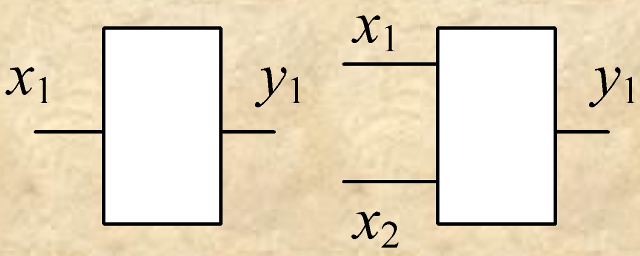
Лекция: Основы цифровой схемотехники

- **Цифровая интегральная схема (ИС)** – это микроэлектронное изделие, изготовленное методами интегральной технологии (чаще полупроводниковой), заключенное в самостоятельный корпус и выполняющее определенную функцию преобразования дискретных (цифровых) сигналов.
- Простейшие преобразования над цифровыми сигналами осуществляют цифровые ИС, получившие названия логических элементов (ЛЭ).
- Логические элементы относятся к элементам ***дискретного действия***, характеризующихся двумя устойчивыми состояниями. Переход от одного состояния в другое происходит скачком. Сигналы на выходе логического элемента имеют место лишь при определенном сочетании сигналов на входе.

- Зависимость выходного сигнала от сочетания входных называется ***логической функцией***.
- Для математического описания логических функций и операций существует специальная алгебра логики (алгебра Буля) Алгебра логики – это формальный аппарат описания логической стороны процессов в цифровых устройствах.

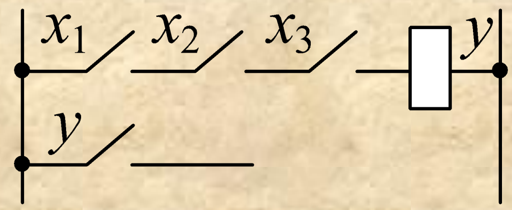
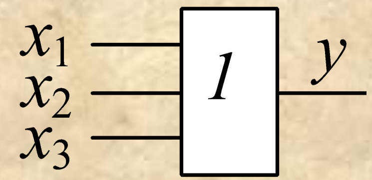
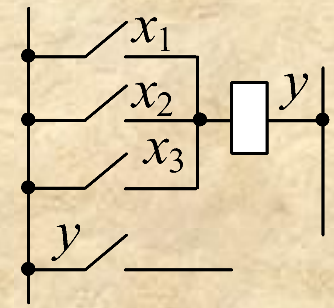
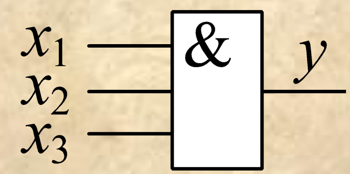
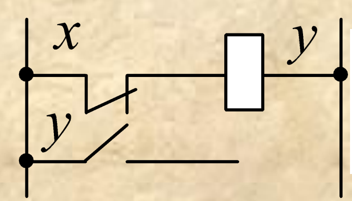
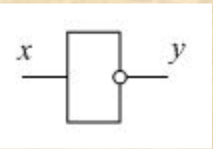
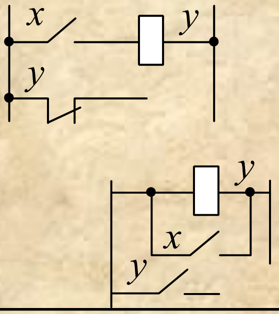
Общие условные обозначения простейших логических элементов



Математический аппарат анализа и синтеза цифровых систем – две переменные 0 и 1. Эти символы характеризуют состояние переменных или состояние их функций.

- Различным соединением простейших ЛЭ друг с другом можно выполнять логическую функцию любой сложности.

Логические функции и их релейные эквиваленты

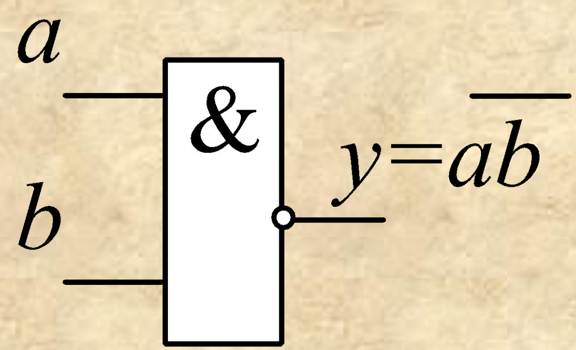
И (конъюнкция умножения)	$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$		
ИЛИ (дизъюнкция сложения)	$y = x_1 + x_2 + x_3$		
НЕ (отрицания)	$y = \bar{x}$	 	

- Набор трех логических функций: НЕ, И, ИЛИ называют булевым базисом:
- И – конъюнкция, логическое умножение, в релейно-контактной технике реализуется последовательным включением замыкающих контактов, управляемых сигналами аргументами. Может использоваться как вентиль.
- НЕ – инвертор, в релейно-контактной системе реализуется как размыкающий контакт.
- ИЛИ – дизъюнкция, логическое сложение, реализуется параллельным включением контактов.

