Параметрическое линейное программирование

Выполнила: студентка
3 курса, группы ММ-61
Лучинина Екатерина
Проверил: Щиканов
Алексей Юрьевич

Сущность задачи параметрического ЛП

Параметрическое линейное программирование представляет собой один из разделов математического программирования, изучающий задачи, в которых целевая функция или ограничения зависят от одного или нескольких параметров.

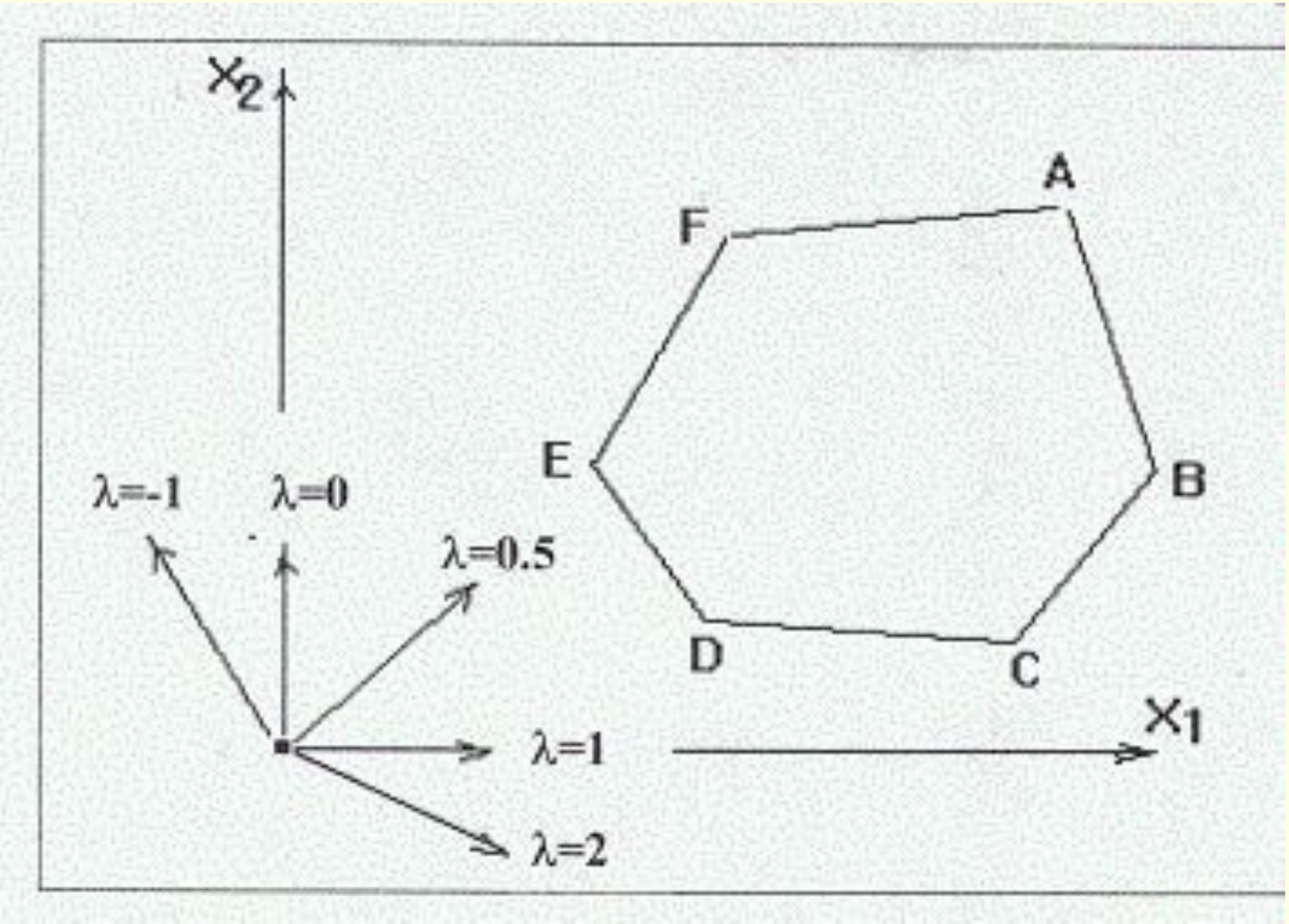
С математической точки зрения параметрическое программирование выступает как одно из средств анализа чувствительности решения к вариации исходных данных, оценки устойчивости решения.

Геометрическая интерпретация задачи параметрического ЛП

Если обратиться к геометрической интерпретации задачи, то можно заметить, что вектор-градиент линейной формы определяется её параметром. Например, для целевой функции $L(X, \lambda) = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ при различных значениях параметра λ градиент определяет различные направления роста функции.

