Лекция 6

Перестановки

Перестановки

Перестановкой порядка N называется расположение N различных объектов в ряд в некотором порядке.

Например, для трех объектов — a, b и c — существует шесть перестановок:

abc, acb, bac, bca. cab, cba.

Для множества из N элементов можно построить $N!$ различных перестановок: первую позицию можно занять N способами, вторую — $(N-1)$ способом, так как один элемент уже занят, и т. д. На последнее место можно поставить только один оставшийся элемент.

Следовательно, общее количество вариантов расстановки равно

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 1 = N!$$

Далее будем рассматривать перестановки элементов множества

$\{1, 2, 3, \ldots, N\}$

Инверсии

Пусть даны базовое множество из N элементов 1,2, 3,..., N и его перестановка $a_1, a_2, ..., a_{N-1}, a_N$

Пара (a_i, a_j) называется *инверсией* (*инверсионной парой*) перестановки , если $a_i > a_j$ при $i < j$.

Например, перестановка 4, 1, 3, 2 имеет четыре инверсии:

(4,1), (3,2), (4,3) и (4,2).

Единственной перестановкой, не содержащей инверсий, является упорядоченная перестановка 1, 2, 3, ... , N.

Таким образом, каждая инверсия — это пара элементов перестановки, нарушающих ее упорядоченность.

Таблицей инверсий перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_N$ называется последовательность чисел $b_1, b_2 \ldots, b_N$, где b_j есть число элементов перестановки, больших j и расположенных левее j

(т. е. количество инверсий вида (x, j), при $x > j$).

Например,

для перестановки **5 9 1 8 2 6 4 7 3**

таблица инверсий: **2 3 6 4 0 2 2 1 0**.

Свойство элементов таблицы инверсий:

$$b_N = 0,$$
$$\ldots$$
$$0 \le b_i \le N - i,$$
$$\ldots$$
$$0 \le b_1 \le N - 1.$$

Утверждение

Таблица инверсий единственным образом определяет соответствующую ей перестановку.

Построение перестановки по таблице инверсий

1 способ: проход по таблице инверсий справа налево

Создается заготовка перестановки из одного максимального числа. На каждом шаге в нее вставляется следующий по величине элемент с учетом того, сколько элементов, больших него, должно стоять перед ним.

Пример:

Таблица инверсий: 2 3 6 4 0 2 2 1 0

1. 9
2. 9 8
3. 9 8 7
4. 9 8 6 7
5. 5 9 8 6 7
6. 5 9 8 6 4 7
7. 5 9 8 6 4 7 3
8. 5 9 8 2 6 4 7 3
9. 5 9 1 8 2 6 4 7 3

Алгоритм П1:

построение перестановки по таблице инверсий справа налево

Вход:

$N > 0$ - количество элементов перестановки,

$b_1, b_2 \ldots, b_N$ – таблица инверсий,

$0 \le b_j \le N - j$.

P := пустая последовательность;

цикл по j от N вниз до 1

вставить число j в P после b_j элементов;

конец цикла;

Выход:

P – перестановка, соответствующая данной таблице инверсий

Построение перестановки по таблице инверсий

2 способ: проход по таблице инверсий слева направо

Создается заготовка пустой перестановки длины N.

На каждом шаге для каждого элемента перестановки, начиная с 1, отсчитывается в ней столько пустых ячеек, какое число записано в соответствующей позиции в таблице инверсий. В следующее за ними пустое место вставляется этот элемент.

Пример:

Таблица инверсий: `2 3 6 4 0 2 2 1 0`

Перестановка:

5	9	1	8	2	6	4	7	3

Алгоритм П2:

построение перестановки по таблице инверсий слева направо

Вход:

$N > 0$ - количество элементов перестановки,

$b_1, b_2 \ldots, b_N$ – таблица инверсий,

$0 \le b_j \le N - j$.

P := последовательность из N пустых элементов;

цикл по i **от** 1 **до** N **с шагом** 1 **выполнять**

пропустить b_i *пустых мест в* P;

поместить i *на следующее пустое место;*

конец цикла

Выход:

P – перестановка, соответствующая данной таблице инверсий

Инверсионный метод поиска всех перестановок

Таблица инверсий однозначно определяет перестановку и каждая перестановка имеет только одну таблицу инверсий.