- С помощью набора функций НЕ, И, ИЛИ можно выразить любую логическую функцию, сколь сложной бы она ни была.
- **Функция И – НЕ** – это функция двух и более аргументов, другими словами функция Шеффера.

Любой сигнал 0 на входе дает на выходе 1 и наоборот – все единицы на выходе дают 0 на выходе, т.е.

$$y = \overline{ab}$$

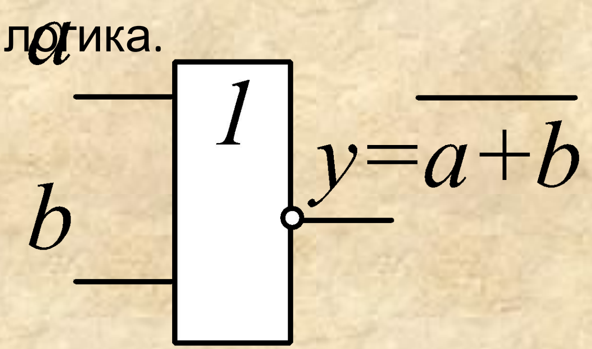


- Эта функция обладает логической полнотой и с помощью одной лишь функции И – НЕ можно построить любую сколь угодно сложную функцию. Вторым цепным ее свойством является то, что именно ее удалось эффективно реализовать средствами самой массовой интегральной технологии – ТТЛ. Поэтому уже четверть века функция И – НЕ наиболее распространена в цифровой автоматике.

- **Функция ИЛИ – НЕ – функция Вебба**.

$$y = \overline{a + b}$$

Эта функция также обладает ***логической полнотой*** и тоже удобна для интегрального исполнения, а особенно по технологии КМДП комплементарные металл диэлектрик п\проводник и ЭСЛ Эмиттерно-связанная логика.



x_1	0	0	1	1	Название	Условные обозначения
x_2	0	1	0	1		
f_0	0	0	0	0	Константа 0	$y_0 = f_0(x_1, x_2) = 0$
f_1	0	0	0	1	Коньюнкция или логическое умножение (И)	$y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$
f_2	0	0	1	0	Отрицание импликации	$y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2$
f_3	0	0	1	1	Переменная x_1	$y_3 = f_3(x_1, x_2) = x_1$
f_4	0	1	0	0	Отрицание импликации	$y_4 = f_4(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2$
f_5	0	1	0	1	Переменная x_2	$y_5 = f_5(x_1, x_2) = x_2$
f_6	0	1	1	0	Неравнозначность (сумма по mod 2)	$y_6 = f_6(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \bmod 2$
f_7	0	1	1	1	Дизъюнкция или логическое суммирование (ИЛИ)	$y_7 = f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

f_8	1	0	0	0	Отрицание дизъюнкции (ИЛИ – НЕ)	$y_8 = f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$
f_9	1	0	0	1	Равнозначность	$y_9 = f_9(x_1, x_2) = (x_1 \equiv x_2)$
f_{10}	1	0	1	0	Отрицание x_2	$y_{10} = f_{10}(x_1, x_2) = x_2$
f_{11}	1	0	1	1	Импликация	$y_{11} = f_{11}(x_1, x_2) = (x_1 \vee \bar{x}_2)$
f_{12}	1	1	0	0	Отрицание x_1 (НЕ)	$y_{12} = f_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$
f_{13}	1	1	0	1	Импликация	$y_{13} = f_{13}(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2$
f_{14}	1	1	1	0	Отрицание коньюнкции (И – НЕ)	$y_{14} = f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2}$
f_{15}	1	1	1	1	Константа 1	$y_{15} = f_{15}(x_1, x_2) = 1$

Основные тождественные отношения булевой алгебры

Остаточное тождество	Дуальное тождество	Название тождества
$a \vee 0 = a$	$a1 = a$	–
$a \vee 1 = 1$	$a0 = 0$	–
$a \vee b = b \vee a$	$ab = ba$	Коммутативность
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c$	$(ab)c = a(bc)$	Ассоциативность
$a(b \vee c) = ab \vee ac$	$a \vee bc = (a \vee b)(a \vee$	Дистрибутивность

$a \vee a = a$	$aa = a$	–
$a \vee ab = a$	$(a(a \vee b)) = a$	Поглощение
$ab \vee \bar{a}b = b$	$(a \vee b)(a \vee \bar{b}) = a$	Склеивание
$\overline{a \vee b} = \bar{a}\bar{b}$	$\overline{ab} = \bar{a} \vee \bar{b}$	Правило Моргана
$a \vee b = \overline{\bar{a}\bar{b}}$	$ab = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$	Правило Моргана
$a \vee \bar{a} = 1$	$a\bar{a} = 0$	–
$\bar{0} = 1$	$\bar{1} = 0$	–
$a(\bar{a} \vee b) = ab$	$a \vee \bar{a}b = a \vee b$	–

Для этого введены следующие обозначения:

1. Обозначение двух видов входной переменной *x*.

