# Параметрическое линейное программирование

*Выполнила: студентка*
*3 курса, группы ММ-61*
*Лучинина Екатерина*
*Проверил: Щиканов*
*Алексей Юрьевич*

# Сущность задачи параметрического ЛП

Параметрическое линейное программирование представляет собой один из разделов математического программирования, изучающий задачи, в которых целевая функция или ограничения зависят от одного или нескольких параметров.

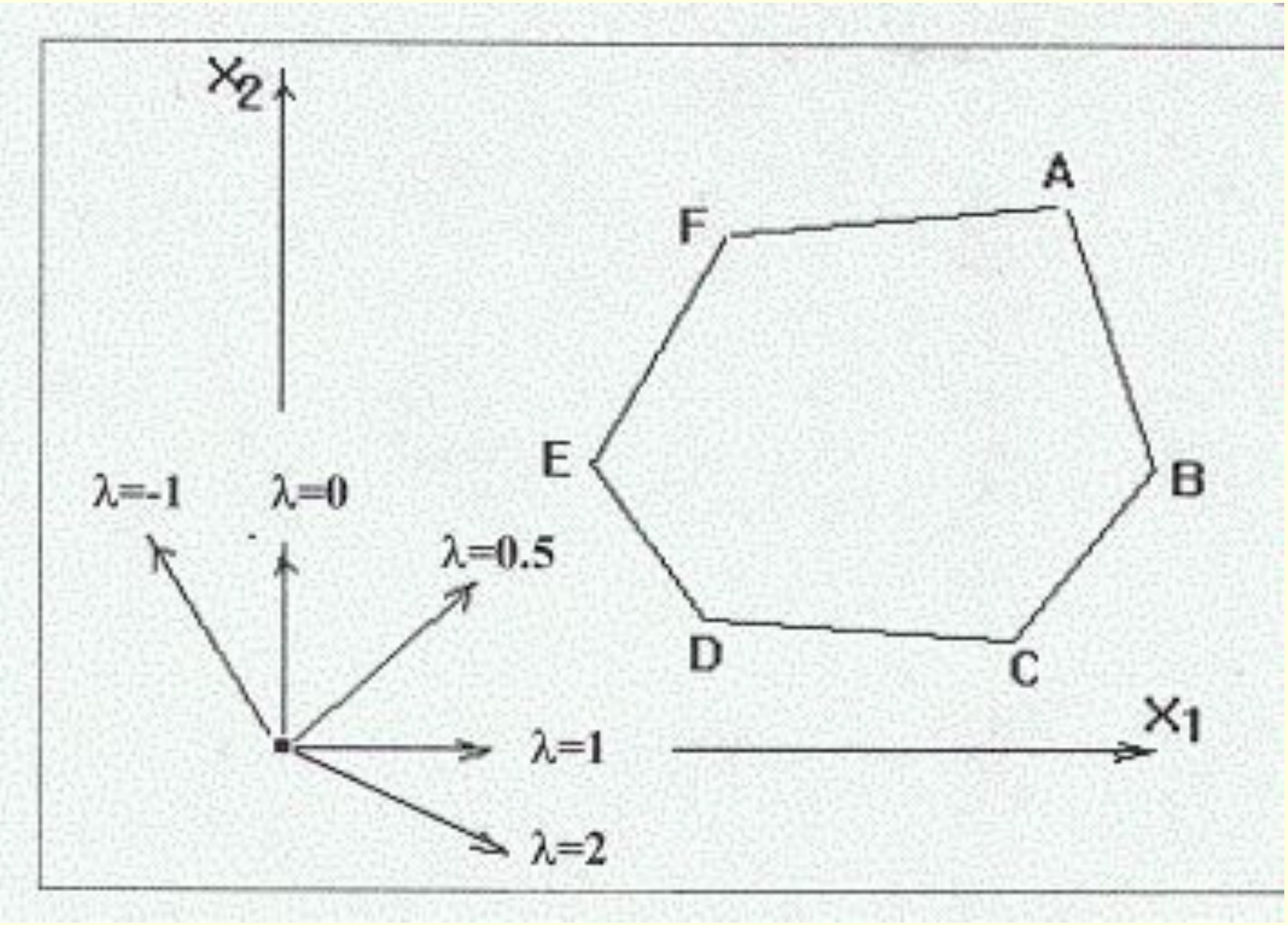
С математической точки зрения параметрическое программирование выступает как одно из средств анализа чувствительности решения к вариации исходных данных, оценки устойчивости решения.

# Геометрическая интерпретация задачи параметрического ЛП

Если обратиться к геометрической интерпретации задачи, то можно заметить, что вектор-градиент линейной формы определяется её параметром. Например, для целевой функции $L(X, \lambda) = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ при различных значениях параметра $\lambda$ градиент определяет различные направления роста функции.