Следовательно, если мы сумеем перебрать все таблицы инверсий, то с помощью алгоритмов П1 или П2 сможем по ним восстановить все перестановки.

Рассмотрим таблицу инверсий как *N*-значное число в такой необычной «системе счисления»: количество цифр, которое можно использовать в *i*-м разряде (с конца, начиная с 0) равно *i*.

Возьмем «минимальную» таблицу и будем последовательно прибавлять к ней, как к числу, единицу, пользуясь, например, алгоритмом сложения с переносом для многоразрядных чисел, модифицированным для нашей «системы счисления».

Генерация таблиц инверсии

4	3	2	1	0	
0	0	0	0	0	Шаг 0
0	0	0	1	0	Шаг 1
0	0	1	0	0	Шаг 2
0	0	1	1	0	Шаг 3
0	0	2	0	0	Шаг 4
0	0	2	1	0	Шаг 5
0	1	0	0	0	Шаг 6
0	1	0	1	0	Шаг 7
0	1	1	0	0	Шаг 8
0	1	1	1	0	Шаг 9
0	1	2	0	0	Шаг 10
…	…	…	…	…	…
4	3	2	1	0	Шаг 119

Алгоритм И1:

нахождение следующей таблицы инверсий

Пусть B = b_1, b_2, ..., b_N – таблица инверсий, построенная на предыдущем шаге.

Тогда следующая таблица инверсий получается из нее прибавлением к ней единицы:

```
i := N;
flag := истина;
пока flag выполнять
        x := b_i + 1;
       если x > N – i
       то
          начало
            b_i := 0;
            i  :=  i –1;
           конец
       иначе
         начало
            b_i := x;
            flag := ложь;
          конец
конец пока
```

Алгоритм Дейкстры: поиск следующей по алфавиту перестановки

Пусть даны две перестановки

$$b = b_1, b_2 \ldots, b_N \text{ и}$$

$$c = c_1, c_2 \ldots, c_N$$

набора 1, 2, ..., N.

Говорят, что перестановка b предшествует перестановке c в алфавитном (лексикографическом) порядке, если для минимального значения k, такого что $b_k \neq c_k$, справедливо $b_k < c_k$.

Например, перестановка **1 2 3 4 5** предшествует перестановке **1 2 4 5 3** (здесь $k = 3$).

Первой перестановкой в алфавитном порядке является

перестановка **1,2,3, ..., *N***,

а последней — ***N*,*N*-1,N-2,...,1**

Идея алгоритма Дейкстры:

определить каким-либо образом функцию, которая по заданной перестановке выдает непосредственно следующую за ней в алфавитном порядке, и применять ее последовательно к собственным результатам начиная с самой первой перестановки, пока не будет получена последняя.

Например, для перестановки

1 4 6 2 9 5 8 7 3

следующей по алфавиту является перестановка

1 4 6 2 9 7 3 5 8.

Алгоритм Дейкстры:
генерация следующей по алфавиту перестановки

Вход: $N > 0$ — количество элементов;

$a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N$ – предыдущая перестановка.

Шаг 1. Просматривая перестановку, начиная с последнего элемента, найдем такой номер i, что $a_{i+1} > \ldots > a_N$ и $a_i < a_{i+1}$.

Если такого i нет, то последовательность упорядочена по убыванию и следующей перестановки нет: конец алгоритма.

Шаг 2. Найти в «хвосте» $a_{i+1}, \ldots, a_N$ элемент a_j, такой что $i+1 \le j \le N$, a_j есть наименьшее значение, удовлетворяющее условию $a_j > a_i$. После этого поменять местами a_i и a_j.

Шаг 3. Упорядочить «хвост» $a_{i+1}, \ldots, a_N$ по возрастанию. Для этого достаточно его инвертировать (обернуть в обратном порядке).

Выход: следующая по алфавиту перестановка за данной.

Пример построения следующей по алфавиту перестановки

Для перестановки

1 4 6 2 9 5 8 7 3

Найти следующую по алфавиту.