- Переменную *x* без отрицания обозначим *x^1*,
- Переменную *x* с отрицанием обозначим *x^0*,

$$x^{\alpha} = \begin{cases} \bar{x} \text{ при } \alpha = 0, \\ x \text{ при } \alpha = 1. \end{cases}$$

2. Дизъюнкцию от *n* аргументов x_i обозначим $\underset{i=1}{\overset{n}{\vee}} x_i$ т.е. $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n = \underset{i=1}{\overset{n}{\vee}} x_i$

3. Набор аргументов x_i, т.е. выражение составного кодового сигнала, обозначим

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Тогда

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\vec{x})$$

- Для любой функции и для любого *i* возможно соотношение

$$f(\vec{x}) = x_i^0 f(x_1,....,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n) \vee x_i^1 f(x_1,....,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n),$$

- которое легко проверить, подставляя в левую и правую части значения $x_i = 0$ и $x_i = 1$. Применяя соотношение (6.1) последовательно к переменной $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим

$$f(\vec{x}_n) = \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} f(\vec{\alpha})...,$$

- где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n);\ \alpha_i \in (0,1)$, а дизьюнкция берется по всем параметрам $\vec{\alpha}$

- Представление функции по этой форме *называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой* **(СДНФ)** функции.

- Рассмотрим пример. Для функции $f_6(x,y)$ СДНФ имеет вид

$$f_6(x,y)=x^0 f_6(0,y)\vee x^1 f_6(1,y)=x^0 y^0 f_6(0,0)\vee x^0 y^1 f_6(0,1)\vee$$
$$\vee\, x^1 y^0 f_6(1,0)\vee x^1 y^1 f_6(1,1)$$

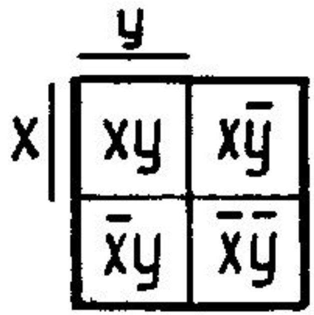
- Поскольку для функции f_6 выполняются условия

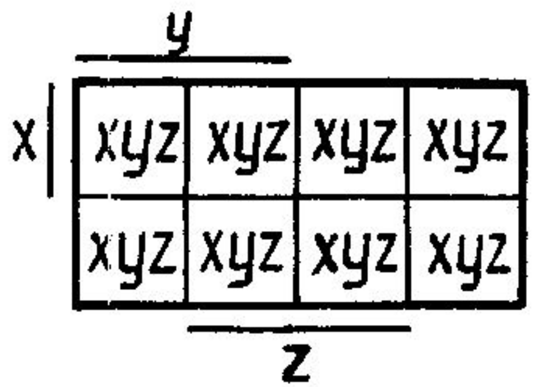
$$f_6(0,0)=0;\;\; f_6(0,1)=1;\;\; f_6(1,0)=1 \text{ и } f_6(1,1)=0.$$