Нетрудно видеть, что, если при некотором значении параметра максимум достигается в вершине A, то небольшая вариация этого значения несколько изменит направление градиента, но не изменит положение точки максимума. Отсюда напрашивается вывод, что некоторый план, оптимальный при $\lambda = \lambda_0$ оптимален и в окрестности $\lambda_0$, т.е. при $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ где $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$.

# Геометрическая интерпретация задачи параметрического ЛП



# Алгоритм решения задачи параметрического ЛП

1. Считая значение параметра равным некоторому числу , находим оптимальный план X* или устанавливаем неразрешимость полученной задачи линейного программирования.
2. Определяют множество значений параметра , для которых найденный оптимальный план является оптимальным или задача неразрешима. Эти значения параметра исключаются из рассмотрения.
3. Полагают значение параметра равным некоторому числу, принадлежавшему оставшейся части промежутка, и находят решение полученной задачи линейного программирования.
4. Определяют множество значений параметра , для которых новый оптимальный план остается оптимальным или задача неразрешима. Вычисления повторяются до тех пор, пока не будут исследованы все значения параметра .

# Пример задачи параметрического ЛП

Предприятие должно выпустить два вида продукции А и В, для изготовления которых используется три вида сырья, нормы расходов заданы в таблице. Известно, что цена на А единицу продукции может изменяться от 2 до 12 у.е., для В от 13 до 3 у.е. Найти оптимальные планы выпуска для заданных интервалов цен.

| | А | В | Запасы |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 16 |
| 2 | 2 | 2 | 22 |
| 3 | 6 | 3 | 36 |

# Решение задачи:

Строим систему ограничений, находим целевую функцию:

$$C_1 \in [2;12]$$

$$C_2 \in [13;3]$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 + x_2 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$L(x) = (2+\lambda)x_1 + (13-\lambda)x_2$$

$$C_1 = 2 + \lambda, \lambda \in [0;10]$$

$$C_2 = 13 + \frac{3-13}{12-2}\lambda = 13 - \lambda$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

В соответствии с ограничениями и полученными параметрами строим первую симплекс таблицу:

Решение начинаем при $\lambda = 0$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 11 |
| $x_5$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 12 |
| $\Delta_j$ | $-2-\lambda$ | $\lambda$ -13 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 5 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 11 |
| $x_5$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 12 |
| $\Delta_j$ | $11-2\lambda$ | 0 | 0 | $13-\lambda$ | 0 | $143-11\lambda$ |

При $\lambda = 0$ решение найдено. Найдем интервал изменения $\lambda$, при котором решение будет оставаться оптимальным.

$$\begin{cases} 11 - 2\lambda \geq 0 \\ 13 - \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \leq \dfrac{11}{2} \\ \lambda \leq 13 \end{cases}$$

При $\lambda > \dfrac{11}{2}, \Delta_1 < 0 \Rightarrow$ выбранный столбец является разрешающим. Для нахождения нового оптимального решения при $\lambda > \dfrac{11}{2}$

$$\lambda \in \left[0; \frac{11}{2}\right] \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 11$$

$$L_1(x) = 143 - 11\lambda$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 2 | -3 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 2 | -1 | 10 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | 0 | $24-3\lambda$ | $-11+2\lambda$ | $132-9\lambda$ |

$$\begin{cases} 24 - 3\lambda \ge 0 \\ -11 + 2\lambda \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \le 8 \\ \lambda \ge \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

$$\lambda \in \left[\frac{11}{2};8\right] \to x_1 = 1, x_2 = 10$$

$$L_2(x) = 132 - 9\lambda$$

Ищем решение при $\lambda > 8$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 | -3/2 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 2 | 8 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1/2 | 0 | -1/2 | 2 |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | $-12+3/2\lambda$ | 0 | $25-5/2\lambda$ | $108-6\lambda$ |

$$\begin{cases} -12+\dfrac{3}{2}\lambda \geq 0 \\ 25-\dfrac{5}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \geq 8 \\ \lambda \leq 10 \end{cases}$$

$$\lambda \in [8;10] \to x_1 = 2, x_2 = 8$$

$$L_3(x) = 108 - 6\lambda$$

Ответ: $\lambda \in \left[0; \frac{11}{2}\right] \to x_1 = 0, x_2 = 11$

$$L_1(x) = 143 - 11\lambda$$

$$\lambda \in \left[\frac{11}{2}; 8\right] \to x_1 = 1, x_2 = 10$$

$$L_2(x) = 132 - 9\lambda$$

$$\lambda \in [8;10] \to x_1 = 2, x_2 = 8$$

$$L_3(x) = 108 - 6\lambda$$