

Научно-исследовательский вычислительный центр
МГУ

Интеллектуальные информационные технологии

Полиморфное кодирование кубических
структур, операции над кубантами,
моноид, хаусдорфова метрика и
совмещенные машинные операции в
супервычислениях

Научный руководитель -Г.Г.Рябов

Исполнители:, В.А.Серов, В.А.Толстошеев, Г.Г.
Кузьмин, А.С.Фингеров

Проект поддержан грантом РФФИ 09-07-12135-офи_м

План изложения

- Общее введение.
- Введение. Роль кубических структур в математических моделях.
- Часть 1. Определение кубантов. Операция умножения. Моноид.
- Часть 2. Метрика Хаусдорфа-Хэмминга на кубантах в \mathbb{I}^n .
- Часть 3. Метрика Евклида-Хаусдорфа в \mathbb{R}^n с.
- Часть 4. Элементы кубического синтеза.
- Часть 5. Элементы динамики на кубических структурах.
- Часть 6. Машинное представление данных и операций.
- Часть 7. Полиморфное кодирование и алгебраизация супервычислений.
- Часть 8. Инструментальная система на суперкомпьютере.
- Литература.
- Приложение 1. Непересекающиеся k -пути.
- Приложение 2. Примеры графического представления.
- Приложение 3. 3-пути через случайную окрестность.

Общее введение

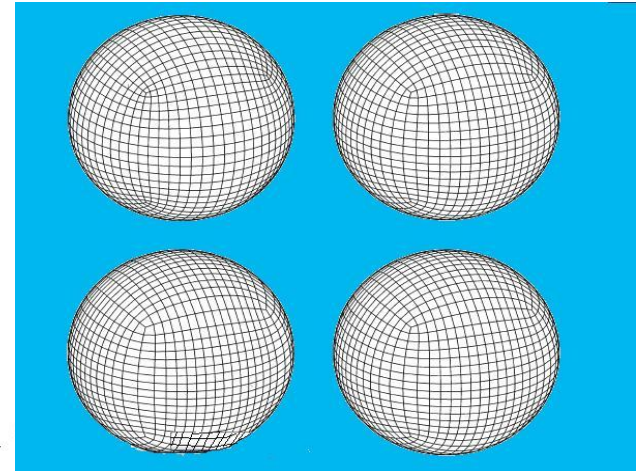
- Интеллектуальные информационные технологии подразумевают не только работы по компьютерной интерпретации механизмов мозга человека, но и использование лингвистических(в т.ч. и математических) методов для более адекватного представления (кодирования в машинные формы) и дальнейших конструктивных компьютерных действий над элементами (и структурами из них) самой общей природы с целью их более глубокого познания.
- Возможность сочетания в единой форме машинного представления различных (даже разнородных) свойств элементов некоторого множества и единообразных операций над такими представлениями открывает дорогу для установления новых закономерностей и как результат этого способствует решению прикладных проблем. Такой подход в праве характеризовать как одну из ветвей интеллектуальных информационных технологий.
- Представления многомерных метрических и топологических пространств, являются основой для различных моделей их структуризации и эффективного отображения этих моделей в существующие или принципиально реализуемые компьютерные системы.

- В самом общем виде основа содержательной части - конкретный пример построения конструктивного мира кубических структур на основе нетрадиционного кодирования, обладающего полиморфными свойствами. Это кодирование позволяет ввести операции, совмещающие вычисление величин, характеризующих метрические, топологические, комбинаторные и алгебраические свойства элементов и структур из этого конструктивного мира.
- Основные операции сводятся к поразрядным операциям, которые обладают максимальной совмещенностью – потенциальной реализацией выполнения за один машинный такт обработки практически неограниченных по числу n разрядов слов, где n -размерность рассматриваемого пространства. Эти операции эмулированы на современных компьютерах и могут быть эффективно аппаратно реализованы в компьютерах следующих поколений.
- Постановка задач анализа и синтеза объектов из этого конструктивного мира и алгоритмы решения этих задач опираются на предложенные представления и введенные операции.

- В рамках предыдущих тезисов и следует рассматривать ниже изложенное содержание результатов под общим названием «Алгебраическое представление кубических структур и супервычисления», которое является составной частью проекта, поддержанного грантом РФФИ (09-07-12135-офи-м).
- С другой стороны эта тематика является дальнейшим развитием инструментальной системы под общим названием «Топологический процессор», развиваемой в НИВЦ МГУ с 2005 года с целью более полного математического и программного обеспечения суперкомпьютерных систем (в частности суперкомпьютера МГУ «Чебышев») при решении комбинаторных геометрико-топологических задач.
- Образовательная сторона исследований направлена на выработку наиболее компактных и доходчивых представлений многомерных структур (чаще всего в виде группоидов) и действий на них, интерпретированных традиционными и нетрадиционными машинными операциями, широко используя совмещение и параллелизм. С целью подготовки специалистов такого профиля создан и продолжает расширяться спецкурс для студентов факультета ВМ и К МГУ «Введение в компьютерные методы комбинаторно-топологических построений».

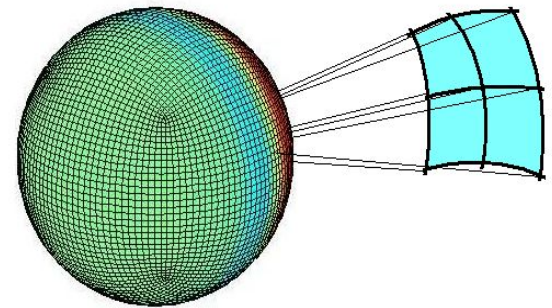
Роль кубических структур в геометрико-топологической основе математических моделей

- Глобальная модель циркуляции (МТИ)-погодный и климатический прогноз. Конформная кубоидная сфера. □
- Геометрическая основа науки о двоичном кодировании - n -мерный единичный куб. (R.Hamming)[8]



External

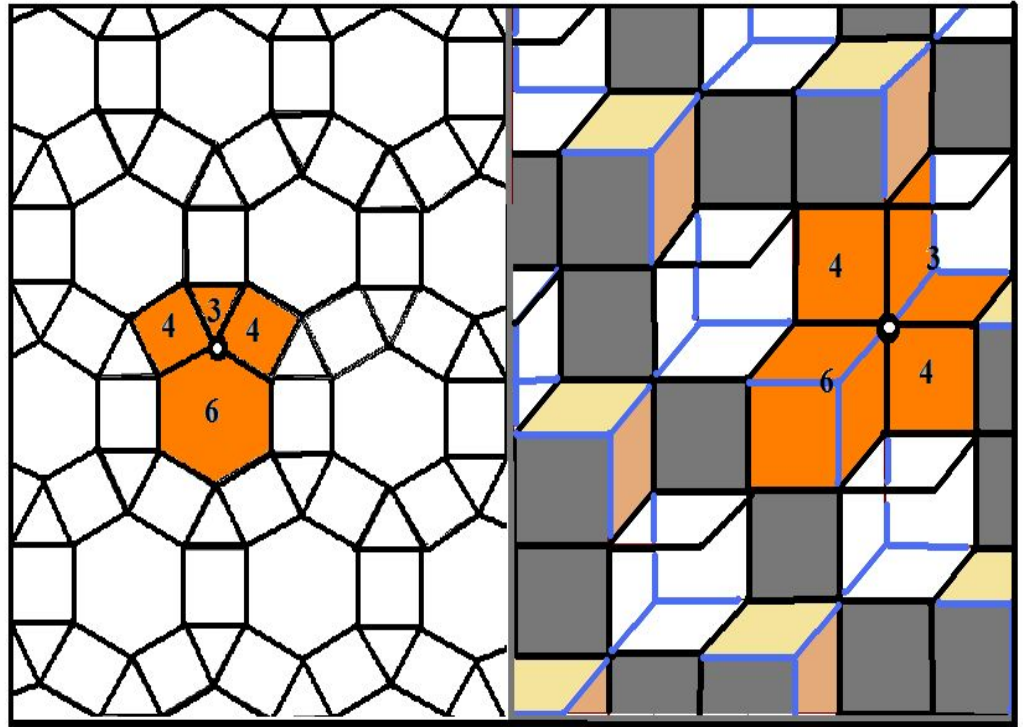
Expanded Conformal Cubic Grid



Face 3cube: 32x32; 64x64; ...

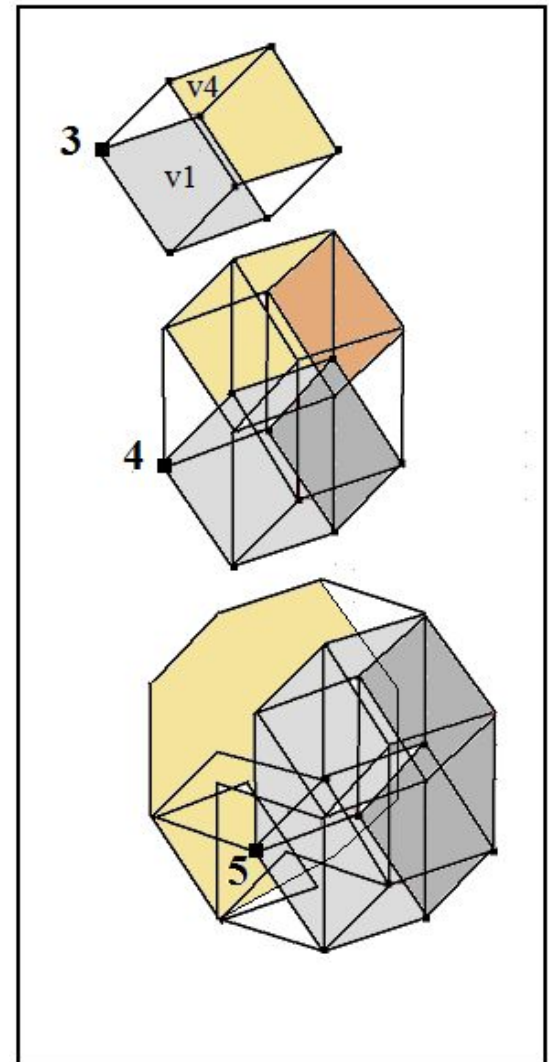
Изометрические вложения в кубические структуры

- Эффективное отображение на кубические структуры.
- Вложения плоских мозаик в реберный остов \mathbf{Z}^n .
- Работы- Деза, Долбилина, Штанько, Штогрин. [2,3,4]



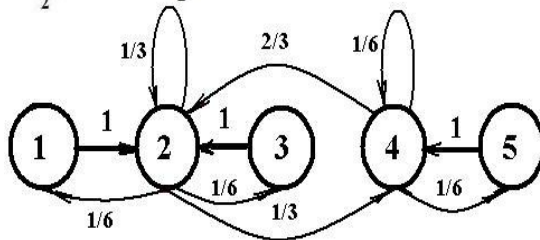
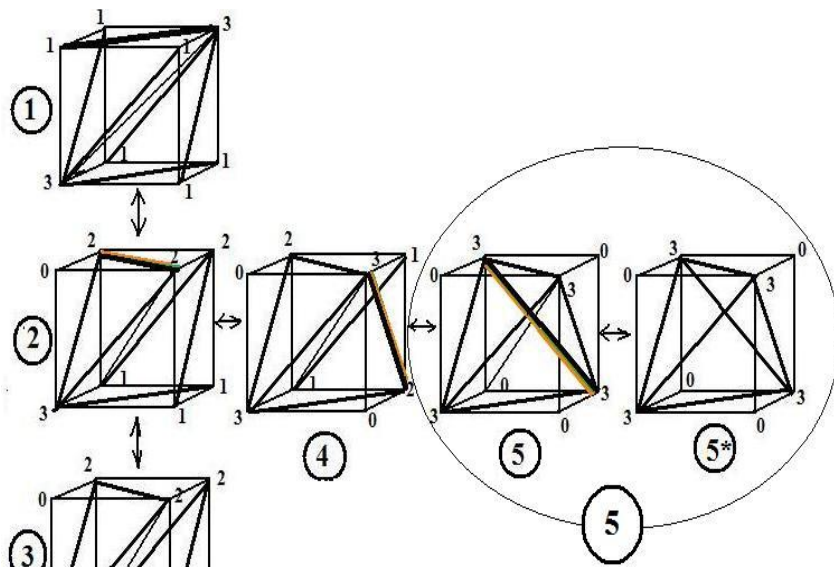
Комбинаторные многогранники, кольцо граней Стенли-Райснера

- Для простого многогранника P с гранями F_1, \dots, F_m и коммутативного кольца K с единицей кольцо граней Стенли-Райснера- факторкольцо $K(P) = K[v_1, \dots, v_m] / \mathfrak{I}_P$, где \mathfrak{I}_P -идеал, порожденный мономами $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_s}$, что $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_s} = \emptyset$ в P , $i_1 < \dots < i_s$.
- Для $P = I^3$: $K(P) = K[v_1, \dots, v_6] / (v_1 v_4, v_2 v_5, v_3 v_6)$;
- Комбинаторные многогранники и уравнения мат. физики. (В.М. Бухштабер) [5]
- n -куб-комбинаторный многогранник



Триангуляции на кубических структурах и их динамика

- 6 типов примитивной триангуляции \mathbb{I}^3 .
- Марковские цепи в реберной динамике примитивных триангуляций в \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^4 . Эргодические свойства.
- Распределение допустимых триангуляций в статистике Бозе-Эйнштейна. [18]



$$A_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_I^n = \begin{pmatrix} 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \end{pmatrix}$$

Возрастание роли в супервычислениях топологии+многомерности+ комбинаторики +динамики

- Эффективные методы представления семейств объектов для классификации, нумерации и комбинаторных схем перечисления.
- Учет наиболее общих свойств и инвариантов для многомерных построений (симметрия и группы движений, случайные процессы и эргодические свойства).
- Кубические структуры - достаточно универсальны для всестороннего компьютерного анализа и создания на этой базе компьютерных методов синтеза. [1-7]