Нетрудно видеть, что, если при некотором значении параметра максимум достигается в вершине А, то небольшая вариация этого значения несколько изменит направление градиента, но не изменит положение точки максимума. Отсюда напрашивается вывод, что некоторый план, оптимальный при $\lambda = \lambda_0$ оптимален и в окрестности λ_0, т.е. при $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ где $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$.

Геометрическая интерпретация задачи параметрического ЛП



Алгоритм решения задачи параметрического ЛП

1. Считая значение параметра равным некоторому числу , находим оптимальный план X* или устанавливаем неразрешимость полученной задачи линейного программирования.
2. Определяют множество значений параметра , для которых найденный оптимальный план является оптимальным или задача неразрешима. Эти значения параметра исключаются из рассмотрения.
3. Полагают значение параметра равным некоторому числу, принадлежавшему оставшейся части промежутка, и находят решение полученной задачи линейного программирования.
4. Определяют множество значений параметра , для которых новый оптимальный план остается оптимальным или задача неразрешима. Вычисления повторяются до тех пор, пока не будут исследованы все значения параметра .

Пример задачи параметрического ЛП

Предприятие должно выпустить два вида продукции А и В, для изготовления которых используется три вида сырья, нормы расходов заданы в таблице. Известно, что цена на А единицу продукции может изменяться от 2 до 12 у.е., для В от 13 до 3 у.е. Найти оптимальные планы выпуска для заданных интервалов цен.

	A	B	Запасы
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36

Решение задачи:

Строим систему ограничений, находим целевую функцию:

$$C_1 \in [2;12]$$

$$C_2 \in [13;3]$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 + x_2 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$L(x) = (2+\lambda)x_1 + (13-\lambda)x_2$$

$$C_1 = 2 + \lambda, \lambda \in [0;10]$$

$$C_2 = 13 + \frac{3-13}{12-2}\lambda = 13 - \lambda$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

В соответствии с ограничениями и полученными параметрами строим первую симплекс таблицу:

Решение начинаем при $\lambda = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	4	1	1	0	0	16
x_5	1	1	0	1	0	11
x_5	2	1	0	0	1	12
Δ_j	$-2-\lambda$	λ -13	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	3	0	1	-1	0	5
x_5	1	1	0	1	0	11
x_5	2	1	0	0	1	12
Δ_j	$11-2\lambda$	0	0	$13-\lambda$	0	$143-11\lambda$

При $\lambda = 0$ решение найдено. Найдем интервал изменения λ, при котором решение будет оставаться оптимальным.

$$\begin{cases} 11 - 2\lambda \geq 0 \\ 13 - \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \leq \dfrac{11}{2} \\ \lambda \leq 13 \end{cases}$$

При $\lambda > \dfrac{11}{2}, \Delta_1 < 0 \Rightarrow$ выбранный столбец является разрешающим. Для нахождения нового оптимального решения при $\lambda > \dfrac{11}{2}$

$$\lambda \in \left[0; \frac{11}{2}\right] \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 11$$

$$L_1(x) = 143 - 11\lambda$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	2	-3	2
x_2	0	1	0	2	-1	10
x_1	1	0	0	-1	1	1
Δ_j	0	0	0	$24-3\lambda$	$-11+2\lambda$	$132-9\lambda$

$$\begin{cases} 24 - 3\lambda \geq 0 \\ -11 + 2\lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \leq 8 \\ \lambda \geq \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

$$\lambda \in \left[\frac{11}{2};8\right] \to x_1 = 1, x_2 = 10$$

$$L_2(x) = 132 - 9\lambda$$

Ищем решение при $\lambda > 8$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	0	0	1/2	1	-3/2	1
x_2	0	1	-1	0	2	8
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	2
Δ_j	0	0	$-12+3/2\lambda$	0	$25-5/2\lambda$	$108-6\lambda$

$$\begin{cases} -12+\dfrac{3}{2}\lambda \geq 0 \\ 25-\dfrac{5}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \geq 8 \\ \lambda \leq 10 \end{cases}$$

$$\lambda \in [8;10] \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8$$

$$L_3(x) = 108 - 6\lambda$$

Ответ: $\lambda \in \left[0; \frac{11}{2}\right] \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 11$

$$L_1(x) = 143 - 11\lambda$$

$$\lambda \in \left[\frac{11}{2}; 8\right] \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 10$$

$$L_2(x) = 132 - 9\lambda$$

$$\lambda \in [8; 10] \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8$$

$$L_3(x) = 108 - 6\lambda$$