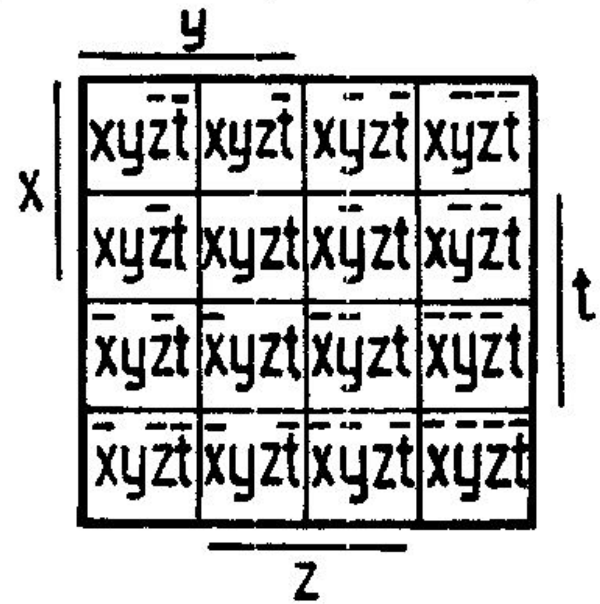
то

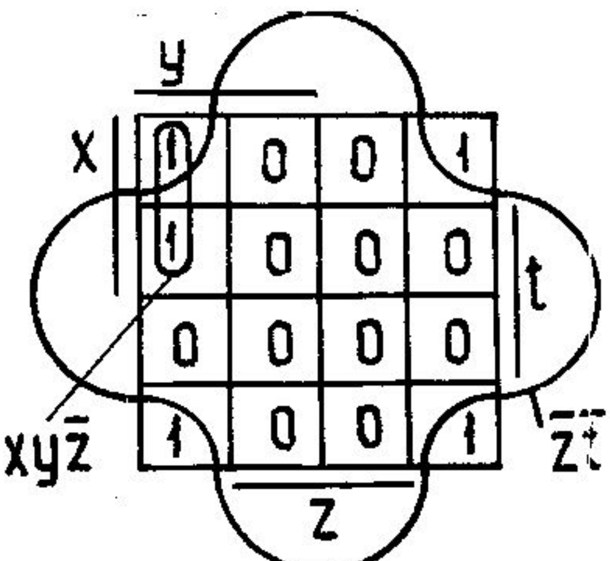
$$f_6(x,y)=\bar{x}\bar{y}0\vee \bar{x}y1\vee x\bar{y}1\vee xy0=\bar{x}y\vee x\bar{y}.$$

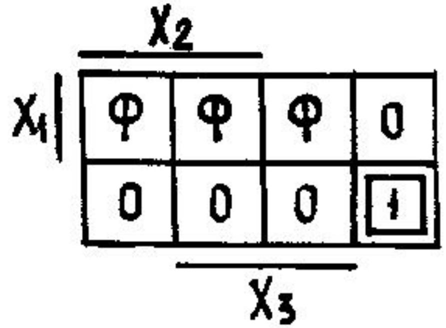
- Комбинационная схема, построенная по СНФ, как правило, может быть упрощена.
- Упрощение (минимизация) СНФ функции удобно производить при помощи таблиц, в которых все соседние конъюнкции находятся рядом. Такая таблица называется диаграммой Вейча. Для функций, зависящих от двух, трех, четырех переменных, диаграммы Вейча показаны на рисунке

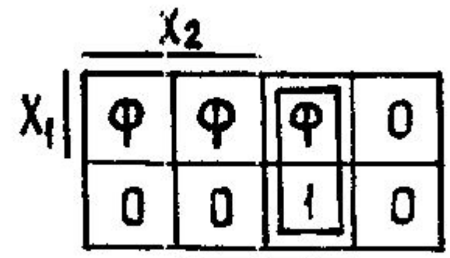

y
x
xy
xȳ
x̄y
x̄ȳ


y
x
z


y
x
t
z


y
x
t
z
xyz̄
z̄t̄


x2
x1
x3


x2
x1

- **Рассмотрим пример.** Пусть задана функция

$$f(x,y,z,t)=xy\bar{z}\bar{t}\vee xy\bar{z}t\vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t}\vee x\bar{y}\,\bar{z}t\vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z}\bar{t}$$

- Наличие 1 в данной клетке диаграммы Вейча означает, что в СДНФ функции имеется конъюнкция, указанная в данной клетке, а наличие 0 означает отсутствие указанной конъюнкции в СДНФ упрощаемой функции. Из диаграммы Вейча (рисунок 6.2) видно, что эта функция содержит две группы соседних конъюнкций. Одна группа $xyz\bar{t}$ и $xy\bar{z}\bar{t}$ состоит из двух конъюнкций $xy\bar{z}\bar{t}, x\bar{y}\,\bar{z}\bar{t}, \bar{x}y\bar{z}\bar{t}, \bar{x}\,\bar{y}\bar{z}\bar{t}$, а вторая из четырех

- После склеивания по указанным группам получим упрощенное представление функции

$$f(x, y, z, t) = xy\bar{z} \vee \bar{z}\bar{t}$$

- Таким образом, нахождение по диаграмме Вейча минимальный ДНФ сводится к отысканию наиболее коротких конъюнкций, покрывающих все единицы функции.

X_2

X_1	$X_1X_2\bar{X}_3\bar{X}_4$	$X_1X_2X_3\bar{X}_4$	$X_1\bar{X}_2X_3\bar{X}_4$	$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3\bar{X}_4$	
	$X_1X_2\bar{X}_3X_4$	$X_1X_2X_3X_4$	$X_1\bar{X}_2X_3X_4$	$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3X_4$	X_4
	$\bar{X}_1X_2\bar{X}_3X_4$	$\bar{X}_1X_2X_3X_4$	$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3X_4$	$\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3X_4$	
	$\bar{X}_1X_2\bar{X}_3\bar{X}_4$	$\bar{X}_1X_2X_3\bar{X}_4$	$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3\bar{X}_4$	$\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\bar{X}_4$	

X_3