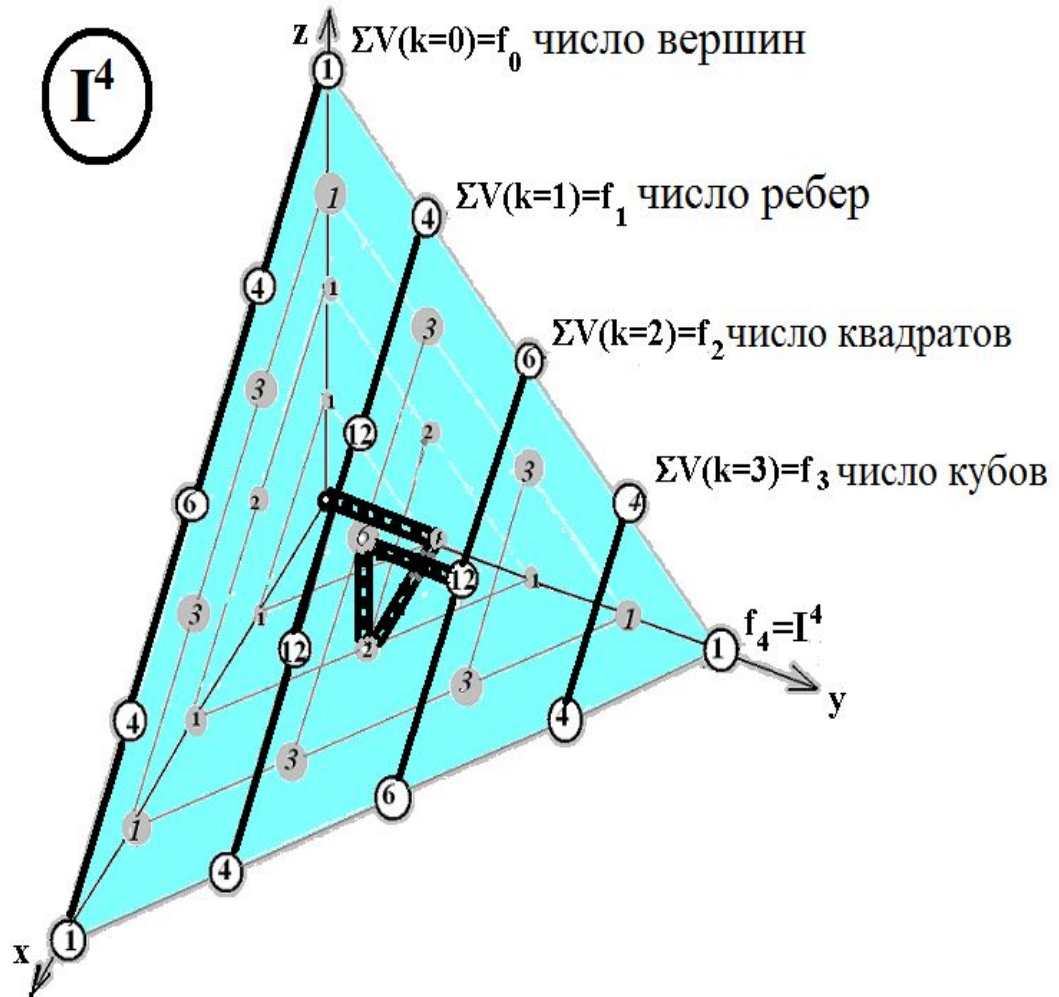
Принятые обозначения

- \mathbb{R}^n -n-мерное евклидово пространство.
- e_1, e_2, \dots, e_n - ортонормированный базис.
- \mathbb{Z}^n -подпространство целых точек в \mathbb{R}^n .
- \mathbb{I}^n -n-мерный единичный куб
- $F(k)$ -k-мерная грань в \mathbb{I}^n (0-грани-вершины, 1-грани-ребра, 2-грани-квадраты и т.д.)
- F^n -множество всех граней \mathbb{I}^n . ($k=0, 1, \dots, n$).
- $\{0, 1, 2\}$ -троичный алфавит. \mathbb{D}_3^n - множество всех троичных кодов.
- $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$ -четверичный алфавит. \mathbb{D}_4^n – множество всех четверичных кодов.
- S_n - симметрическая группа подстановок.

Часть 1. Пирамида Паскаля и биекция

$$\mathbf{F}^n \leftrightarrow \mathbf{D}_3^n$$

- Пирамида Паскаля-3d аналог треугольника Паскаля.
- Рекурсивная процедура вычисления триномиальных коэффициентов.
- Число в вершине-число крайних путей в трехмерной решетке из (000) в данную вершину.
- Кодировка путей перемещений :0-перемещение по x, 1- по y, 2- по z.
- $f_k = C_n^k 2^{n-k};$
[19]

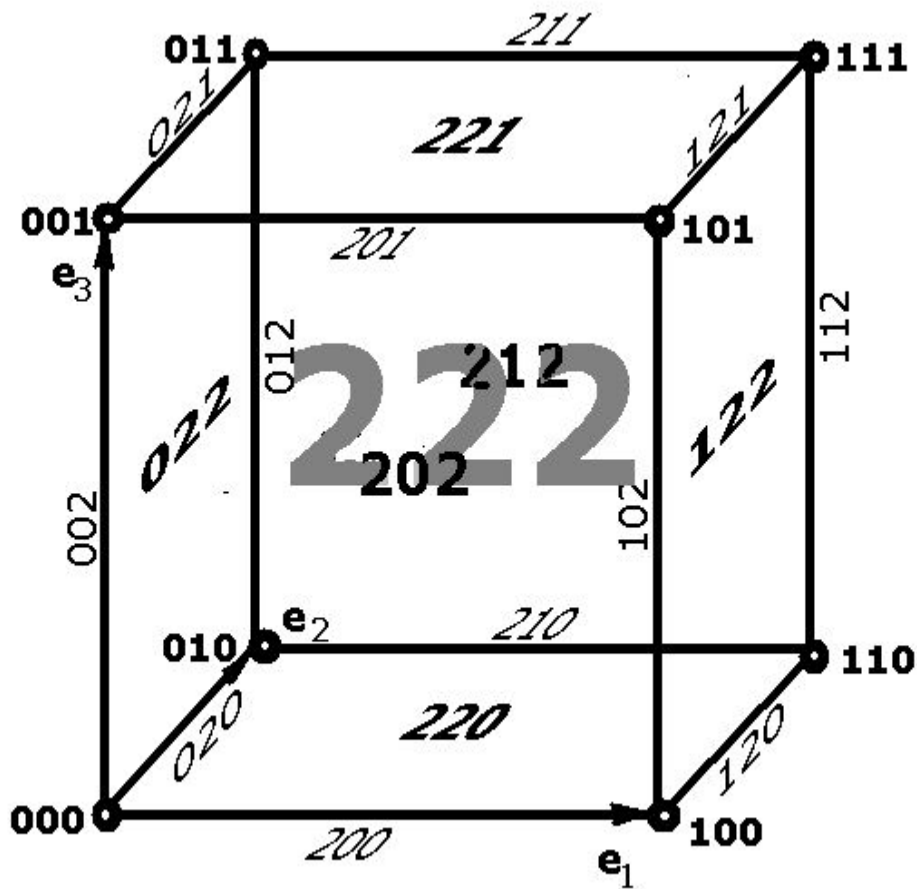


Биекция: мн-во всех n -разрядных
троичных кодов $\square \square$ мн-во всех граней n -
куба.

- $E = e_1, e_2, \dots, e_n; \square \mathbf{R}^n;$
- $D = d_1, d_2, \dots, d_n; d_i \in \{0, 1, 2\};$
- $F(k, p) = \prod_{i: d_i=2; (k)} e_i + \prod_{j: d_j=0, 1; (n-k)} e_j;$
- Так 021221 – $e_2 \times e_4 \times e_5$ (трехмерная грань), транслированная в вершину 001001 в шестимерном кубе I^6 .
- **Кубант (кубический квант)** – n -разрядный троичный код, однозначно определяющий размерность и положение грани в n -мерном единичном кубе I^n . [21]

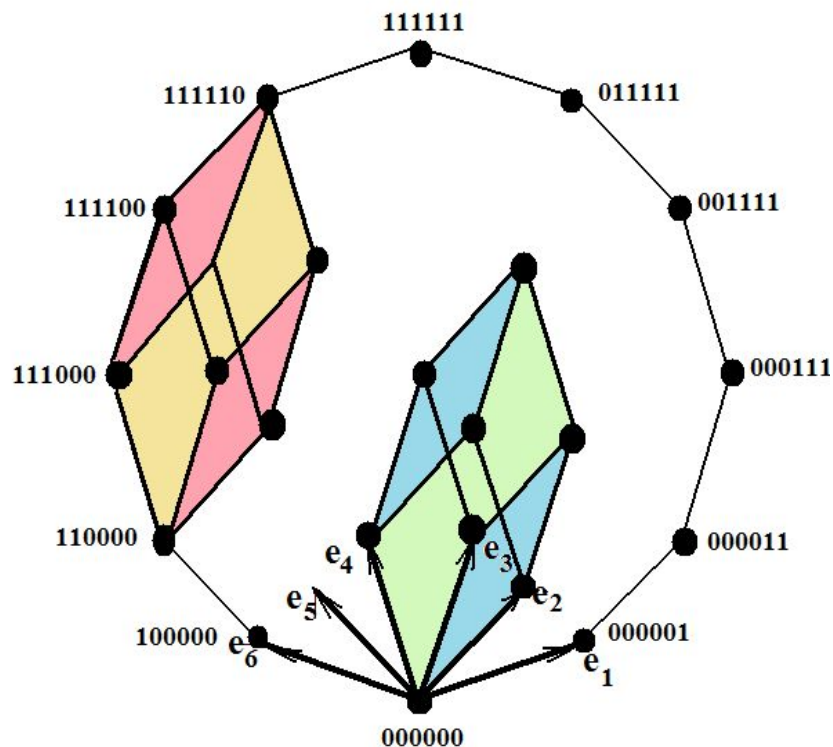
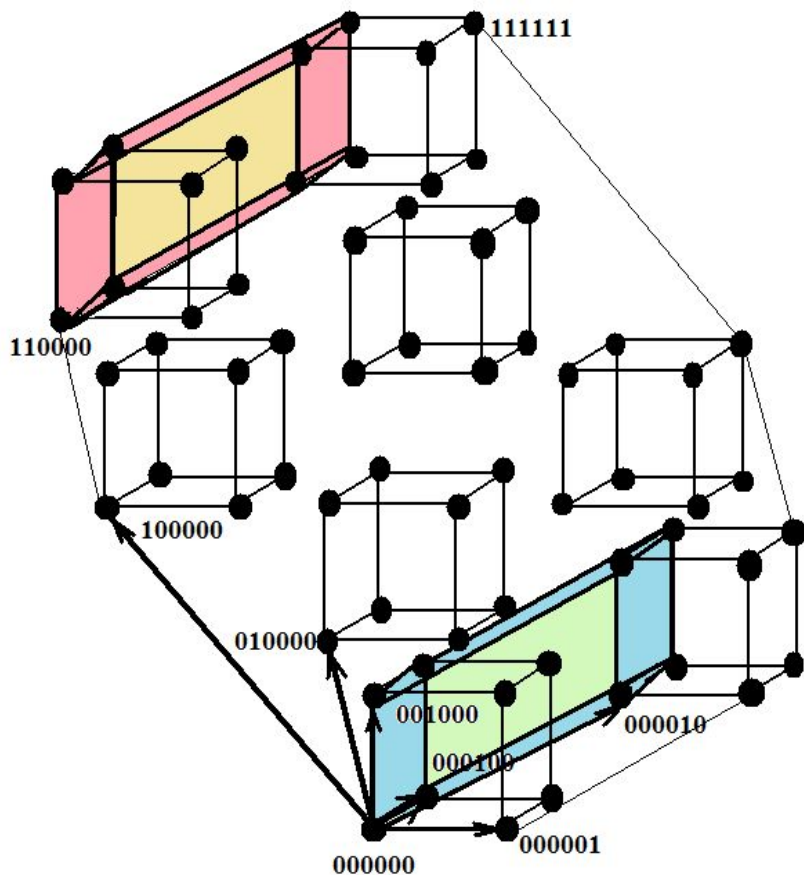
Троичное кодирование граней \mathbb{I}^3 .

- Вершины (0-границы): 001, 010, ..., 111;
- Ребра (1-границы): 002, 012, ..., 211;
- Грани (2-границы): 022, 122, ..., 221;
- Весь \mathbb{I}^3 : 222;



Виды графических интерпретаций для многомерных случаев

- Общие целевые функции графики-наглядность для плоских проекций, отражение фундаментальных свойств-симметрии. Пример-кубант 112220.



Бинарная операция умножения

- $D1 = d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n};$
- $D2 = d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n};$
- Поразрядная операция умножения задается следующей таблицей \square
- В префиксной записи:
- $P(022121, 121012) = \emptyset 21 \emptyset 11;$ (псевдокубант)
- $P(022121, 220112) = 020111;$ (кубант).

Π	d_{1i}	0	1	2
d_{2i}				
0		0	\emptyset	0
1		\emptyset	1	1
2		0	1	2

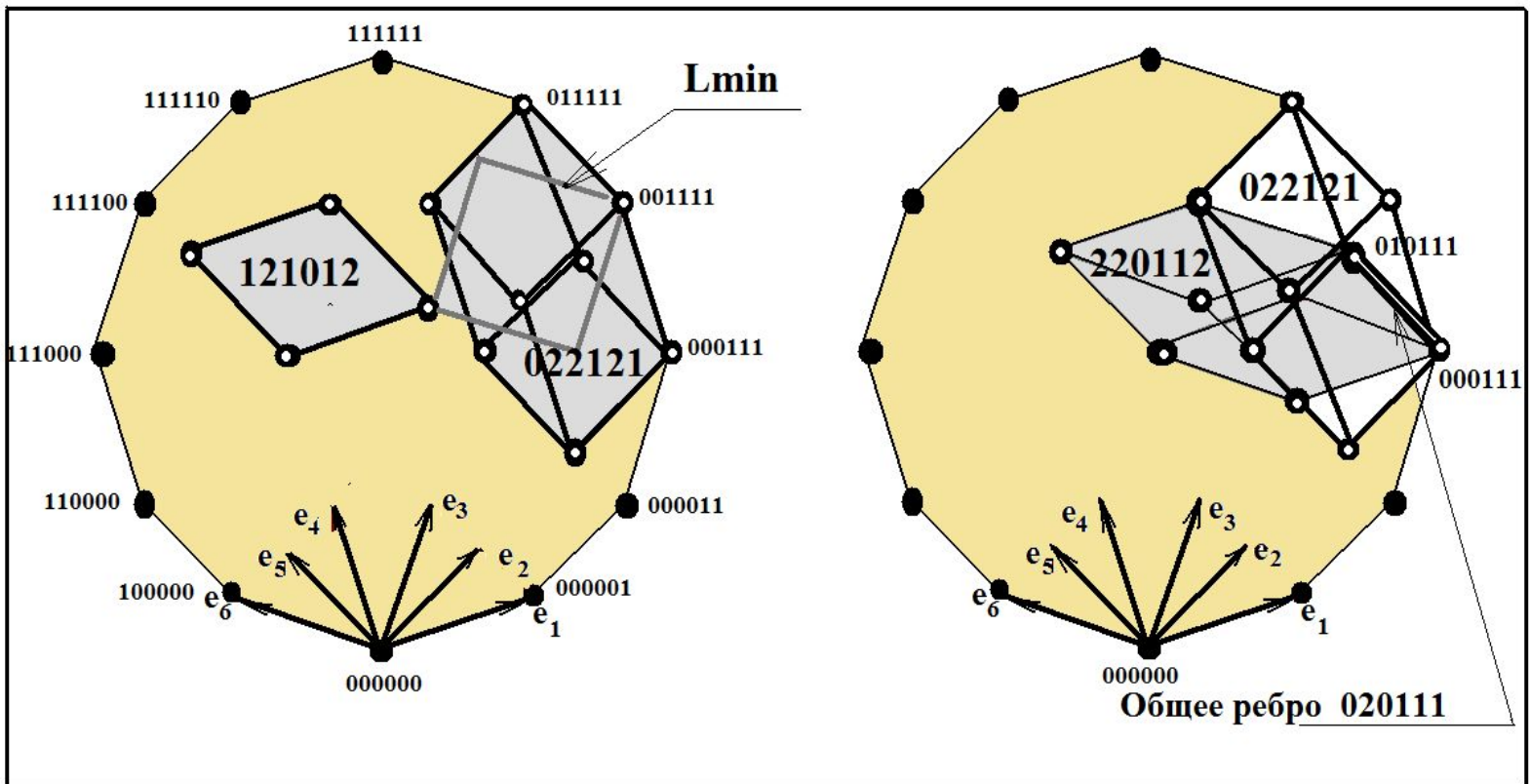
Расширение алфавита и доопределение операции умножения.

