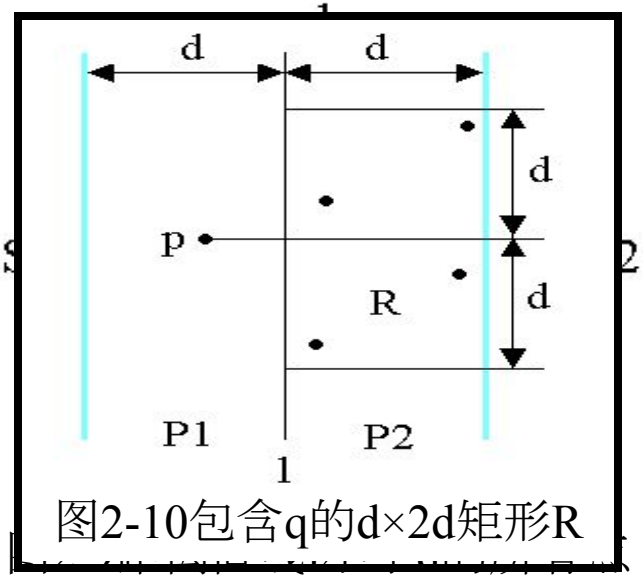


图2-10包含q的d×2d矩形R

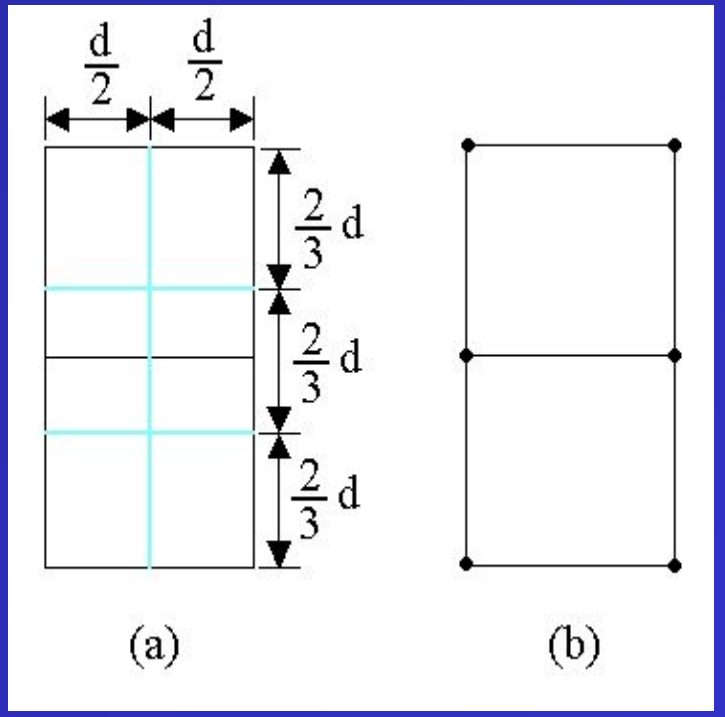
R中至多包含6个S中的点的证明

- 证明:
  - 将矩形R的长为2d的边3等分，将它的长为d的边2等分，由此导出6个(d/2)×(2d/3)的矩形（如图(a)所示）。
  - 若矩形R中有多于6个S中的点，则由鸽舍原理易知至少有一个(d/2)×(2d/3)的小矩形中有2个以上S中的点。
  - 设u，v是位于同一小矩形中的2个点，则

$$(x(u)-x(v))^2+(y(u)-y(v))^2$$

$$\le (d/2)^2+(2d/3)^2=\frac{25}{36}d^2$$

  - 因此，distance(u,v)<d。这与d的意义相矛盾。
  - 也就是说，矩形R中最多有6个S中的点。
- 极端情形:图(b)是矩形R中恰有6个S中的点的极端情形。



说明

- 因此，在分治法的合并步骤中最多只需要检查6×n/2=3n个候选者。
- 为了确切地知道要检查哪6个点，可以将p和P2中所有S2的点投影到垂直线l上。由于能与p点一起构成最接近点对候选者的S2中点一定在矩形R中，所以它们在直线l上的投影点距p在l上投影点的距离小于d。由上面的分析可知，这种投影点最多只有6个。
- 因此，若将P1和P2中所有S中点按其y坐标排好序，则对P1中所有点，对排好序的点列作一次扫描，就可以找出所有最接近点对的候选者。对P1中每一点最多只要检查P2中排好序的相继6个点。

算法描述及复杂性分析

- 算法描述：
  - public static double CPair2(S)
  - {
    - n=|S|;
    - if (n < 2) return ∞;
    - m=S中各点x间坐标的中位数;
    - 构造S1和S2；
    - //S1={p∈S|x(p)<=m},
    - S2={p∈S|x(p)>m}
    - d1=cpair2(S1);
    - d2=cpair2(S2);
    - dm=min(d1,d2);
    - 设P1是S1中距垂直分割线l的距离在dm之内的所有点组成的集合；
    - P2是S2中距分割线l的距离在dm之内所有点组成的集合；
    - 将P1和P2中点依其y坐标值排序；
    - 并设X和Y是相应的已排好序的点列；
    - 通过扫描X以及对于X中每个点检查Y中与其距离在dm之内的所有点(最多6个)可以完成合并；
    - 当X中的扫描指针逐次向上移动时，Y中的扫描指针可在宽为2dm的区间内移动；
    - 设dl是按这种扫描方式找到的点对间的最小距离；
    - d=min(dm,dl);
    - return d;
  - }
- 复杂度分析：
  - $$T(n)=\begin{cases} O(1) & n<4 \\ 2T(n/2)+O(n) & n\geq 4 \end{cases}$$
  - T(n)=O(nlogn)
- 算法的具体实现：略。

2.11 循环赛日程表

- 分治法不仅可以用来设计算法，而且再其他方面也有广泛应用:利用分治法设计电路、构造数学证明等。
- 循环赛日程标问题，设有n=2k个选手要进行循环赛，设计一个满足以下要求的比赛日程表:
  - 每个选手必须与其他n-1个选手各赛一次;
  - 每个选手一天只能赛一次;
  - 循环赛一共进行n-1天。
- 按此要求，可以将比赛日程表设计成n行n-1列的表格，i行j列表示第i个选手在第j天所遇到的选手。
- 基本思路:按分治策略，将所有的选手分为两组，n个选手的比赛日程表就可以通过为n/2个选手设计的比赛日程表来决定。递归地用对选手进行分割，直到只剩下2个选手时，比赛日程表的制定就变得很简单。这时只要让这2个选手进行比赛就可以了。

算法描述及示例

- 算法描述:略。
- 思考题:
  - 递归形式的算法描述。
  - 选手数n为一般情况时，试设计循环赛日程表算法，并求出循环赛所需要的最少天数。(提示:当n为偶数时，比赛至少需要n-1天;当n为奇数时，比赛至少需要n天。)*

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	3	4	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

小结

- 递归的概念
- 分治策略的基本思想和相关实例
- 作业
  - 2.8、2.9、2.10、2.27、2.30、2.31、2.32
- 练习
  - 2.13、2.22、2.33、2.35