



Линейное программирование

Основная задача линейного
программирования

Стандартная форма

- Первая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots; \quad x_n \geq 0.$$

Стандартная форма

- Вторая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \min$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots; \quad x_n \geq 0.$$

Каноническая форма

- Канонической формой задачи линейного программирования называется задача вида

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \min$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots; \quad x_n \geq 0.$$

Правила приведения

Рассмотрим теперь те приёмы, которые позволяют произвольные формы задач линейного программирования приводить к указанным выше стандартным формам.

1. Превращение max в min и наоборот.

Если целевая функция в задаче линейного программирования задана в виде

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \min$$

то, умножая ее на (-1) , приведем ее к виду

$$(-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \dots + (-c_n)x_n \Rightarrow \max$$

так как смена знака приводит к смене min на max.

Аналогично можно заменить max на min.

Правила приведения

2. Смена знака неравенства.

Если ограничение задано в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

то, умножая на (-1), получим:

$$(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \dots + (-a_{in})x_n \geq -b_i$$

Аналогично, неравенство вида больше либо равно можно превратить в неравенство вида меньше либо равно .

Правила приведения

3. Превращение равенства в систему неравенств.

Если ограничение задано в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

то его можно заменить эквивалентной системой двух неравенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \dots + (-a_{in})x_n \leq -b_i$$

или такой же системой неравенств со знаками больше либо равно.
Указанные выше приемы позволяют приводить задачи линейного программирования к **стандартной форме**.

Правила приведения

4. Превращение неравенств в равенства.

Для приведения задачи к канонической форме, где **все** ограничения имеют вид **равенств**, вводят **дополнительные переменные** $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p}$, которые тоже считаются неотрицательными и записывают исходную задачу в виде

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \dots + 0 \cdot x_{n+p} \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n - x_{n+r+1} = b_{r+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n - x_{n+p} = b_p \end{cases} \quad \begin{cases} a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \dots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots \quad x_n \geq 0; \quad x_{n+1} \geq 0; \quad \dots \quad x_{n+p} \geq 0$$

Правила приведения

То есть в неравенстве со знаком меньше либо равно **добавляют** дополнительную неотрицательную переменную, а из неравенства со знаком больше либо равно **вычитают** дополнительную переменную.

В целевую функцию эти дополнительные переменные включают с коэффициентом 0, т.е. фактически они в целевой функции отсутствуют.

Получив решение задачи в канонической форме, для получения решения исходной задачи надо просто выбросить из решения значения введенных дополнительных переменных.

Задание

- Привести к каноническому виду задачу

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\Rightarrow \max \\x_1 - x_2 &\geq 1 \\x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 \geq 0; x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- Привести к каноническому и стандартному виду задачу

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 3x_3 &\Rightarrow \min \\2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\x_1 + 2x_3 &= 8 \\-x_1 - 2x_2 &\geq 1\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Задание

- Привести к канонической и стандартной форме

$$-2x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 \Rightarrow \min$$

$$2x_1 \quad -x_2 \quad +6x_3 \leq 12$$

$$3x_1 \quad +5x_2 \quad -12x_3 = 14$$

$$-3x_1 \quad +6x_2 \quad +4x_3 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0.$$

$$2x_1 \quad +x_2 \quad -x_3 \Rightarrow \max$$

$$x_1 \quad -2x_2 \quad +x_3 \geq 4$$

$$x_1 \quad +x_2 \quad -3x_3 \leq 9$$

$$x_1 \quad +3x_2 \quad +2x_3 = 10$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0.$$

Задание

■ Привести к канонической форме

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 \Rightarrow \max & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & -2x_5 & \Rightarrow \min \\ -3x_1 & +x_2 & +4x_3 & -2x_4 & & x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 = 2 & -2x_2 & +4x_3 & +4x_4 & & & \leq 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Задание

- Привести к канонической форме

$$\begin{array}{rcccc} 3x_1 & -2x_2 & & -5x_4 & +x_5 \Rightarrow \max \\ 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & +x_5 \leq 2 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 & +x_5 \leq 3 \\ & & +x_3 & -x_4 & +2x_5 \leq 6 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & -5x_5 \geq 8 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0.$$

Задание

- Привести к канонической и стандартной форме

$$-2x_1 + x_2 + 5x_3 \Rightarrow \max$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12$$

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18$$

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0.$$

$$2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \Rightarrow \min$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0.$$

Задание

- Привести к канонической и стандартной форме

$$-3x_1 \quad -5x_2 \quad -6x_3 \Rightarrow \min$$

$$-4x_1 \quad +3x_2 \quad +8x_3 \geq 15$$

$$2x_1 \quad +5x_2 \quad -7x_3 \leq 12$$

$$3x_1 \quad -2x_2 \quad +10x_3 \leq 17$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0.$$

$$-x_1 \quad +2x_2 \quad -x_3 \quad +x_4 \Rightarrow \min$$

$$2x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad +x_4 \leq 6$$

$$x_1 \quad +2x_2 \quad +x_3 \quad -x_4 \geq 8$$

$$3x_1 \quad -x_2 \quad +2x_3 \quad +2x_4 \leq 10$$

$$-x_1 \quad +3x_2 \quad +5x_3 \quad -3x_4 = 15$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0.$$