- Расширенный алфавит $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$.
- Операция умножения (поразрядная) на расширенном алфавите задается следующей таблицей
□
- По определению операция – коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна.

Π	d_{1i}	\emptyset	0	1	2
d_{2i}					
\emptyset		\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
0		\emptyset	0	\emptyset	0
1		\emptyset	\emptyset	1	1
2		\emptyset	0	1	2

Свойства произведения кубантов.

- $\omega(D)$ -число разрядов с символом \emptyset .
- $\omega(\Pi(D1,D2)=0) \square \Pi(D1,D2) = D3$ -кубант-пересечение.
- $\omega(\Pi(D1,D2) \neq 0) \square \omega = L_{\min}(D1,D2)$;
- $\Pi(121012,022121)=\emptyset 21\emptyset 11$; $\Pi(220112,022121)=020111$;



Доказательство свойства

$$\omega(\Pi(D1, D2)) = L_{\min}(D1, D2).$$

- Пусть $V1$ и $V2$ два различных n -разрядных двоичных слова (алфавит $\{0;1\}$), число попарно несовпадающих разрядов m . Тогда длина минимального пути по ребрам I^n между вершинами с координатами $V1$ и $V2$ равна m . (Хэммингово расстояние).
- Заменяем в словах $V1$ и $V2$ один из совпадающих попарно n - m разрядов на противоположный. Тогда $\rho(V1^*, V2^*) = m$.
- Заменяем этот разряд в $V1^*$ и $V2^*$ на 2. Образовались 2 кубанта $D1$ и $D2$ (соответствующие ребрам), такие что $V1, V1^* \in D1$, $V2, V2^* \in D2$ и $\omega(\Pi(V1, V2)) = \omega(\Pi(V1^*, V2^*)) = L_{\min}(V1, V2) = m$;
- С одной стороны $L_{\min}(D1, D2)$ должно быть $\leq m$, т.к. к числу точек каждого множества добавились новые.
- Но поскольку добавились только внутренние точки ребер, то минимальный путь до таких точек по ребрам n -куба будет $m + \Delta \geq m$. Из этого противоречия следует $\omega(\Pi(D1, D2)) = m = L_{\min}(D1, D2)$. И так для любого числа совпадающих попарно разрядов $V1$ и $V2$, а следовательно и для любой пары кубантов, т.к. любой кубант можно образовать из двоичного слова заменой ряда разрядов на 2.

D_4^n -МОНОИД ОТНОСИТЕЛЬНО УМНОЖЕНИЯ.

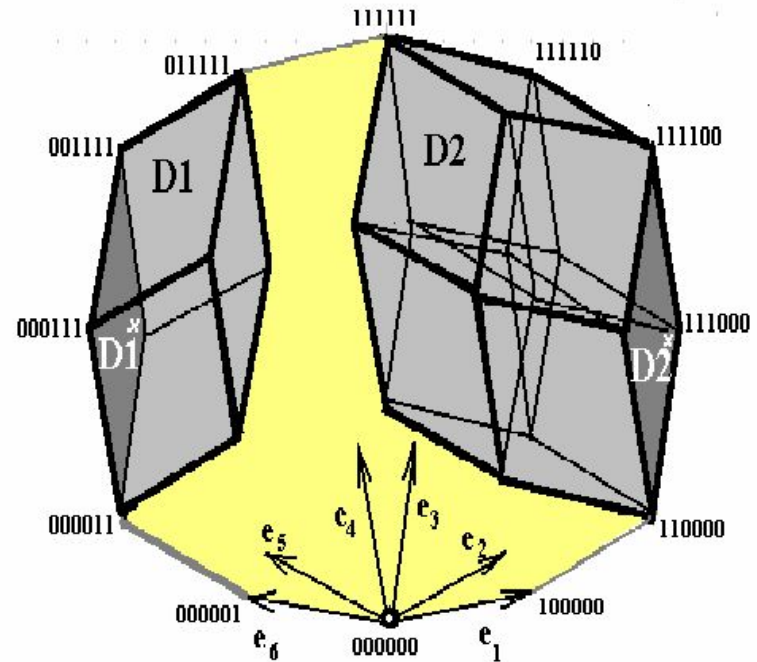
- Все n -разрядные четверичные слова с алфавитом $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$ - (кубанты и псевдокубанты) образуют полугруппу относительно введенного умножения.
- Умножение обладает свойством идемпотентности $\Pi(D, D) = D$; (Маслов [15])
- Единица в этой полугруппе – слово $22\dots 2$ (соответствует I^n).
- Т.о. D_4^n -МОНОИД.

Подмножество кубантов \square матрица парных произведений (смежностей)

- $D_1, D_2, \dots, D_s \square M_{pp}; m_{ij} = \Pi(D_i, D_j); i, j = 1, 2, \dots, n;$
- $D_1 = 112202; D_2 = 121122; D_3 = 122211; D_4 = 120122; D_5 = 002212;$
-
-
-
-
- $M_{pp} = \begin{array}{ccccc} 112202 & 111102 & 1112\emptyset 1 & 110102 & \emptyset\emptyset 22\emptyset 2 \\ & 121122 & 121111 & 12\emptyset 122 & \emptyset 01112 \\ & & 122211 & 120111 & \emptyset 02211 \\ & & & 120122 & \emptyset 00112 \\ & & & & 002212 \end{array}$
- симметрия
- D_1, D_2, D_3, D_4 -образуют цикл (общие ребра); D_5 отстоит на $L_{min} = 1$ от D_2, D_3, D_4 и на $L_{min} = 3$ от D_1 ;
- M_{pp} -обобщение матрицы смежностей для графов.

Часть 2. Хаусдорфова метрика на кубантах. Обобщение метрики Хэмминга.

- $\rho_{HH}(D1, D2) = \max\{\max L_{\min}(D1 \square D2), \max L_{\min}(D2 \square D1)\};$
- $D1 = 022211; D2 = 112222;$
- $L_{\min}(D1 \square D2) \square 112222$
- $\quad \quad \quad 002211$
- $\quad \quad \quad \Pi = \emptyset \emptyset 2211$
- $\quad \quad \quad \max L_{\min}(D1 \square D2) = 2;$
- $L_{\min}(D2 \square D1) \square 022211$
- $\quad \quad \quad 112200$
- $\quad \quad \quad \Pi = \emptyset 122 \emptyset \emptyset$
- $\quad \quad \quad \max L_{\min}(D1 \square D2) = 3;$
- $\rho_{HH}(D1, D2) = \max\{2, 3\} = 3;$



Хаусдорфова метрика на кубантах. Операция Н-сжатия.

- Н-сжатие D_i относительно D_j $\square (D_i^*/D_j)$ - для вычисления самого длинного из кратчайших путей от D_i до D_j
- $\text{Max}\{\omega\Pi(D_i^*/D_j, D_j), \omega\Pi(D_j^*/D_i, D_i)\} = \rho_{\text{HH}}(D_i, D_j);$

	D_i	0	1	2
D_j				
0		0	1	1
1		0	1	0
2		0	1	2

Полная матрица НН-метрики для кубантов \mathbb{I}^3 .

- Размерно-лексикографическое упорядочение троичных кодов:
- 000,001,010,011, ...
111, 002,012,020,021, ...
211, 022,122,202,212, ...
221, 222;
- Черный- $\rho_{\text{НН}}=3$,
- Тем.серый- $\rho_{\text{НН}}=2$,
- Свет.серый- $\rho_{\text{НН}}=1$,
- Белый- $\rho_{\text{НН}}=0$.

	вершины								ребра								грани				куб						
000	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0	1	2	2	2	2	2
001	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	2	2	0	1	2	2	0	0	1	1	2	2	0	1	2	2	2
010	0	1	0	1	0	1	0	1	2	2	0	1	2	2	0	1	0	1	0	1	2	2	2	2	0	1	2
011																											
100																											
101																											
110																											
111																											
002																											
012																											
020																											
021																											
102																											
112																											
120																											
121																											
200																											
201																											
210																											
211																											
022																											
122																											
202																											
212																											
220																											
221																											
222																											

Структура НН-метрики для \mathbb{I}^n .

- $H(k,m)$ -минор матрицы парных НН-расстояний, содержит все расстояния между k - и m -размерными кубантами.
- $r = [r_1, r_2]$ -диапазон значений НН-расстояний. r_1, r_2 -целые; $r_1 \leq r_2$.

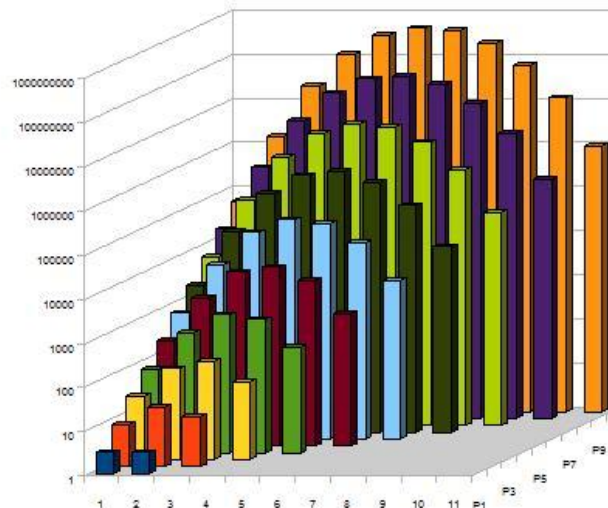
	0	1	...	n-2	n-1	n
0	$\begin{matrix} 0 & H(0,0) \\ \dots & [0,n] \end{matrix}$ \emptyset	$\begin{matrix} H(0,1) \\ r=[1,n] \end{matrix}$		$\begin{matrix} H(0,n-2) \\ r=[n-2,n] \end{matrix}$	$\begin{matrix} H(0,n-1) \\ r=[n-1,n] \end{matrix}$	n
1		$\begin{matrix} 0 & H(1,1) \\ \dots & [0,n-1] \end{matrix}$ \emptyset	...	$\begin{matrix} H(1,n-2) \\ r=[n-3,n-1] \end{matrix}$	$\begin{matrix} H(1,n-1) \\ r=[n-2,n-1] \end{matrix}$	n-1
...			...			
n-2				$\begin{matrix} 0 & H(n-2,n-2) \\ \dots & r=[0,2] \end{matrix}$ \emptyset	$\begin{matrix} H(n-2,n-1) \\ r=[1,2] \end{matrix}$	2
n-1					$\begin{matrix} \emptyset & H(n-1,n-1) \\ \dots & r=[0,1] \end{matrix}$ \emptyset	1
n						\emptyset

симметрия

Распределение НН-расстояний между кубантами для \mathbb{I}^2 - \mathbb{I}^{10} .

- Таблица $M(r,n)$ -число пар кубантов в \mathbb{I}^n с $r_{\text{HH}}=r$;
- $M(0,n)=3^n$;
- $M(n,n)=4^n-2^{n-1}$;
- Гистограмма по вертикали-в логарифм. масштабе.
- Горизонталь-почти симметрия.

	$r_{\text{HH}}(n)$										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3										
2	9	22									
3	27	117	174	60							
4	81	540	1380	1072	248						
5	243	2295	8820	11480	5800	1008					
6	729	9234	49410	94960	78600	29088	4064				
7	2187	35721	252882	667380	802200	476784	139104	16320			
8	6561	134136	1211112	4183200	6818000	5794432	2669184	644608	65408		
9	19683	492075	5511240	24068016	50836464	57881376	37591680	14135040	2922624	261888	
10	59049	1771470	24078870	129509280	343148400	501544512	431417280	225876480	71925120	13043200	1048064



Расширение матрицы парных произведений кубантов.

- Дополнение элементов матрицы парных произведений значениями НН-расстояний ($/\rho_{\text{НН}}$) между кубантами.
- В расширенном виде матрица содержит полную топологическую и НН-метрическую картину множества кубантов (в т.ч. НН-диаметр множества, исходные данные для построения НН-кратчайшего связывающего дерева и т.д.)
- Ранее приведенный пример M_{pp} с расширением приведен ниже.

D1=112202; D2=121122; D3=122211; D4=120122; D5=002212;

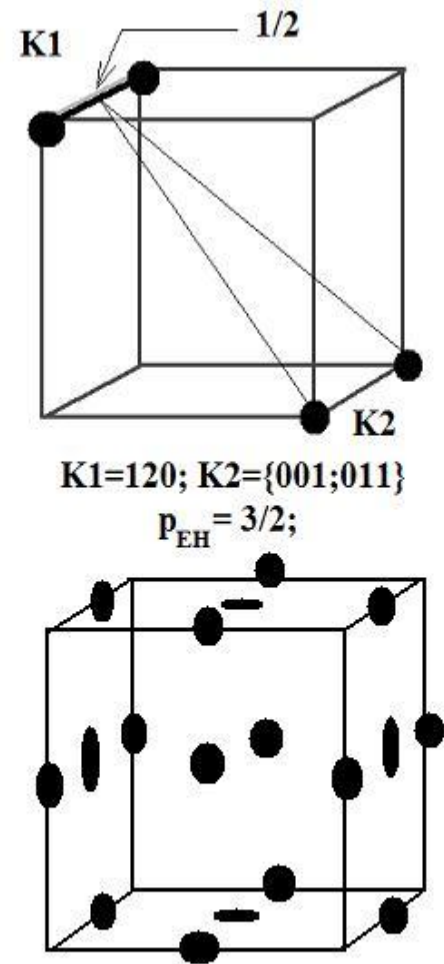
	112202/0	111102/2	1112Ø1/2	110102/2	ØØ22Ø2/3
		121122/0	121111/2	12Ø122/1	Ø01112/3
			122211/0	120111/2	Ø02211/2
симметрия				120122/0	Ø00112/3
					002212/0

Часть 3. Подмножества кубантов в \mathbb{I}^n .