Шаг 1: 1 4 6 2 9 5 8 7 3

i *j*

Шаг 2: Поменять местами

Шаг 3: Обернуть хвост

Рекурсивный метод поиска всех перестановок

Метод рекурсивного перебора перестановок основан на идее сведения исходной задачи к аналогичной задаче на меньшем наборе входных данных.

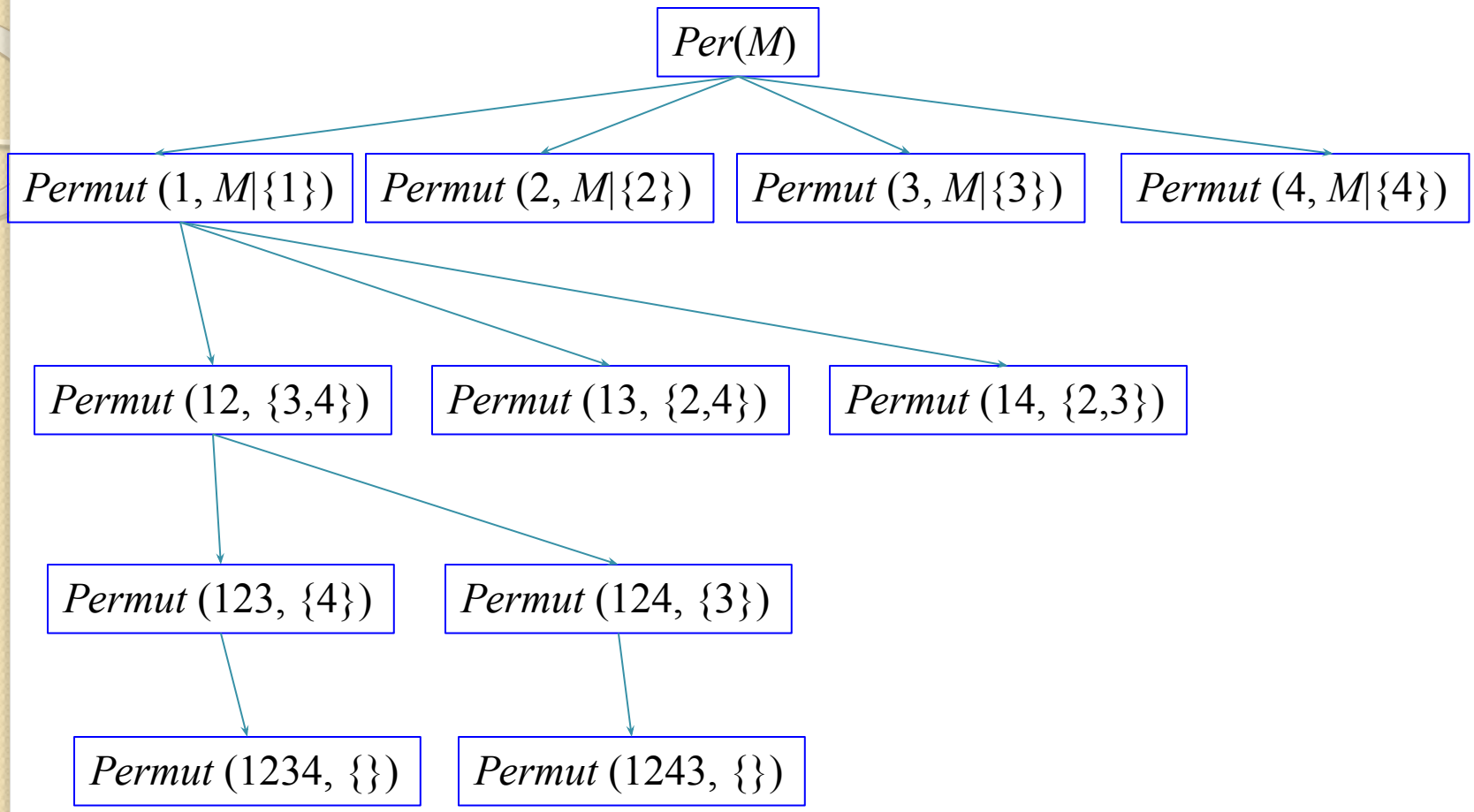
Система рекуррентных соотношений, определяющих множество *Per*(*M*) всех перестановок базового множества *M* произвольной природы:

$$Per(0) = \{""\},$$
$$Per(M) = Permut(i, M \backslash \{i\}),$$
$$Permut(i, S) = \{"i" + s \mid s \in Per(S)\}.$$

Первое равенство задает условие обрыва рекурсивного спуска: пустое множество элементов порождает пустую перестановку.

