

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Презентация создана
учителем математики и информатики
Ковалевой Анной Леонидовной
ГБОУ СОШ №341 г.СПб
2013-2014

На рисунке – памятник Аристотелю
(в городе Стагир – Греция, место его рождения)

ЛОГИКА (от греч. «логос» слово и смысл)

– наука о закономерностях, формах и операциях мышления

- Т.е. это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения. Наука логики известна еще с глубокой древности. Ее родоначальником был древнегреческий философ Аристотель (382-322 гг. до н.э.). Он ввел основные формы абстрактного мышления или так называемой формальной логики.

- Со времен Аристотеля логика ушла не слишком далеко вперед. Даже немецкий философ Эммануил Кант (1724-1804) считал, что эта наука полностью завершила свое развитие.

Однако немецкий философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк, лингвист Лейбниц (Готфрид Вильгельм, 1646-1716) предпринял попытку логических вычислений). Идеи Лейбница о математической логике не заинтересовали его современников.

- Потребовалось еще полтора столетия, пока в трудах английского математика Джорджа Буля (1815-1864) появился алфавит, орфография и грамматика для математической логики.
- Интересно, что Буль не имел математического образования.

Итак, Логика – это наука о формах и способах мышления

Основные определения

- **Понятие** – это форма мышления, отражающая наиболее существенные признаки предмета, отличающие его от других предметов
- **Высказывание** – это форма мышления, выраженная с помощью понятий, посредством которой что-либо утверждают или отрицают о предметах, их свойствах и отношениях между ними. Высказывание – это повествовательное предложение, про которое можно однозначно сказать, что оно истинно или ложно.
- Высказывания бывают:
простыми (если никакая его часть сама не является высказыванием)
сложными (составными) (это высказывание, состоящее из простых высказываний)
- **Умозаключение** – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких высказываний (ПОСЫЛОК) по определенным правилам получают новые знания о предметах реального мира (ВЫВОДЫ). Умозаключения бывают
дедуктивные, индуктивные, по аналогии.

ВИДЫ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

1. В **дедуктивных** умозаклЮчениях рассуждения ведутся от общего к частному.

(Примеры: «Все металлы электропроводны», «Ртуть является металлом», «Ртуть электропроводна»)

Приведите примеры дедуктивных умозаклЮчений

2. В **индуктивных** умозаклЮчениях рассуждения ведутся от частного к общему.

(Примеры: Отдельные металлы – железо, медь, цинк, алюминий обладают свойством теплопроводности, следовательно можно сделать вывод, что все металлы электропроводны)

Приведите примеры индуктивных умозаклЮчений

3. УмозаклЮчение **по аналогии** представляет собой движение мысли от общности одних свойств и отношений у сравниваемых предметов или процессов к общности других свойств и отношений

Пример: химический состав Солнца и Земли сходен по многим показателям, поэтому когда на Солнце обнаружили новый элемент гелий, то по аналогии заключили, что такой элемент есть и на Земле

ПРИМЕРЫ:

- 1) Выбрать истинные высказывания:
 1. Сумма углов треугольника равна 180 градусов
 2. Основы формальной логики заложил Аристотель
 3. Все углы равностороннего треугольника равны 60 градусов
 4. Все стороны равнобедренного треугольника равны
 5. У ромба не все стороны равны
 6. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны
 7. Все металлы электропроводны
- 2) Привести 10 ложных высказываний из различных областей жизни
- 3) Сделать из предложенных суждений высказывание
 1. «Все металлы электропроводны»
 2. «Ртуть является металлом»
 1. Гипотенуза и катет – элементы в прямоугольном треугольнике
 2. Гипотенуза больше катета
 1. «Сократ – отец Софроникса»
 2. «Софроникс – сын Ксантиппы»

Булева алгебра

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ «НЕ»

Название: логическое отрицание (инверсия):

Обозначение в булевой алгебре: $\neg A$ \bar{A}

Читается: частица НЕ

Обозначение в языках программирования:

not A (Паскаль, Бейсик) !A (Си)

Логическое отрицание истинное высказывание (1) превращает в ложное (0), а ложное высказывание (0) в истинное (1).