- Булеан n-кубантов-множество всех двоичных m-разрядных кодов при $m=3^n$;
- Каждому кубанту соответствует номер в размерно-лексикографически упорядоченной последовательности троичных n-разрядных кодов, этот номер равен номеру разряда в булеане, если данный кубант входит в рассматриваемое подмножество.
- Каждое подмножество кубантов \square двоичное слово в булеане.
- 000,001,010,...,022,122,220,221,222.
- 1 2 3 23 24 25 26 27
- 002,122 \square 00010000000000000000000000000000100;
- 001,022 \square 0001000000000000000000000000000000;-поглощение кубанта 001 кубантом 022.
- После поглощений число различных подмножеств
- $< 2^m; m=3^n$;
- Для $n=2$; \square $m=9; |B|=512; |B^*|=47$; число всех пар подмножеств:
- **2209 < 262144**

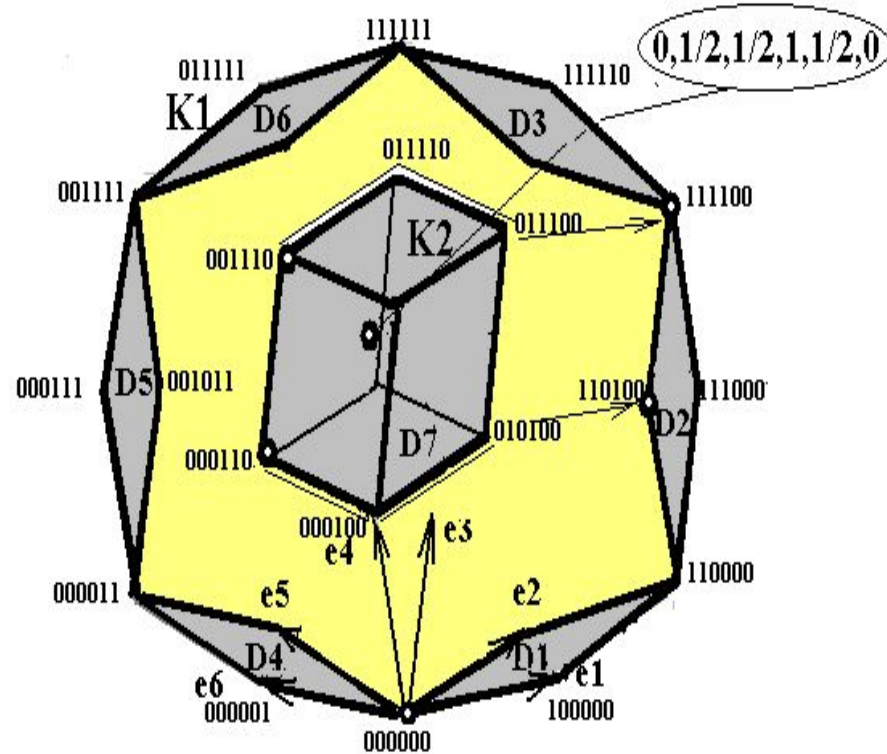
Особенности хаусдорфовой метрики на подмножествах кубантов.

- Необходимость перехода к евклидовой метрике. \square
- Добавление к вершинам (целым точкам) «полуцелых» точек для каждой грани (кубанта).
- $2\ 1\ 0 \square 1/2\ 1\ 0;$ \square



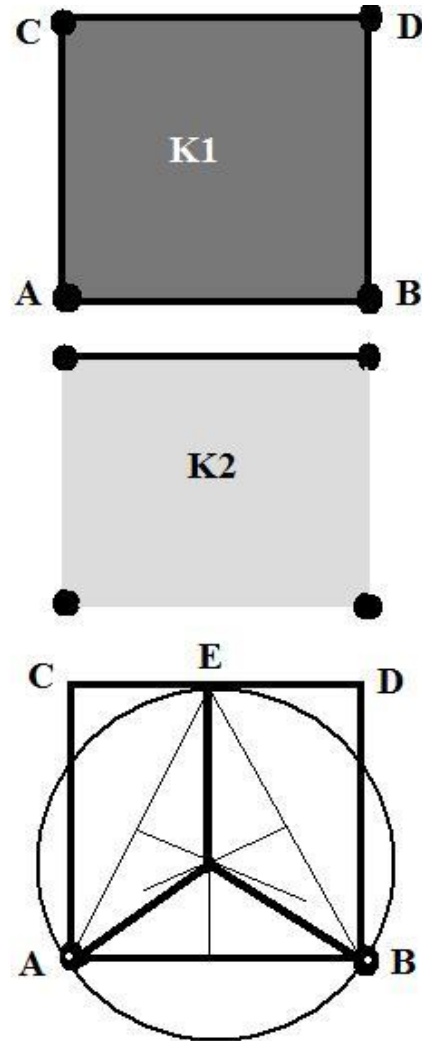
Соотношения между ρ_{HH} и ρ_{EH} в \mathbb{I}^n .

- Кубанты: $D1=220000$;
 $D2=112200$; $D3=111122$;
 $D4=000022$; $D5=002211$;
 $D6=221111$; $D7=022120$;
- $\rho_{HH}(D_i, D_7)=3$;
 $\rho_{EH}(D_i, D_7)=\sqrt{3}$; $i=1-6$;
- Подмножества:
- $K1=\{D1, D2, \dots, D6\}$;
 $K2=\{D7\}$;
- $\rho_{EH}(K1, K2)=\sqrt{7/2}$;
- Мах равноудаленная точка имеет нецелочисленные координаты, т.е. нецелая.



Вычисление равноудаленных точек в комплексах из кубантов разной размерности .

- Мах равноудаленная точка – в множестве пересечений прямых, ортогональных к кубантам другого комплекса в общей для комплексов выпуклой оболочке. Точка и инцидентное ребро считаются ортогональными.
- Для I^2 – построение отрезков прямых и окружностей с доп. условиями (см. пример).
- $K1=\{22\}; K2=\{12;00;01\}$;
- Окружность касается ребра CD(кубант 12) и проходит через точки A(кубант 00) и B(кубант 01)
- Из приведенного построения $\rho_{EH}(K1, K2)=5/8$;
- Для I^3 окружности заменяются сферами.



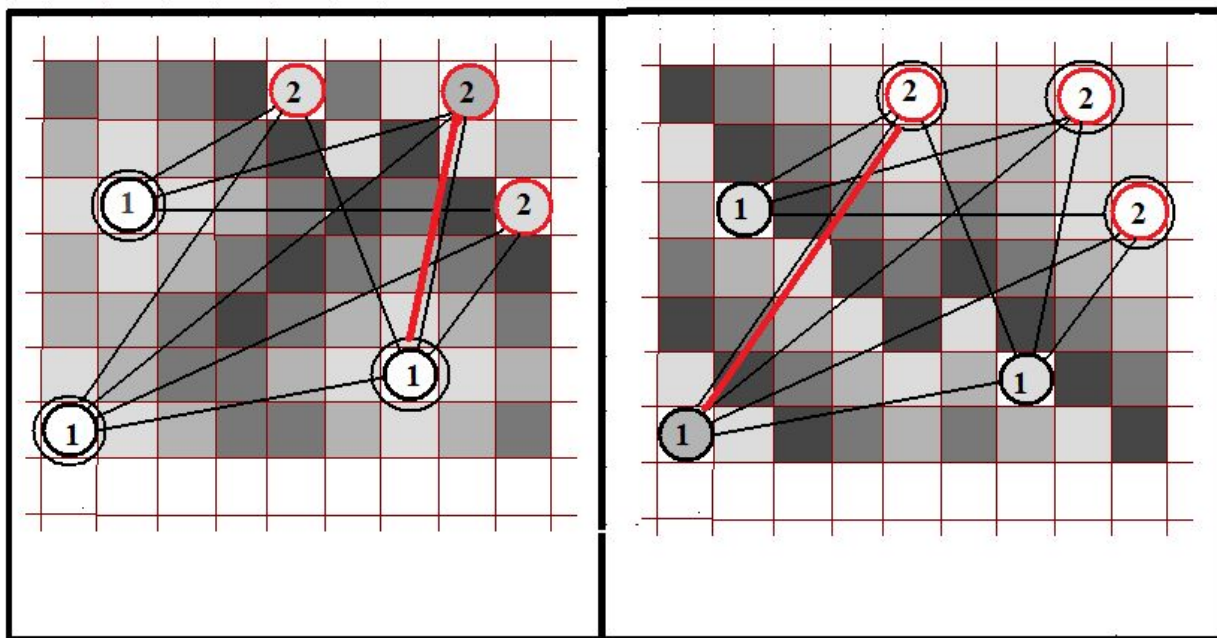
К вычислению полной матрицы ρ_{EH} всех пар комплексов \mathbb{I}^n

- Среди множества всех подмножеств кубантов возможны «поглощения»: так код в булеане (для \mathbb{I}^3) $00\dots100000001 \sqsupset 00\dots100000000$, т.к. кубант 002 содержит вершину 000.
- Возможность сокращения общего числа (2^{3^n}) комплексов за счет «поглощения» кубантов меньшей размерности не приводит к принципиальному результату. Так для \mathbb{I}^3 общее число комплексов 2^{27} (точнее $2^{26}+1$) за счет поглощения сводится к $\sim 2^{25}$.
- Оценка возможности полных вычислений для $\mathbb{I}^3 \sqsupset 2^{52} \sim 4 \cdot 10^{15}$. Задача для суперкомпьютера.

Два метода вычисления ρ_{EH} для двух множеств целых точек в \mathbf{R}^3 .

- Волновой алгоритм на $\{\mathbf{Z}^3, \mathbf{V}^3\}$, где \mathbf{V}^3 - множество простых (примитивных) ребер, не содержащих внутренних целых точек. (Отображения целочисленных множеств и евклидовы приближения. 2007). Учет невыпуклости пространства, приближение к E-метрике (длина ломаной на простых ребрах)- приближенное значение хаусдорфова расстояния.
- Алгебраический метод на основе свойств моноида. Точная E-метрика, пространство-выпуклое. (2009).

Сравнение двух методов для мн-ств \mathbb{Z}^n .



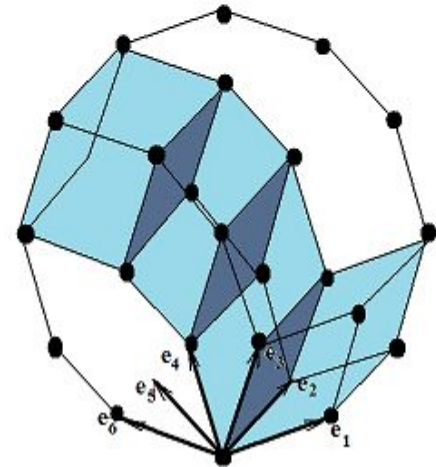
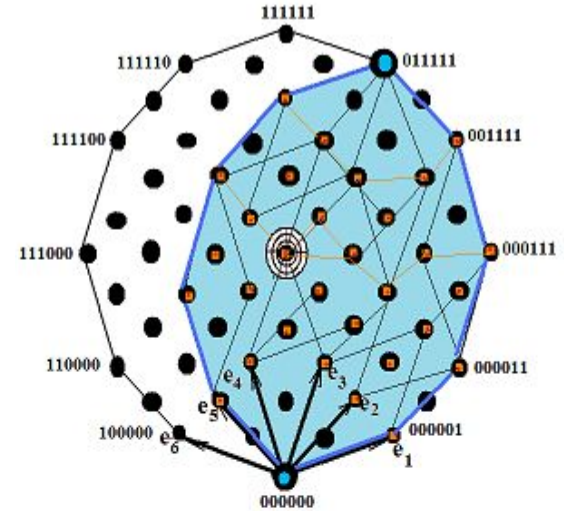
- Волна от мн-ва 1 до последней (по шагам) точки мн-ва 2 – $p(2,1) = \max \min(2 \square 1)$, от мн-ва 2 до п.т. мн-ва 1 – $p(1,2) = \max \min(1 \square 2)$, $p_{EH}(1,2) = \max\{p(2,1); p(1,2)\}$.
- В примере с волной (окр.=2)
 $p_{EH} \sim 7,3006$; (окр.=3) $\sim 7,2110$;
- точ. $p_{EH}(1,2) = 2\sqrt{13} \sim 7,2110$;

Часть 4. О подходе к задачам синтеза на кубантах

- Формирование в \mathbf{R}^n_c (с множеством вершин в \mathbf{Z}^n) конечного множества S комплексов кубантов K_1, K_2, \dots, K_m с заданными топологическими и метрическими условиями, а также на мощности множества S и комплексов кубантов.
- Формирование - представление, вычисление, преобразование, верификация.

О расширении некоторых понятий.

- Выпуклая оболочка комплекса внутри I^n -кубант минимальной размерности, в который вложим комплекс. (рис.1. Выпуклая оболочка комплекса $\{000000, 011111\} = I^5$)
- Связность-расширение понятия связности кубантов (k-связность)- общность граней не меньшей размерности чем k. (рис.2. 2-связность)
- Путь-расширение понятия пути. Путь по ребрам-1-путь, путь по двумерным граням-2-путь и т.д. Минимальные k-пути.
- (рис.2.)- 3-путь



Гамильтоновы циклы($HC(n)$) на I^n как циклы 1-кубантов.

- Представления гамильтонова цикла:

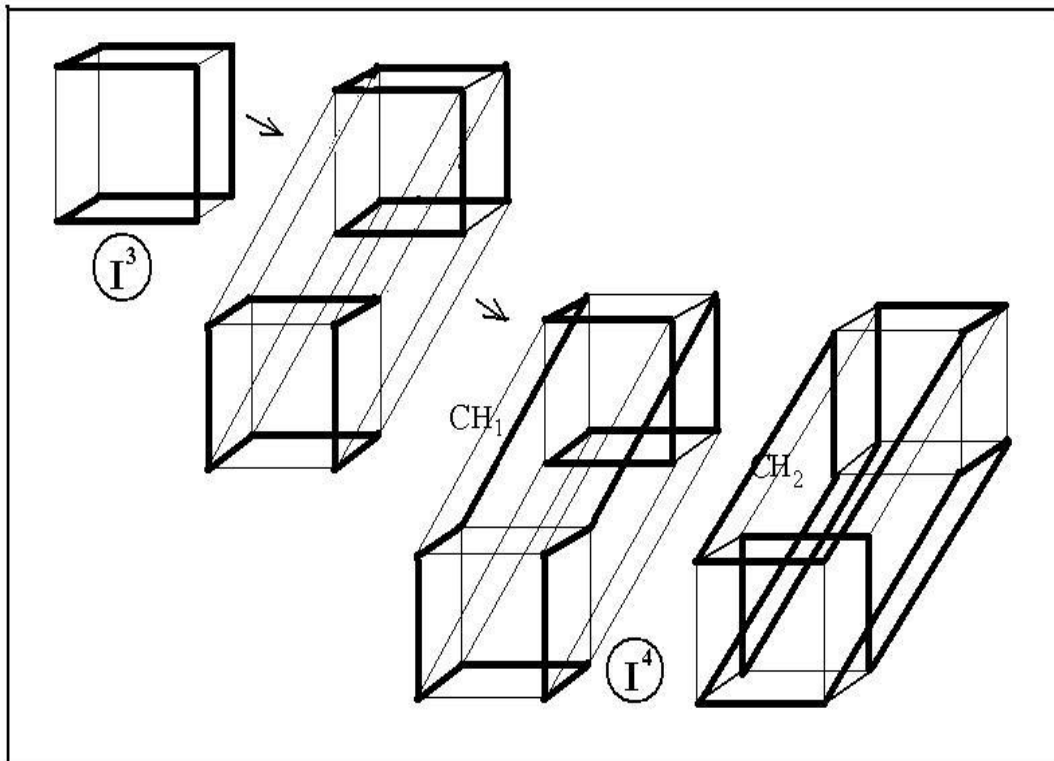
- Вершинное
- Реберное

- 000
- 001 002
- 011 021
- 010 012
- 110 210
- 111 112
- 101 121
- 100 102
- 000 200
- 002
-

- В случае реберного представления гамильтонова цикла выполняются:
- $\Pi(D_i, D_{i+1}) = v_i; (v_i - \text{вершина } n\text{-куба})$
- $\omega(\Pi(D_i, D_{i+2})) = 1;$

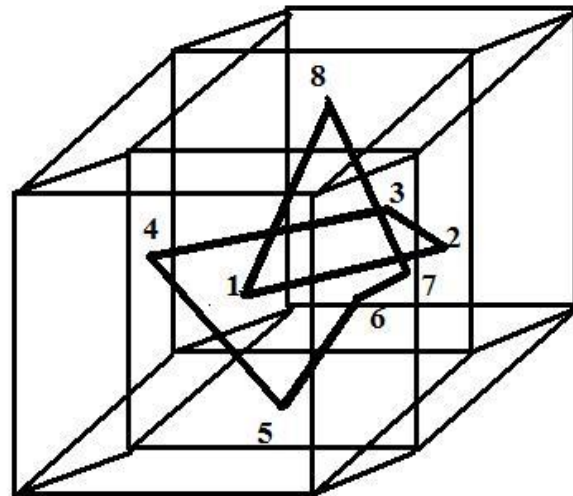
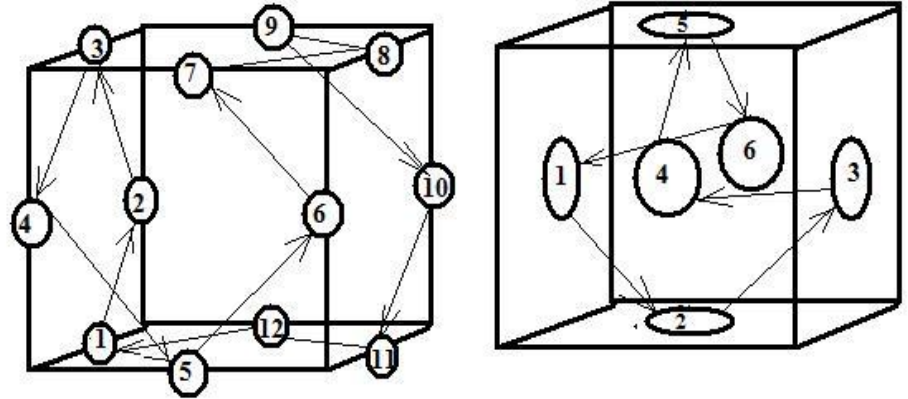
Рекурсивная процедура генерации $HC(n) \square HC(n+1)$.