Два последних равенства определяют правила рекурсивного перехода.

Пример рекурсивного перебора для M= {1,2,3,4}



На языке Си этот процесс можно описать следующим образом:

```
typedef  char  string[256];
void permut(string start, string rest)
{
   int lenr = strlen(rest);
   int lens = strlen(start);
   int i=0; string sl="";  string s2="";
   if (lenr == 0) Printf("%s\n", start);
   else
   {
       for (i = 0; i < lenr; i++)
       {
           /* Добавляем i-ый символ к строке start  */
          strcpy(sl,start);
          strncpy(sl+lens,rest+i,1);
          strncpy(sl+lens+1,"\0",1);
           /* Удаляем i-ый символ из  строки rest  */
          strncpy(s2,rest,i);
          strncpy(s2+i,rest+i+l,lenr-i-1);
          strncpy(s2+lenr-l,"\0",   1);
           /* Рекурсивный переход */
          permut(  s1,  s2  );
       }
   }
}
```

Генерация всех перестановок методом Кнута

Идея:

если построены все перестановки длины *N*, то для каждой такой перестановки можно построить *N*+1 перестановку длины *N*+1.

Пример:

Для перестановки **3241** можно построить 5 различных перестановок длины 5:

53241

35241

32541

32451

Генерация перестановок методом Кнута – I способ

Пусть дана перестановка длины N.

- Дописать в конец перестановки числа $(2i+1)/2$ ($0 \le i \le N$).
- Перенумеровать элементы полученных перестановок в порядке их возрастания.

Пример: дана перестановка **3241**.

3 2 4 1 0.5 → 4 3 5 2 1

3 2 4 1 1.5 → 4 3 5 1 2

3 2 4 1 2.5 → 4 2 5 1 3

3 2 4 1 3.5 → 3 2 5 1 4

3 2 4 1 4.5 → 3 2 4 1 5

Генерация перестановок методом Кнута – 2 способ

Пусть дана перестановка длины N: $a_1\ a_2\ \ldots\ a_N$.

- Дописать в конец перестановки числа k $(1 \le k \le N+1)$.
- Для всех $a_i \ge k$ заменить их на $a_i + 1$.

Пример: дана перестановка **3241**.

3 2 4 1 1 → 4 3 5 2 1

3 2 4 1 2 → 4 3 5 1 2

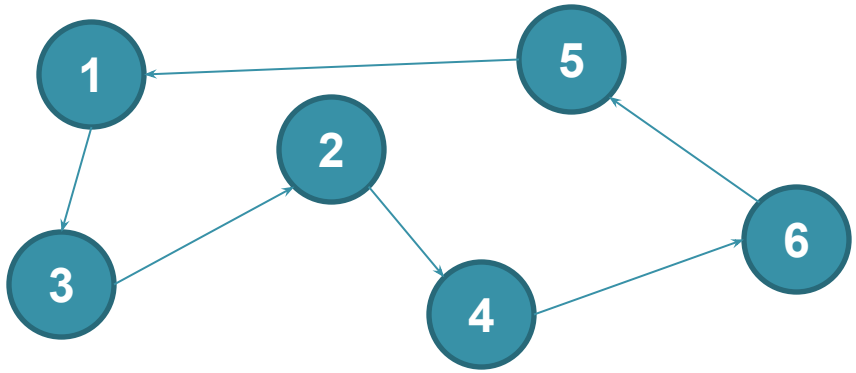
3 2 4 1 3 → 4 2 5 1 3

3 2 4 1 4 → 3 2 5 1 4

3 2 4 1 5 → 3 2 4 1 5

Задача коммивояжера

Дано N городов. Необходимо объехать все, побывав в каждом городе только один раз и вернуться в исходный город, затратив при этом минимальное количество времени (денег, …).



Решение: перебрать все последовательности городов, т.е. построив все перестановки элементов этого множества. Например, путь, отображенный на рисунке соответствует перестановке

1 3 2 4 6 5