A	\bar{A}
0	1
1	0

Таблица истинности логической операции инверсия

(таблица истинности – это таблица, в которой слева перечисляются всевозможные значения исходного высказывания 0 или 1, а в правой части в последнем столбце записывают результат выполнения логической операции для каждого из этих вариантов)

ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ «И»

Название: логическое умножение (конъюнкция):

Обозначение в булевой алгебре: $A \& B$ $A \wedge B$

(схожесть с алгеброй – значок пересечения \cap)

Читается: союзы И (А, И)

Обозначение в языках программирования:

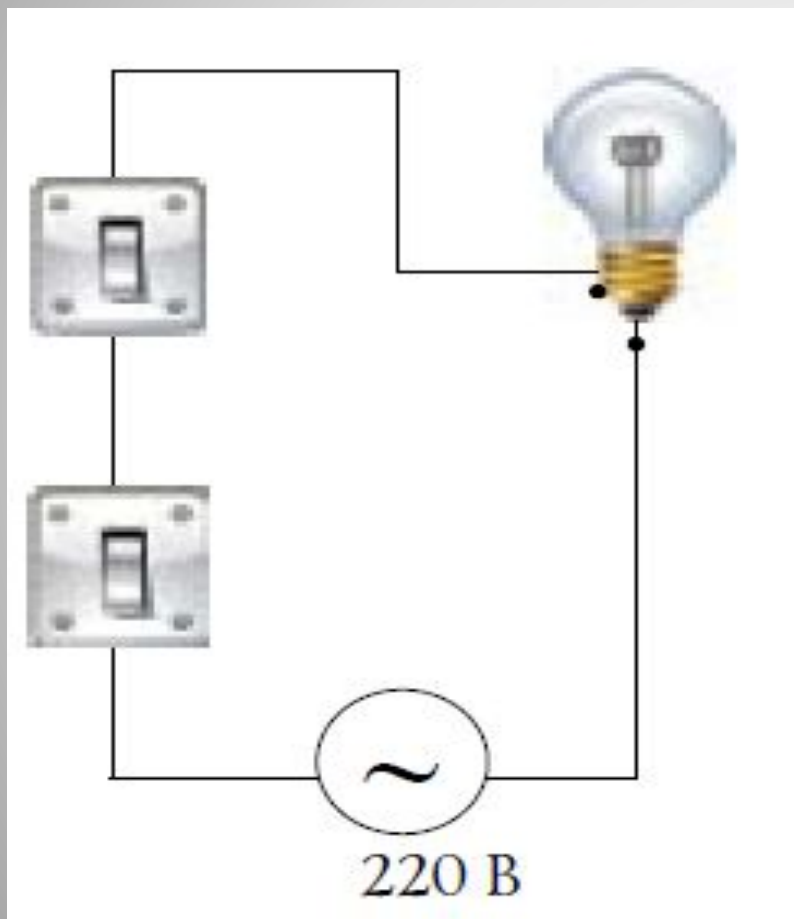
A and B (Паскаль, Бейсик) $A \& \& B$ (Си)

Логическая конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны (1) и ложна, когда ложно (0) хотя бы одно высказывание.

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности
логической операции
конъюнкция

КОНЪЮНКЦИЯ В ФИЗИКЕ



ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ «ИЛИ»

Название: логическое сложение (дизъюнкция):

Обозначение в булевой алгебре: $A \vee B$

(схожесть с алгеброй – значок объединения \cup)

Читается: союз ИЛИ

Обозначение в языках программирования:

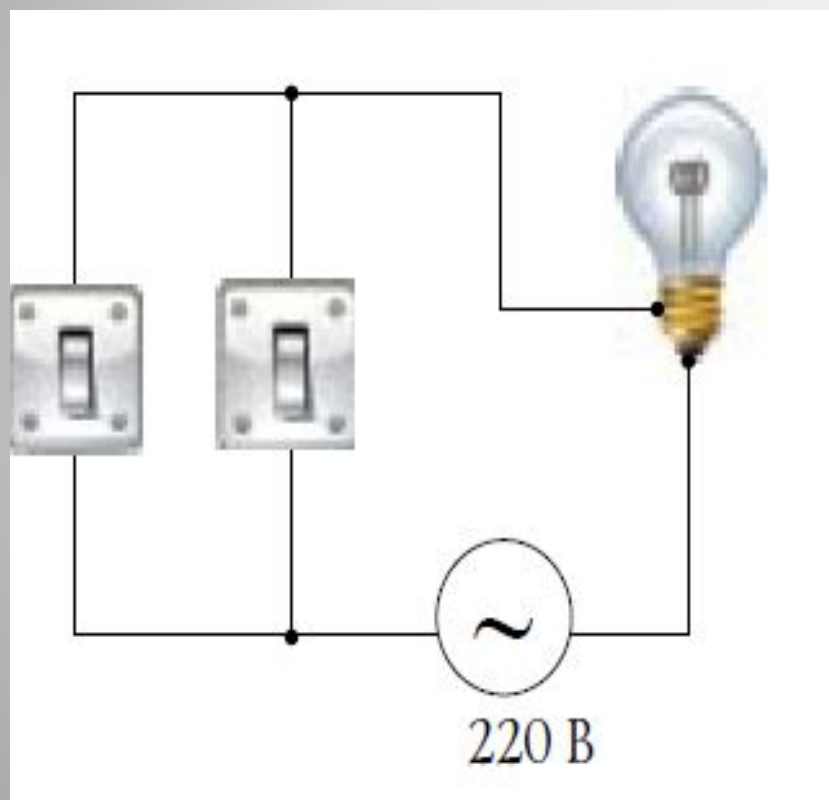
A or B (Паскаль, Бейсик) $A || B$ (Си)

Логическая дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно высказывание истинно (1) и ложна, когда ложны (0) оба высказывания.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица истинности
логической операции
дизъюнкция

ДИЗЪЮНКЦИЯ В ФИЗИКЕ



ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ»

Название: сложение по модулю 2
(разделительная дизъюнкция)

Обозначение в булевой алгебре: $A \oplus B$ $A \Delta B$

Читается: оборот «или только..., или только ...»

Обозначение в языках программирования:

A xor B (Паскаль) $A \wedge B$ (Си)

Логическое сложение по модулю 2 истинно (1) тогда и только тогда, когда высказывания не равны и ложно (0), когда высказывания одинаковы.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблица истинности
логической операции
исключающее или

ЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

«ИМПЛИКАЦИЯ»

Название: импликация (следование)

Обозначение в булевой алгебре: $A \rightarrow B$ $A \implies B$

Читается: если A , то B ; из A следует B ;

для того, чтобы A , необходимо, чтобы B ;

для того, чтобы B , достаточно, чтобы A

Логическая импликация ложна (0) тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное (0), в остальных случаях импликация истинна (1).

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности
логической функции
импликация

ЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ «ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ»

Название: эквивалентность (равносильность)

Обозначение в булевой алгебре:

$$A \leftrightarrow B \quad A \Leftrightarrow B \quad A \equiv B \quad A \sim B$$

Читается: A равносильно B; A тождественно равно B; для того, чтобы A, необходимо и достаточно B; A тогда и только тогда, когда B.

Логическая эквивалентность истинна (1) тогда и только тогда, когда высказывания одинаковы, и ложна (0), когда высказывания не равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности
логической функции
эквивалентность
(эквиваленция,
равнозначность)

ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ

«ШТРИХ ШЕФФЕРА»

Название: И-НЕ (штрих Шеффера)

Обозначение в булевой алгебре: $A|B$

(англ. *nand* – *not and* – отрицание конъюнкции)

Штрих Шеффера ложен (0) тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны, и истинен (1) в остальных случаях.

Штрих Шеффера

A	B	$A B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$A|B = \overline{A \cdot B}$$

Таблица истинности
логической операции Штрих
Шеффера

ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ

«СТРЕЛКА ПИРСА»

Название: ИЛИ-НЕ (стрелка Пирса)

Обозначение в булевой алгебре: $A \downarrow B$ или $A \uparrow B$
(англ. nor – not or – отрицание дизъюнкции)

Стрелка Пирса истинна (1) тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, и ложна (0) в остальных случаях.