- Склейка двух $HC(n) \square HC(n+1)$;
- Склейка попарно двух ортогональных \square два ортогональных в следующей размерности.
- При $n > 3$ I^n содержит по крайней мере два орт. HC .
- Гипотеза: I^{2n} ($n > 1$) содержит n орт. HC



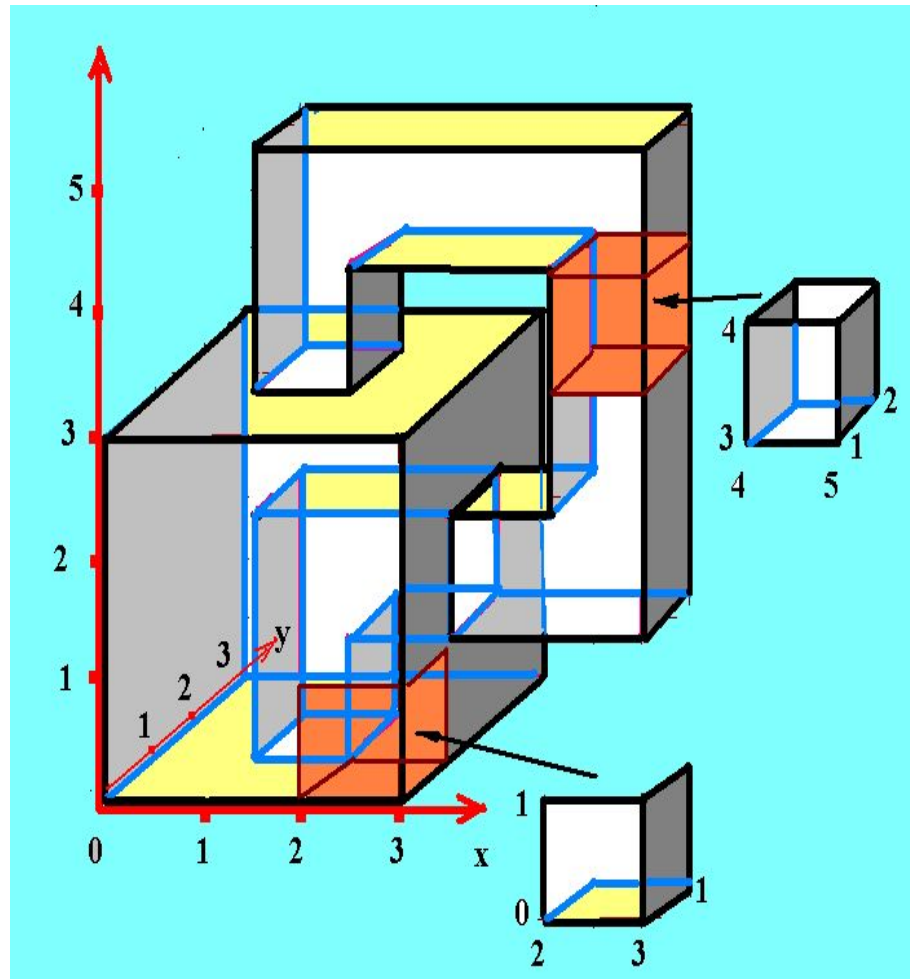
Циклические пути с неповторяющимися кубантами.

- Обобщение гамильтонова цикла-цикл по всем k -кубантам на $k+1$ -кубантах.
- Динамическая интерпретация пути- «шаги землемера» в смежную грань. В «распоре»-ребро, квадрат, куб и т. д. (кубанты).



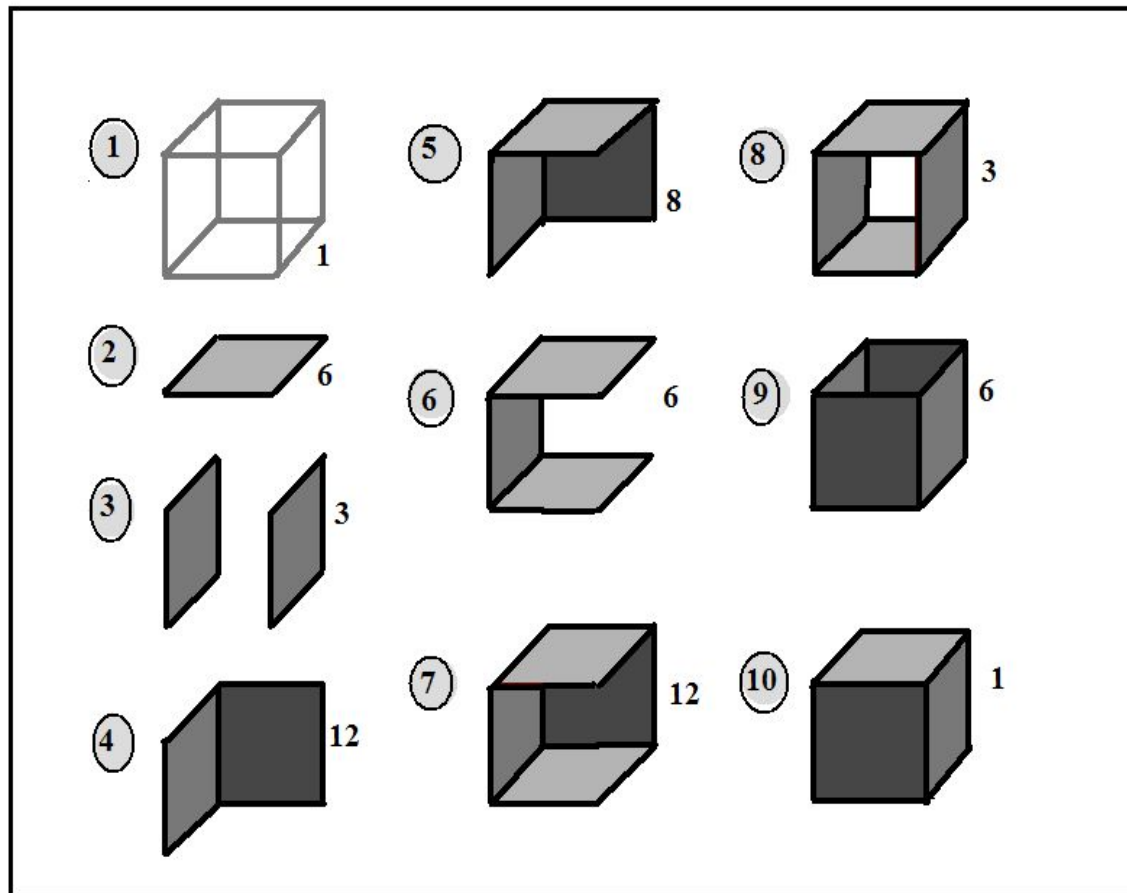
Пример топологического «строительства»

- Кубическая бутылка Клейна из панелей-комплексов гиперграней.
- Нумерация всех комплексов гиперграней и правил их сборки.
- Отображение в памяти компьютера.



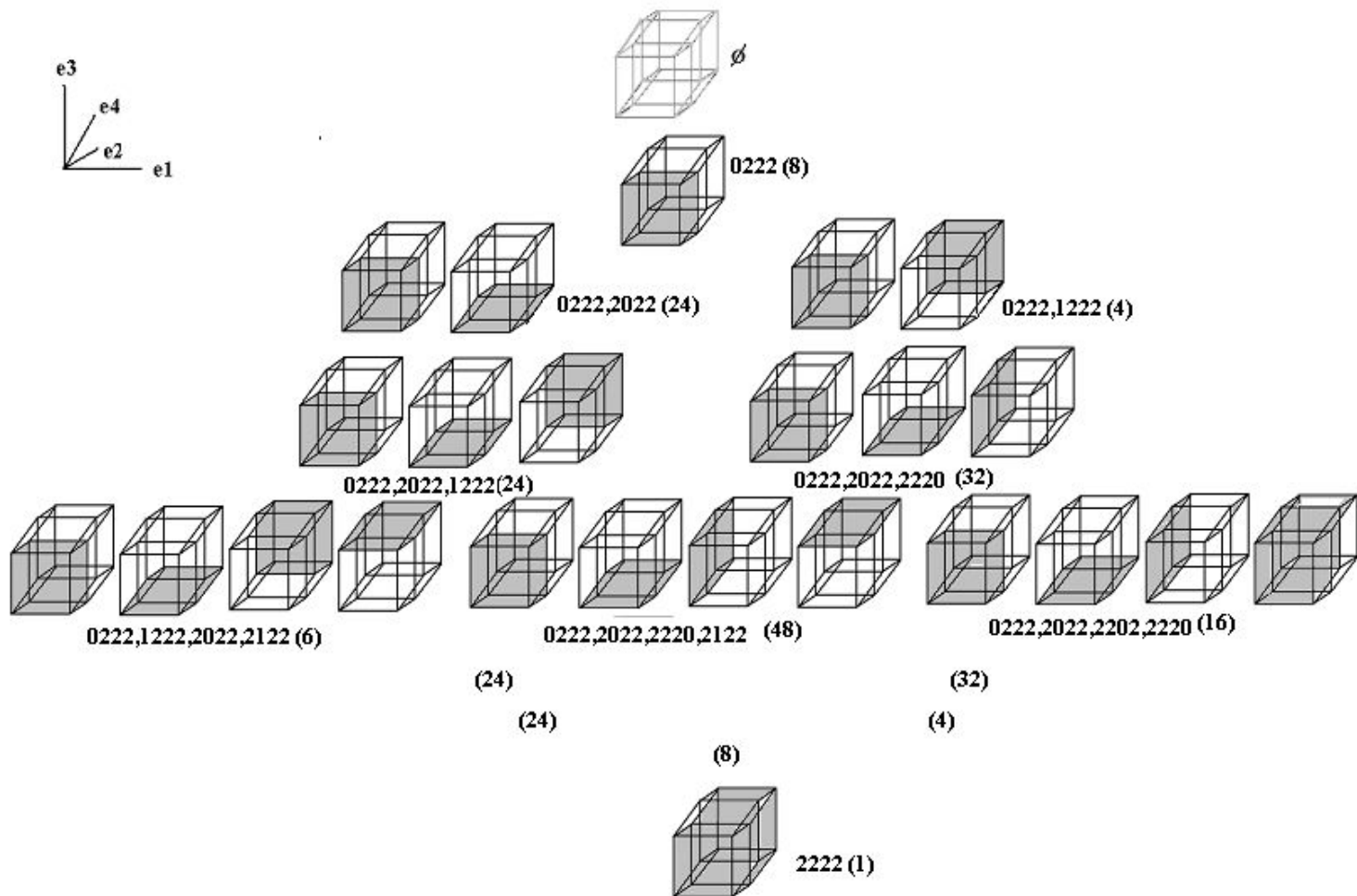
Комплексы из гиперграней \mathbb{I}^3

- 10 типов не гомеоморфных комплексов из гиперграней.
- 64 типа различных по положению в \mathbb{I}^3 (различны коды кубантов).



Комплексы в I^4

Все негомеоморфные типы комплексов гиперграней I^4 Раздельное изображение гиперграней комплексов



Вычисление (построение) комплекса гиперграней в I^n

- Исходные данные: размер, структура, метрика.
- Выходные : Комплекс(ы) кубантов или пустое мн-во.
- Алгоритм вычисления с помощью таблицы возможностей.
- Пример из I^4 : размер-4, цикл, число минимальных путей, отличных от 0 равно 2 \square {0222;2202;1222;2212;}

0xxx	x0xx	xx0x	xxx0	1xxx	x1xx	xx1x	xxx1	ΣП	(0/1)
*	*			*		*		1	2/2
*		*		*		*		2	2/2
	*	*		*		*		1	2/2
	*			*		*	*	0	1/3

Часть 5. Элементы динамики в кубических структурах

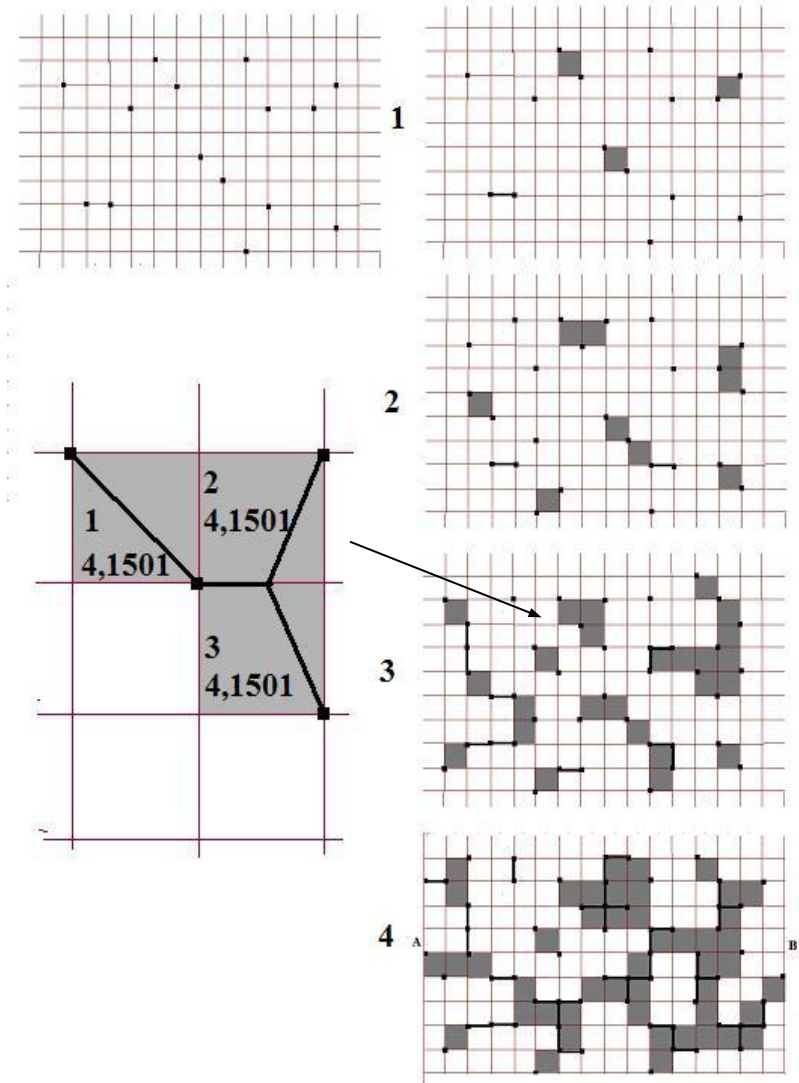
- Огромное число вариантов изменения структуры кубических комплексов (с сохранением k -связности между всеми подкомплексами или без, с сохранением общего числа кубантов или без и т.д.).
- Аналогии гомотопных преобразований. Изотропность и анизотропность преобразований. (Минск2007)
- Случайные преобразования-появление и исчезновение k -граней (кубантов) в n -мерных кубических комплексах. (Динамическая маркировка).

Маркировка кубантов

- Маркировки целыми числами соответствуют конечным множествам определенных качеств в т.ч. наличию или отсутствию кубанта в комплексе в рассматриваемый момент, определенной раскраске в конечное число цветов, отражающих определенные свойства в зависимости от конечного множества состояний некоторого параллельного процесса или некоторых процессов.
- Маркировки вещественными числами отражают непосредственно численные результаты расчетов, связанных с рассматриваемой структурой и приписываемых данному элементу структуры (кубанту).

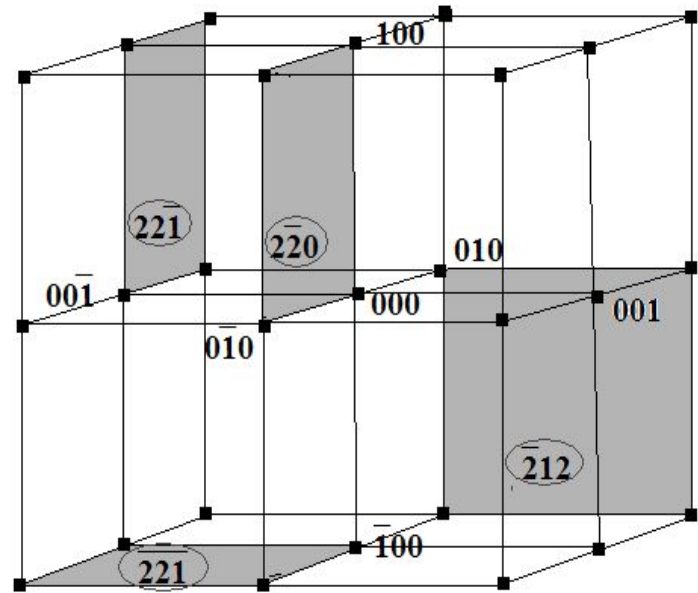
Пример маркировки.

- Случайный процесс в дискретном времени бросания множества целых точек, образования в каждый момент на этом множестве выпуклых оболочек (операция над кубантами) и развития общей перколяционной ситуации.
- Маркировки каждого 2-кубанта-момент рождения ($1, 2, \dots \in \mathbf{Z}_+$), длина ребер дерева Штейнера ($L \in \mathbf{R}_+$) для локального связного множества.



Кодирование n-октантов, как расширение понятия кубанта

- Семиричный алфавит $\{\emptyset, \emptyset^*, 0, 1, \bar{1}, 2, \bar{2}\}$ и множество n-октантов с одной общей целой точкой. («-» вынесен как надстрочный символ).
- Табличное задание бинарной операции умножения кубантов в \mathbf{O}^n . Коммутативна, но не ассоциативна.
- Моноид на семиричном алфавите \square сохранение метрических и топологических свойств представления кубантов.

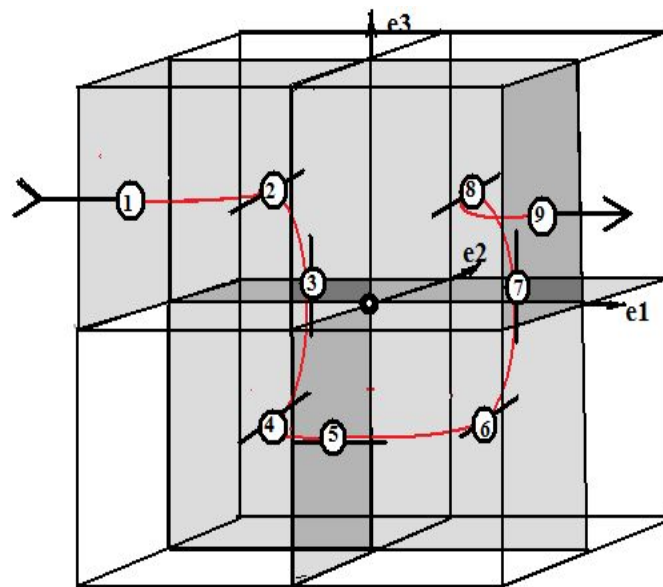


П	\emptyset	\emptyset^*	0	1	$\bar{1}$	2	$\bar{2}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
\emptyset^*	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
0	\emptyset	\emptyset	0	\emptyset	\emptyset	0	0
1	\emptyset	\emptyset	\emptyset	1	\emptyset^*	1	\emptyset
$\bar{1}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset^*	$\bar{1}$	\emptyset	$\bar{1}$
2	\emptyset	\emptyset	0	1	\emptyset	2	0
$\bar{2}$	\emptyset	\emptyset	0	\emptyset	$\bar{1}$	0	$\bar{2}$

$\emptyset \rightarrow \min r = 1; \emptyset^* \rightarrow \min r = 2;$

Октантная окрестность \mathbb{O}^n целой точки и комплекс кубантов на ней

- Все n -октанты, имеющие общую вершину (целую точку) образуют n -октантную окрестность этой точки.
- Любой комплекс октантов на окрестности – по к.м. 0 -связный.
- Комплекс (рис)-1-связный.
- 22^*1^* , 202^* , 02^*2 , 2^*02 , 2^*2^*0 , 2^*02 , 022 , 202 , 212 ($2-2-1=22^*1^*$)
- Последовательный обход через 3-октанты
(22^*2^* , 222^* , 2^*22^* , $2^*2^*2^*$, 2^*2^*2 ,
 2^*22 , 22^*2 , 222)-3-путь в
«разрешенном комплексе коридоре».



Матрица парных произведений кубантов в \mathbb{O}^n

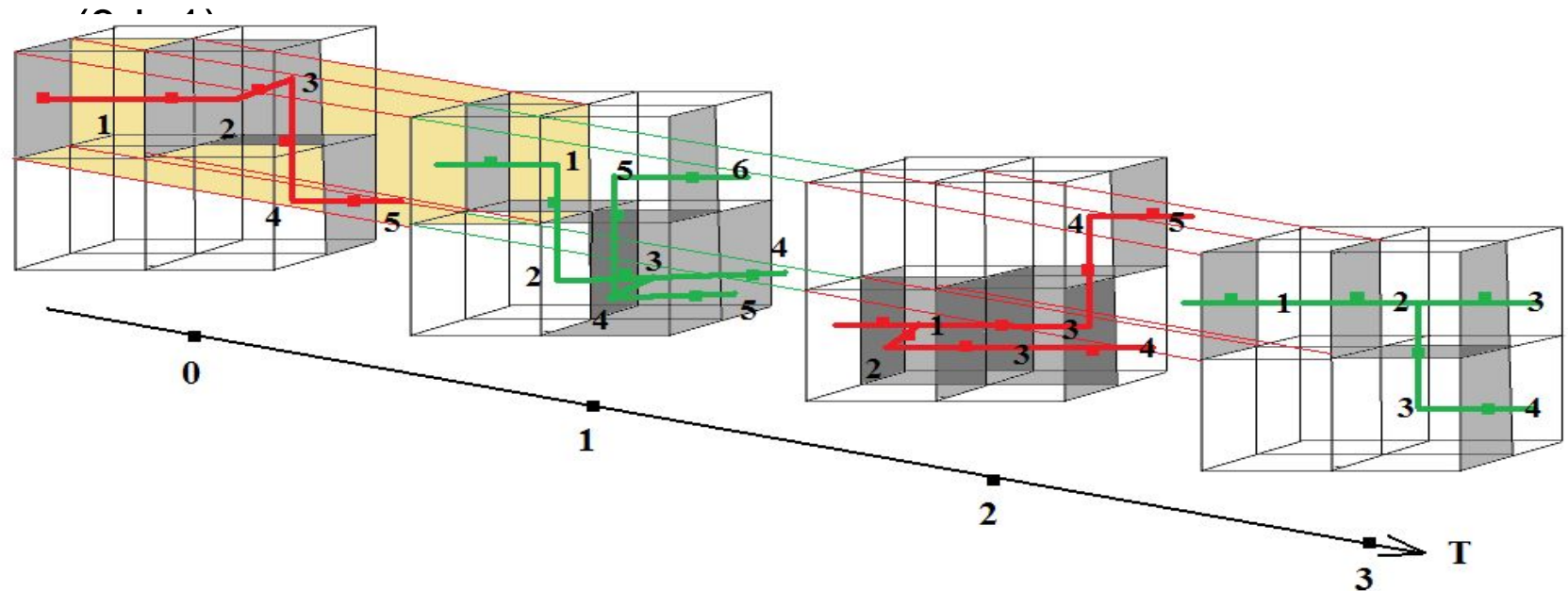
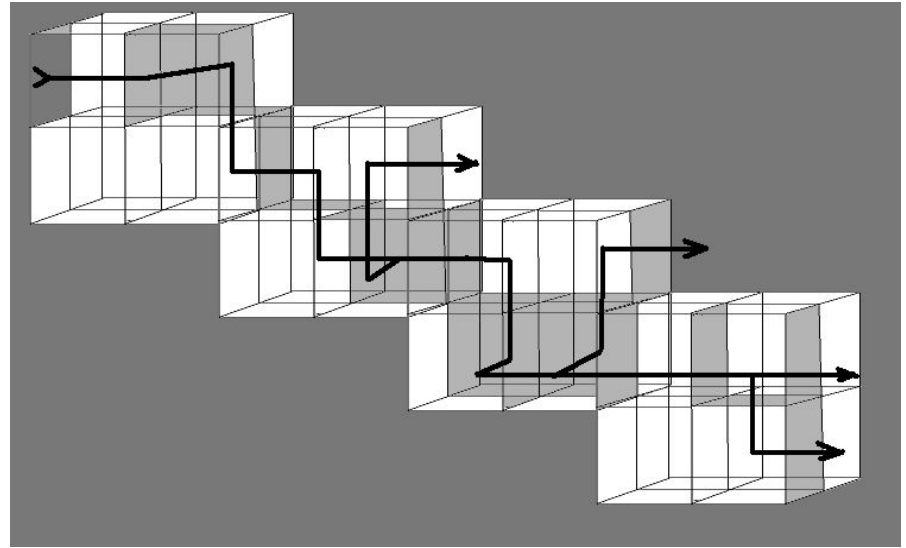
- Множество кубантов в \mathbb{O}^4 : $\{21^*22; 122^*2^*; 2^*212; 1^*2^*2^*2^*\}$; и матрица парных произведений (принятые обозначения $-1=1^*$; $-2=2^*$):

•	21^*22	122^*2^*	2^*212	$1^*2^*2^*2^*$
•	21^*22	$1\emptyset 00$	$0\emptyset 12$	$\emptyset 1^*0\ 0$
•		122^*2^*	$\emptyset 2\emptyset 0$	$\emptyset^*0\ 2^*2^*$
•			2^*212	$1^*\ 0\ \emptyset\ 0$
•				$1^*2^*2^*2^*$

- Минимальные пути: $\emptyset \square 1; \emptyset^* \square 2;$
- Множество-несвязное.

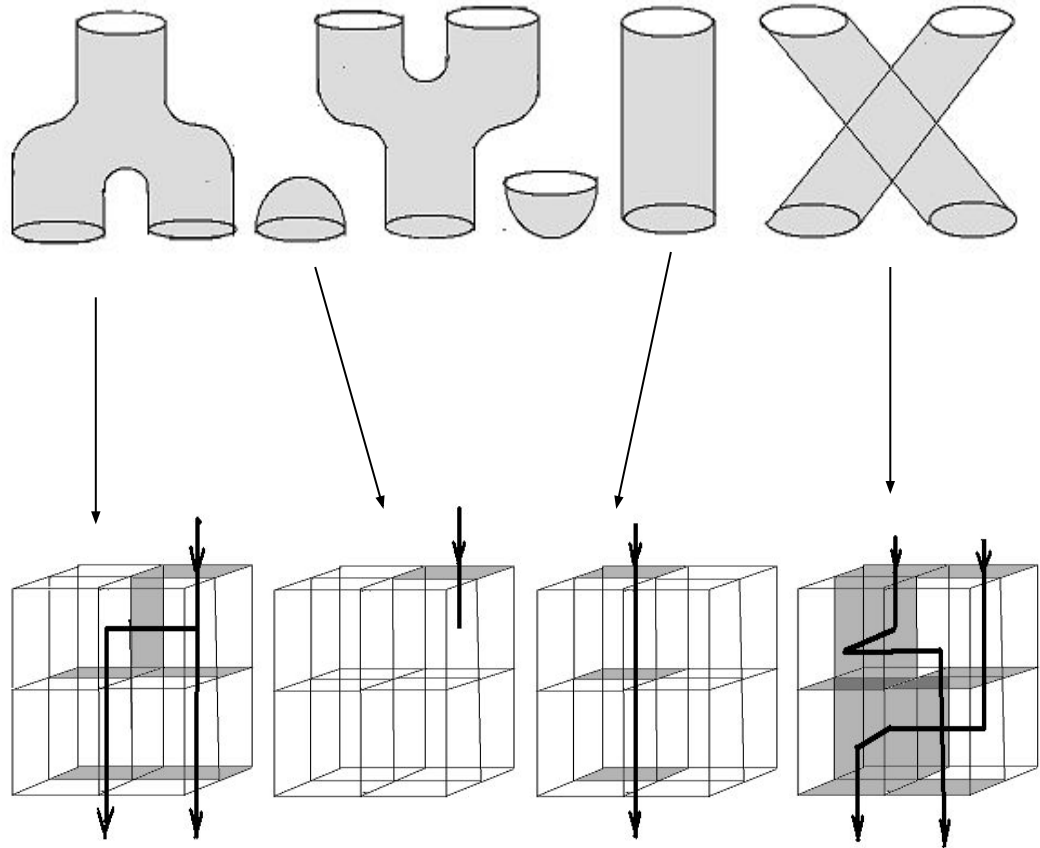
3-пути в октантных коридорах

- Полупрозрачные 2-грани открыты для прохода.
- Вариант древовидной структуры возможных 3-путей(3d).
- Изменения в октантных окрестностях в дискретном времени.