Стрелка Пирса

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$A \downarrow B = \overline{A + B}$$

Таблица истинности
логической операции стрелка
Пирса

Логические переменные		Логические операции					
		отрицание	конъюнкция	дизъюнкция	исключающая дизъюнкция	импликация	эквиваленция
<i>A</i>	<i>B</i>	$\neg A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

ПРИОРИТЕТ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ:

- 1) В СКОБКАХ
- 2) НЕ
- 3) И
- 4) ИЛИ, 5) ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ
- 6) ИМПЛИКАЦИЯ
- 7) ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

$F_1(x, y) = 0$	Константа ложь или Тожественный нуль 0
$F_2(x, y) = x \& y$	Конъюнкция
$F_3(x, y) = \overline{x \rightarrow y}$	Отрицание импликации или <u>Коимпликация</u>
$F_4(x, y) = x$	Функция равна первому аргументу или Тожественная X
$F_5(x, y) = \overline{y \rightarrow x}$	Отрицание обратной импликации или <u>Коимпликация</u>
$F_6(x, y) = y$	Функция равна второму аргументу или Тожественная Y
$F_7(x, y) = x \oplus y$	Разделительная (строгая) дизъюнкция (исключающее ИЛИ, сумма по модулю 2)
$F_8(x, y) = x \vee y$	Дизъюнкция
$F_9(x, y) = x \downarrow y$	Стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции, ИЛИ-НЕ)
$F_{10}(x, y) = x \leftrightarrow y$	Эквивалентность
$F_{11}(x, y) = \bar{y}$	Отрицание второго аргумента
$F_{12}(x, y) = y \rightarrow x$	Обратная импликация
$F_{13}(x, y) = \bar{x}$	Отрицание первого аргумента
$F_{14}(x, y) = x \rightarrow y$	Импликация
$F_{15}(x, y) = x y$	Штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, И-НЕ)
$F_{16}(x, y) = 1$	Константа истина ($f(x, y) \equiv 1$) или Тожественная единица λ

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ:

1) $\neg\neg A = A$ Закон двойного отрицания

2) $A \vee A = A$ Законы идемпотентности

$$A \& A = A$$

3) $A \vee 0 = A$ Законы 0 и 1 (Законы исключения констант)

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \& 0 = 0$$

$$A \& 1 = A$$

4) $A \vee (A \& B) = A$ (Законы поглощения)

$$A \& (A \vee B) = A$$

5) $A \vee \neg A = 1$ (Закон исключения третьего)

$A \& \neg A = 0$ (Закон непротиворечия)

6) $A \& B = B \& A$ (Законы коммутативности или

$$A \vee B = B \vee A$$

переместительные законы)

7) $A \& (B \& C) = (A \& B) \& C = A \& B \& C$ (Законы ассоциативности или

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$$

сочетательные законы)

8) $\neg(A \vee B) = \neg A \& \neg B$ (Законы де Моргана – названы в честь шотландского

$$\neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B$$

математика и логика де Моргана)

9) $A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$ (Законы дистрибутивности или

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

распределительные законы)

$$10) A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

$$11) A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A) = (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B) = (A \vee \neg B) \& (\neg A \vee B)$$

$$12) A \oplus B = (A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$$



А. де Морган.

Иллюстрация с сайта

www.york.ac.uk

Тождественно истинная формула (тавтология) – это формула, которая принимает значение истина при любых значениях входящих в нее переменных.

Тождественно ложная формула – это формула, которая принимает значение ложь при любых значениях входящих в нее переменных.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – это логическая формула, в которой используются только операции отрицания (\neg), конъюнкции ($\&$), дизъюнкции (\vee) при следующих условиях:

- 1) отрицание применяется только к переменным;
- 2) конъюнкцией соединены переменные или их отрицания, причем каждая переменная в таком конъюнктивном выражении фигурирует ровно один раз;
- 3) дизъюнкции соединяют получившиеся конъюнктивные выражения.

В силу договоренности о порядке выполнения операций в СДНФ скобки не требуются.

КВАНТОРЫ

В математической логике наряду с логическими операциями используются и кванторы. **Квантор** (от лат. *quantum* — сколько) — логическая операция, дающая количественную характеристику области предметов, к которой относится выражение, получаемое в результате ее применения.

В обычном языке носителями таких характеристик служат слова типа *все, каждый, некоторый, любой, всякий, бесконечно много, существует, имеется, единственный, несколько, конечное число*, а также все количественные числительные. В формализованных языках, составной частью которых является исчисление предикатов, для выражения всех подобных характеристик оказывается достаточным кванторов двух видов: **квантора общности** и **квантора существования**.