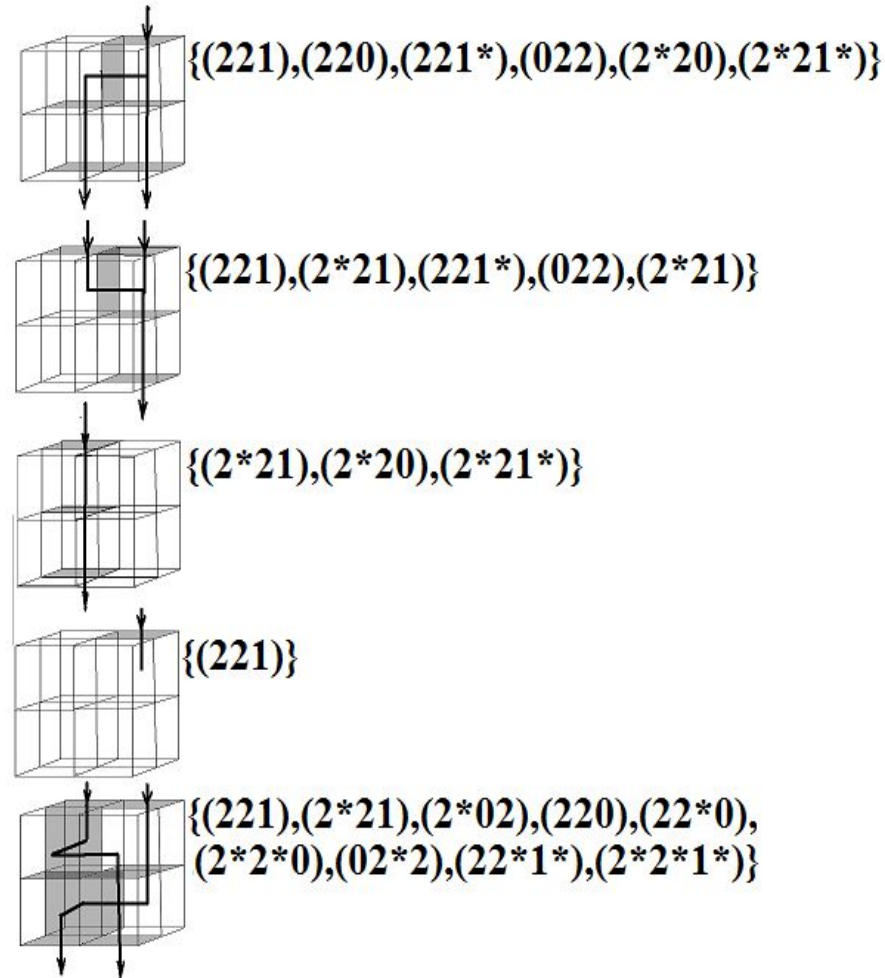
Один из вариантов топологической интерпретации алгебры Фробениуса октантными структурами

- Методы алгебраической топологии в теоретической физике – наиболее активная область исследований. [9,13-15]
- Топологическое представление алгебры Фробениуса (АФ) наиболее полно дано А.Лаудой.[10]
- Общепринятые операторы АФ и октантные структуры. (рис)



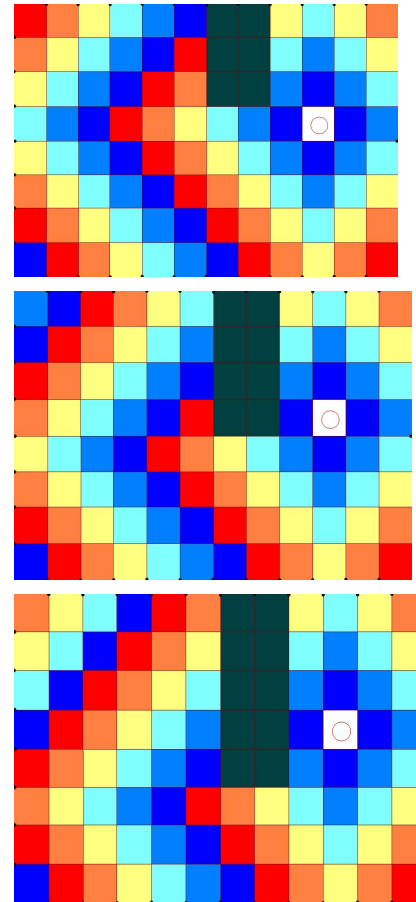
Кодирование операторов через октантные структуры

- Оператор \square комплекс кубантов в $\mathbf{O}^n(x_1, \dots, x_n)$;
- Ситуация на стыках вычисляется как произведение.
- Рис. пример кодирования в \mathbf{O}^3 .



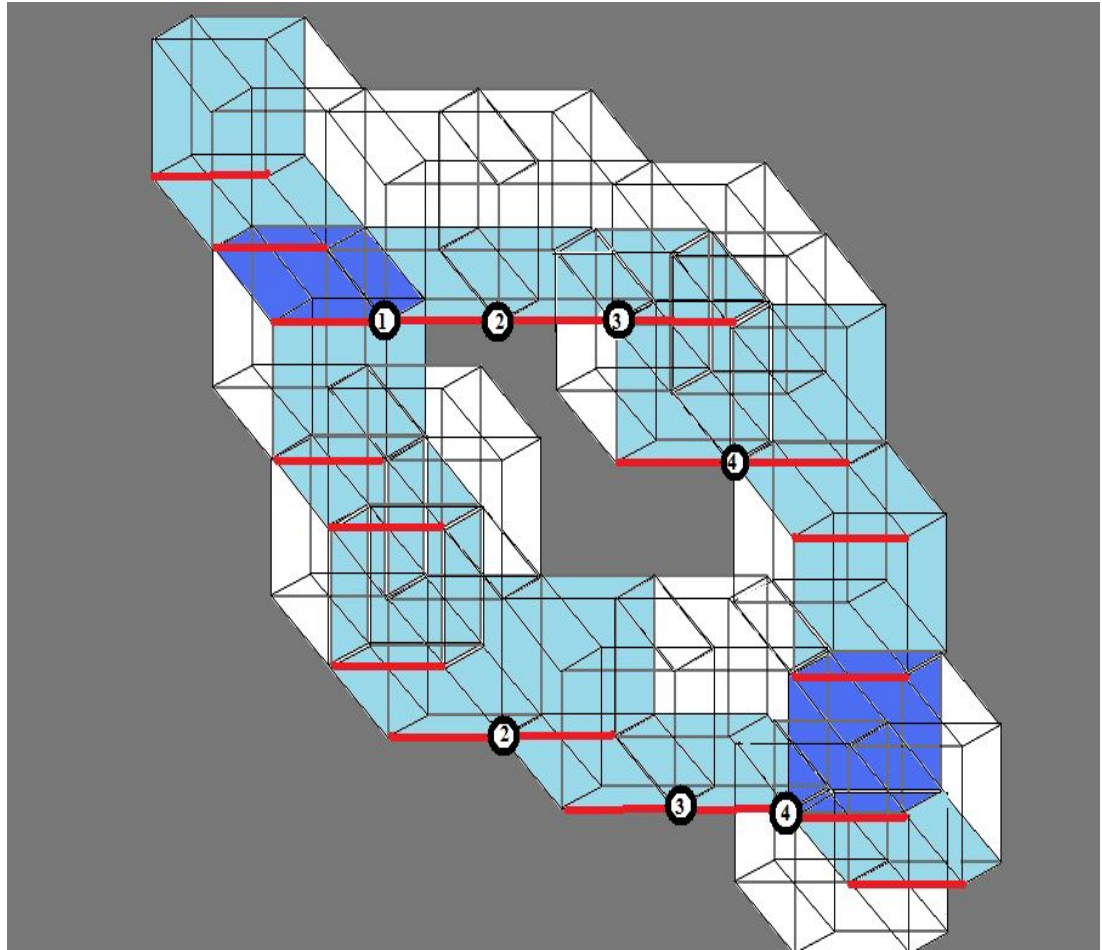
Марковские процессы-перестройки кубантов и состояния O^n

- В \mathbf{R}^3 общее число состояний O^3 равно 2^{36} , где 36-число 2-граней в O^3 .
- Появление и исчезновение 2-граней – детерминированное или (и) случайное событие.
- Зависимость структуры (радиус связности, род границы и др.) «большого» комплекса от процесса перестроек.
- Эргодичность процесса \square
обобщенная картина динамики.



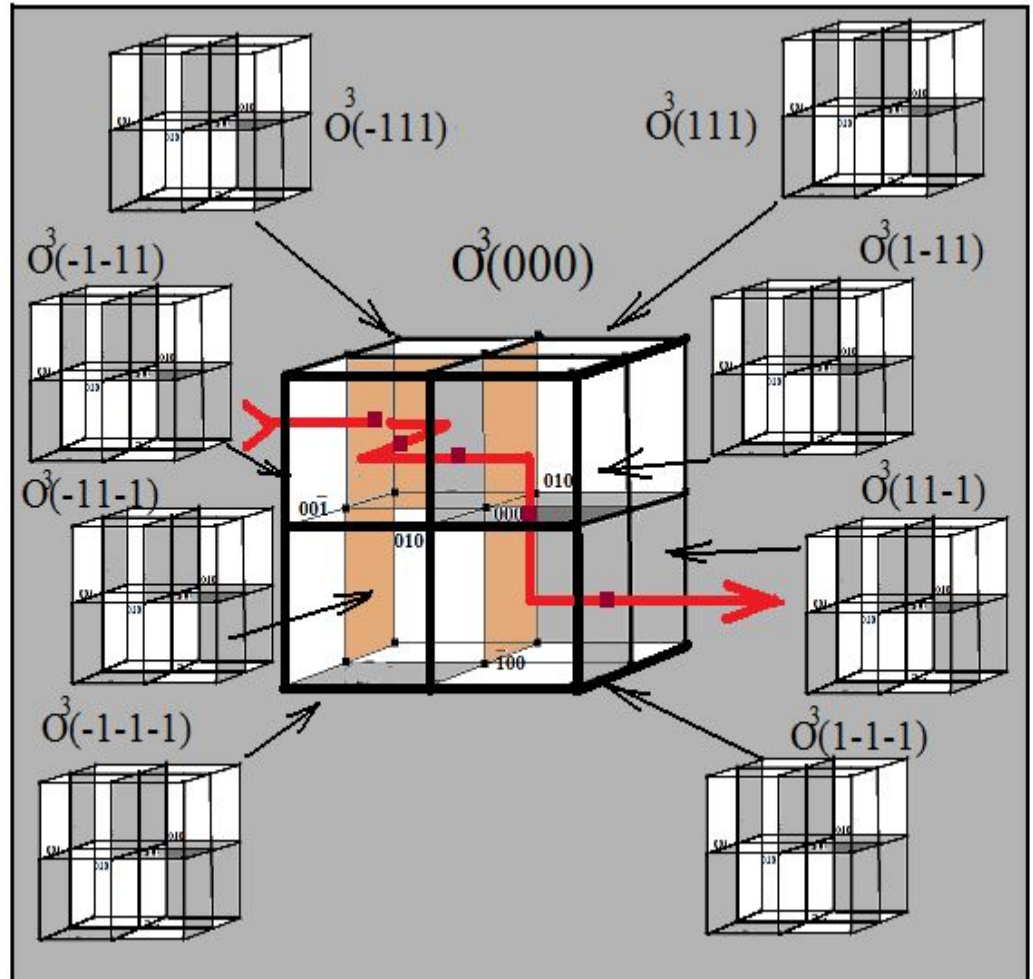
4d схема топологических коридоров в дискретном времени.

- Ось дискретного времени.
- Два различных 3-пути (коридора) за 4 дискретных момента времени.
- Условия допустимости (открытости соответствующих граней) для коридора не отображены.



Генерация комплексов в R^n_c .

- Склейка (join) комплексов из $\mathcal{O}^n(x,y,z)$.
- Самоподобие и появление новых свойств пространства.
- Пример R^3_c формирование самоподобной картины со свойством перколяции.
- Расчеты результирующей топологической картины и определение общих свойств связности операции над кубантами в октантах.



Часть 6. Общие положения машинного представления и структуры данных

- Разработать и эффективно реализовать на суперкомпьютерах массивно-параллельной архитектуры (наиболее доступных отечественному пользователю) **инструментальную систему** обработки кубических структур на базе предложенной алгебры кубантов и октантов.
- В понятие эффективности здесь входят следующие составляющие – размерность пространства и число гиперкубических комплексов, сокращение времени решения задач за счет совмещения действий в одной операции и максимального распараллеливания обработки между многими процессорами суперкомпьютера.

Машинное представление кубантов

- Машинное представление четверичного алфавита:
- $\emptyset \square 0; 0 \square 1; 1 \square 2; 2 \square 3$
- При двоичном представлении этого алфавита операция умножения кубантов совпадает с поразрядной (битовой) операцией логического умножения $2n$ -разрядных двоичных слов.

- Машинное табличное представление умножения.

• \otimes	0	1	2	3
• 0	0	0	0	0
• 1	0	1	0	1
• 2	0	0	2	2
• 3	0	1	2	3

Машинное представление кубантов в \mathbb{O}^n

- Машинное табличное представление операции умножения
- Машинное представление семиричного алфавита:
 - $\emptyset \square 0; \emptyset^* \square 1; 0 \square 2;$
 $1 \square 3; 2 \square 4; -1 \square 5;$
 $-2 \square 6;$

• x	0	1	2	3	4	5	6
• 0	0	0	0	0	0	0	0
• 1	0	0	0	0	0	0	0
• 2	0	0	2	0	2	0	2
• 3	0	0	0	3	3	1	2
• 4	0	0	2	3	4	0	2
• 5	0	0	0	1	0	5	5
• 6	0	0	2	2	2	5	6

Основные структуры данных.

- Текстовый вид входных и выходных данных:
- $\{ [] () () \dots () [] () () \dots \} \dots \{ \dots \} \square$
- $\{ \}$ -комплекс из n-кубов;
- $[]$ -координаты n-куба в составе комплекса;
- $()$ -кубант в составе n-куба; Алфавит $\{Z, 0, 1, 2\}$
- Основные структуры данных- набор классов.
- Класс «Куб» (координаты и набор кубантов) –реализация одномерный массив.
- Класс «Комплекс»(кубы в комплексе)-одномерный массив
- Реализация средствами библиотеки STL C++;
- Для кластерной реализации-представление кубанта как самостоятельного элемента: [идентификатор комплекса] [координаты n-куба] [кубант].

Основные функции

- Уровень кубантов (для двух кубантов): умножение и H -сжатие.
- Уровень комплекса кубантов в n -кубе: вычисление матрицы парных произведений кубантов и следствий из нее-топологическая и HH -метрическая структура комплекса.
- Уровень комплекса из n -кубов: вычисление EH -расстояний между комплексами в R_n .
- Геометрические операции с n -мерными векторами-библиотеки Intel MKL, BLAS.

Часть 7. Полиморфное кодирование и алгебраизация супервычислений.

- Супервычисления – это не только рациональные методы использования предельной по своей производительности аппаратуры и системного программного обеспечения суперкомпьютеров, но и лингвистическое (в том числе и математическое) представление данных и операций над этими данными, позволяющие создать алгоритмы нового уровня параллелизма и совмещения операций.
- Ниже рассматриваются аспекты предложенных методов с точки зрения их возможного влияния на архитектурные решения суперкомпьютеров и дальнейшего развития направления условно называемого «полиморфное кодирование и алгебраизация супервычислений».