Количественные связи	Названия квантора	Обозначения
все, каждый, любой, всякий, бесконечно много	Квантор общности	$\forall x A(x)$
существует, имеется, единственный, несколько, конечное число	Квантор существования	$\exists x A(x)$

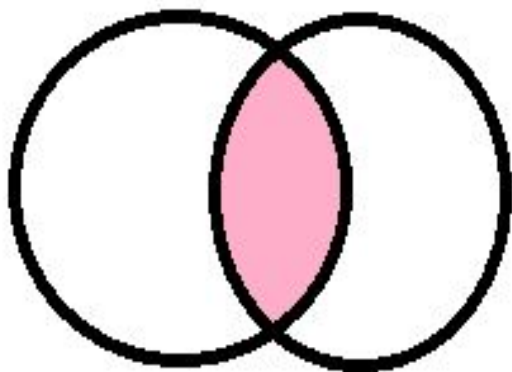
КВАНТОРЫ

При построении отрицания к высказыванию, содержащему квантор, действует следующее правило: частица “не” добавляется к сказуемому, квантор общности заменяется на квантор единственности и наоборот.

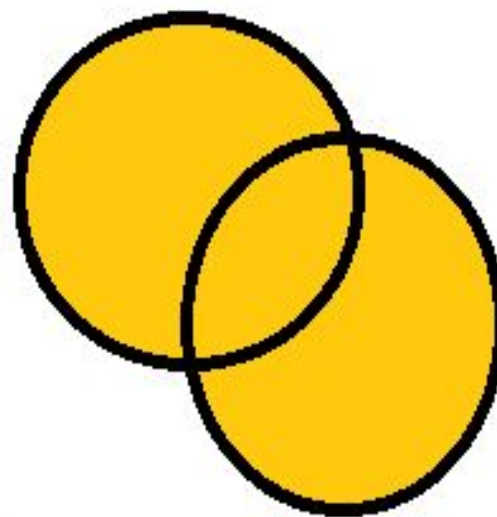
Рассмотрим пример.

Отрицанием высказывания “Все юноши 11-х классов — отличники” является высказывание “Неверно, что все юноши 11-х классов — отличники” или “Некоторые юноши 11-х классов — не отличники”.

Диаграммы Эйлера-Венна



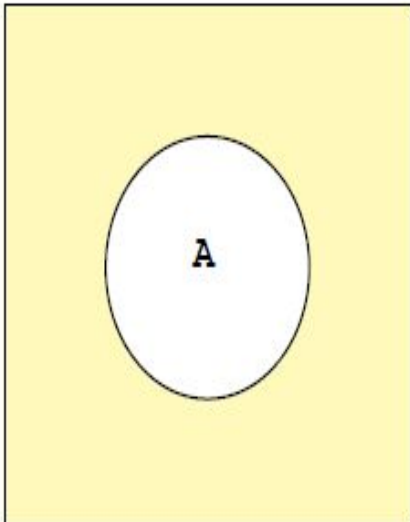
Пересечение понятий



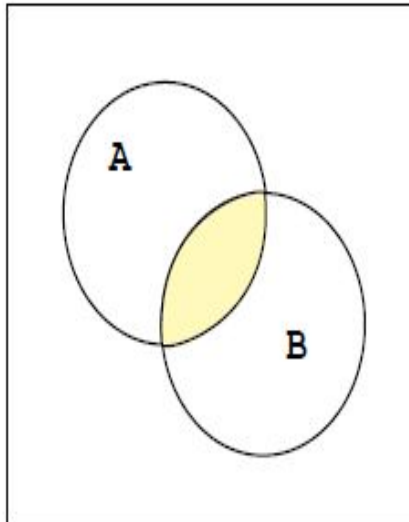
Объединение понятий

Изображения логических функций с помощью диаграмм Вена (кругов Эйлера)

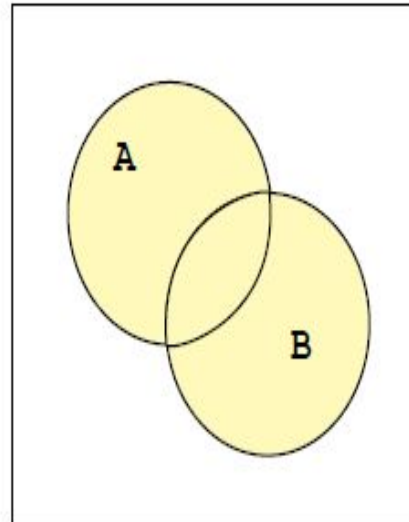
\bar{A}



$A \cdot B$



$A + B$



$A \rightarrow B$