Некоторые обобщения

- Кубант обладает полиморфными свойствами:
- Четверичное n -разрядное слово.
- Представляет геометрический объект (n -мерный куб и его грани). Допускает рассмотрение как точка гиперметрического пространства с Хаусдорфовой метрикой (обобщение метрики Хэмминга для двоичных кодов).
- Представляет элемент топологических комплексов.
- Вместе с расширением (псевдокубанты) образует алгебраическую структуру (полугруппу с единицей-МОНОИД) относительно введенной операции умножения.
- Разряды слова с символом 2 можно рассматривать как обобщение q -битов (значения 0 и 1 и все действительные числа отрезка $0,1$) и в целом кодирование как полуквантовое.[12]
- В машинном представлении кубант $2n$ -разрядное двоичное число, к которому применим весь арсенал машинных операций.
- В целом эффективная масштабируемость (в размерности n пространства).

Вычислительные особенности

- Выполнение основной операции (умножения) сводится к поразрядной операции логического умножения над $2n$ -разрядных двоичных кодов практически неограниченной длины- поразрядное перемножение стрингов потенциально может быть реализовано за один машинный такт. Совмещенное вычисление данных о связности и длине кратчайшего пути между кубантами.
- Вычисление матрицы парных произведений (обобщение матрицы смежностей) для комплекса из m кубантов имеет сложность m^2 .
- Вычисление Хаусдорфова расстояния между n -мерными кубантами вместо задачи экспоненциальной сложности 2^n сводится к задаче сложности n .

Вычислительные особенности для суперкомпьютеров кластерного типа

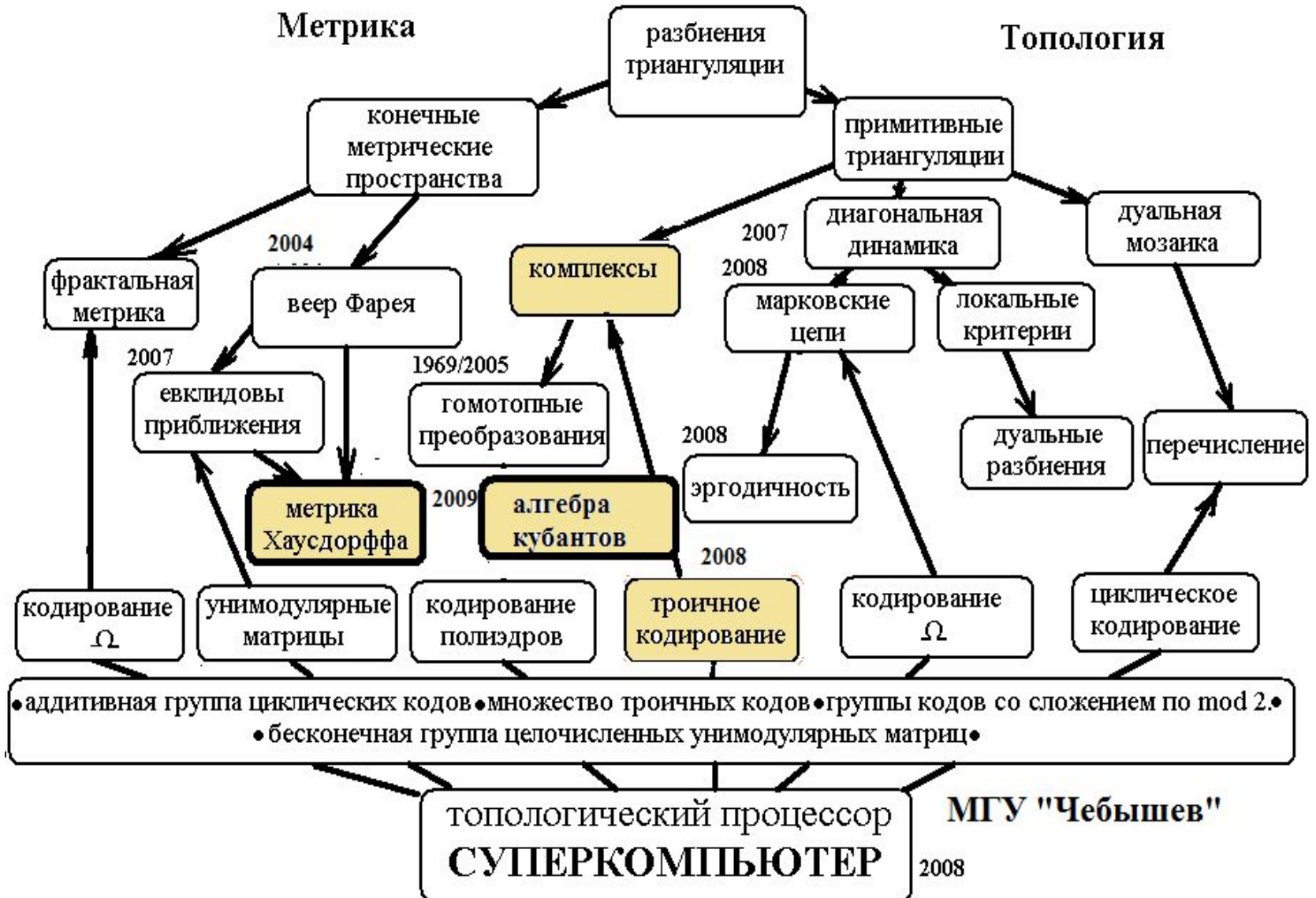
- Линейный характер увеличения длины слова кубанта от размерности пространства n и поразрядные операции над кубантами позволяют задать вопрос об оценке предельных возможностей современных кластерных суперкомпьютеров в задачах подобного класса и на ближайшую перспективу при условии сохранения общих тенденций развития их архитектур.
- В качестве самого упрощенного (начального) подхода рассмотрим первый этап в задаче анализа структуры M комплексов (каждый по m кубантов) в n -мерном пространстве – вычисление матриц парных произведений.

- Для оценок общих ресурсов по оперативной памяти и производительности необходимо учесть, что каждый кубант сопровождается значительным объемом данных во много раз превосходящий представление его геометрико-топологической структуры. Обработка этих данных на данном этапе не рассматривается, но в оценке объема оперативной памяти они участвуют. Будем считать, что их объем $2^n v$, где n - размерность пространства, а v -некоторая постоянная.
- Тогда грубая оценка оперативной памяти для хранения исходных данных в байтах $Mm(2n/8)2^n v$ (при $v=100$ байт $\Sigma V_0 = 100Mm(n/4)2^n$; а выходных данных (матриц) $\Sigma V_1 = Mm^2(n/4)$;
- Оценка общего числа операций для однократного вычисления всех M матриц парных произведений для комплексов из m кубантов $Q = Mm^2(n/4)$. При $n=10$; $M=10^3$; $m=10^3$;
- $Q \sim 10^{10}$; (в настоящее время производительность нескольких процессоров)
- $Sv_0 \sim 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^{11} < 1$ Терабайт (в настоящее время память 500 микропроцессоров).
- При $n=20$ и тех же M, m : $Q \sim 10^{11}$; $SV_0 \sim 1$ Петабайт (память 0,5 миллиона современных микропроцессоров).
- Т.о. следует ожидать, что проблемы оперативной памяти в этой области будут возрастать быстрее чем суммарного быстродействия.
- Если рассматривать только данные по структуре (SV_1), то возможна обработка до $n=100$; $M=10^3$; $m=10^4$. Тогда $Q \sim 10^{15} - 10^{16}$;
 $SV_1 \sim 0,1$ Петабайт – **диапазон петафлопсной системы.**

Часть 8. Инструментальный комплекс «Топологический процессор»

- Основная цель - разработать математическое и программное обеспечение для инструментальной системы, реализующей операции анализа и синтеза на многомерных кубических структурах, максимально используя методы совмещения и распараллеливания вычислений на архитектурах современных и перспективных **суперкомпьютеров.**
- Работы ведутся в НИВЦ МГУ с 2005 года. Программное обеспечение на C++.Графика OpenGL, VRML.
- Начало реализации на системе «Чебышев». («Волна» на решетке 10^{10})-2008г
- Основные публикации по теме за прошлые годы:
- Рябов Г.Г.Метрические и топологические волны на решетках.//Изд. НИВЦ МГУ.2005
- ----- Алгоритмические основы топологического процессора.// Труды МСО-2005.МГУ.
- Рябов Г.Г.,Серов В.А. Отображения целочисленных множеств и евклидовы приближения.//Выч. методы и программирование.2007
- Ryabov G.,Serov V. Simplicial-lattice model and metric-topological constructions.// Proc. IX PRIP-conference.Minsk.2007
- Рябов Г.Г.,Серов В.А. Компьютерные комбинаторно-топологические построения и их преобразования.//Информационные технологии и выч. системы.РАН.2008

Схема работ по инструментальному комплексу «Топологический процессор».



Текущие технические задачи

- Разработка набора макроопераций на основе алгебры кубантов для инструментальной системы «Топологический процессор», являющейся инструментом фундаментальных исследований в части построения примеров и контрпримеров с определенными свойствами.
- Программная реализация и верификация набора макроопераций «Алгебра кубантов» для суперкомпьютера МГУ «Чебышев».
- Полное документирование математического и программного обеспечения «Алгебры кубантов».
- Подготовка и выпуск методического пособия по «Алгебре кубантов».

Текущие теоретические задачи

- Разработка вариантов организации структуры оперативной памяти кластерного суперкомпьютера для эффективной реализации алгоритмов на базе алгебры кубантов.
- Исследования видов полиморфного кодирования для симплициальных структур и совмещенных кубико-симплициальных структур.
- Разработка эффективных (с точки зрения машинной реализации) октантных структур и операций над ними для кодовой интерпретации алгебр Фробениуса.

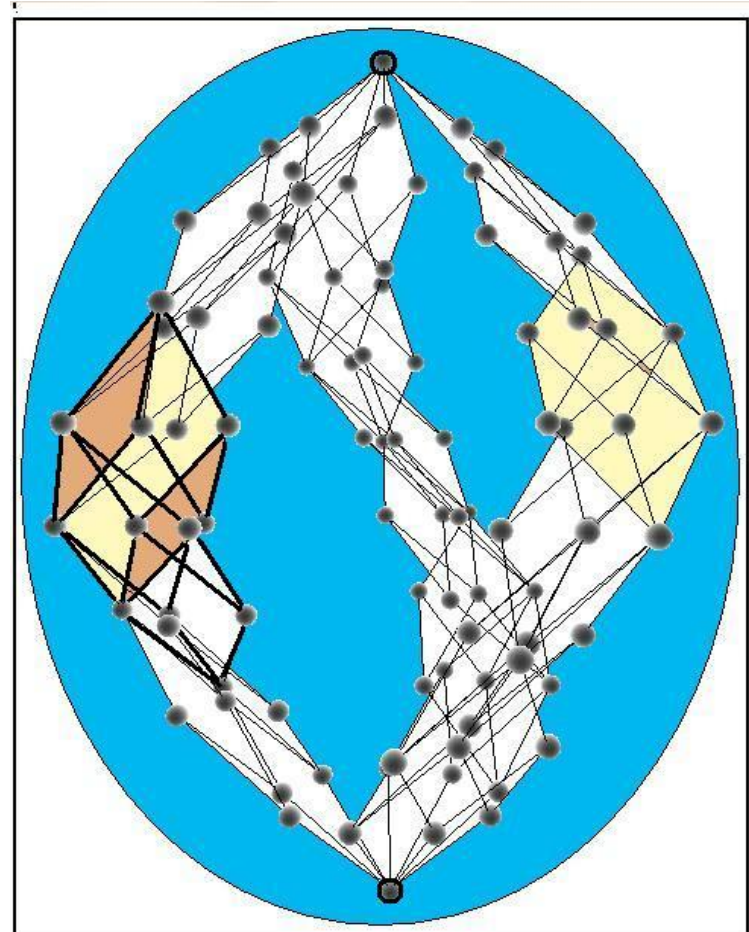
Литература.

- 1.Новиков С.П. Топология. Москва-Ижевск.РХД.2002.
- 2.Долбилин Н.П.,Штанько М.А.,Штогрин М.И. Кубические многообразия в решетках.// Изв.РАН.Сер. матем.1994.**58**. вып.2.93-107
- 3.Деза М.,Штогрин М. Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки.// Успехи матем. наук.1997.52.№6.155-156.
- 4.Деза М.,Штогрин М. Мозаики и их изометрические вложения.// Изв. РАН.Сер. матем.2002.66.№3.3-22.
- 5.Бухштабер В.М. Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения.// Труды матем. Ин-та РАН.2008.263.18-43.
- 6.Кузнецов С.Д.,Кудрявцев Ю.А. Математическая модель OLAP-кубов. //Программирование.2009.№5
- 7.Pedersen T.B. Multidimensional databases.// Industrial Information Technology.Handbook. 2005.
- 8.Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes.// Bell system Tech.Journal. 1950.**29**(2) 147-160
- 9.Baez J.,Lauda A. A Prehistory of n-categorical Physics.// arXiv: 0908.2469.v1 [hep-th] 18 Aug 2009.
- 10.Lauda A. Frobenius algebras and planar open string topological field theories.// arXiv: math(0508.349 v1) [math QA] 18 Aug 2005.
- 11.Stanley R. Combinatoric and Commutative Algebra.// Birkhauser.1996
- 12.Manin Yu.I. Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm. // arXiv: quant-ph/9905008 v1. 2 March 1999.

- 13. Ambjorn J., Jurkevicz J., Loll R. The Universe from Scratch. // arXiv: hep-th/0509010 v3. 14 Oct 2006.
- 14. Coecke B., Quantum picturalism. // arXiv:0908.1787v1[quant-ph] 13 Aug 2009.
- 15. Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Шпиз Г.Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход. Математ. заметки. **69**:5(2001),758-797
- 16. Ryabov G., Serov V., Simplicial-lattice model and metric-topological constructions. // Proc. of IX Conf. on Pattern Recognition and Inf. Processing. V2. Minsk.2007.135-140
- 17. Рябов Г.Г. О путевом кодировании k-граней в n-кубе. // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**.N1.20-22
- 18. ----- Марковские процессы в динамике примитивной триангуляции в пространствах R^3 и R^4 . // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**.N1,5-12
- 19. ----- О четверичном кодировании кубических структур. // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**.N2,154-161
- 20. ----- Хаусдорфова метрика на гранях n-куба. // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. (в печати).
- 21. ----- Алгебраическое представление кубических структур и супервычисления. // Сб. Программные системы и инструменты. ВМиК МГУ. 2009. №10, 12-26

Приложение 1. Генерация комплексов кубантов внутри $I^n(O^n)$.

- 1. Общие условия (ОУ) на множество комплексов.
- 2. Условия внутри комплексов. (УВК)
- 3. Условия между комплексами. (УМК)
- 4. Диагностика совместимости условий. (ДСУ)
- Рассмотрение на примере построения (вычисления) максимального числа непересекающихся минимальных (по длине) k-путей из одной вершины в другую n-мерного куба с максимальным разнесением их друг от друга.



Неформальная постановка задачи

- Проложить максимальное число k -мерных непересекающихся тоннелей минимальной длины между двумя заданными вершинами n -куба на максимальном расстоянии друг от друга. (Кроме пересечения этих путей в начальной и конечной вершинах).

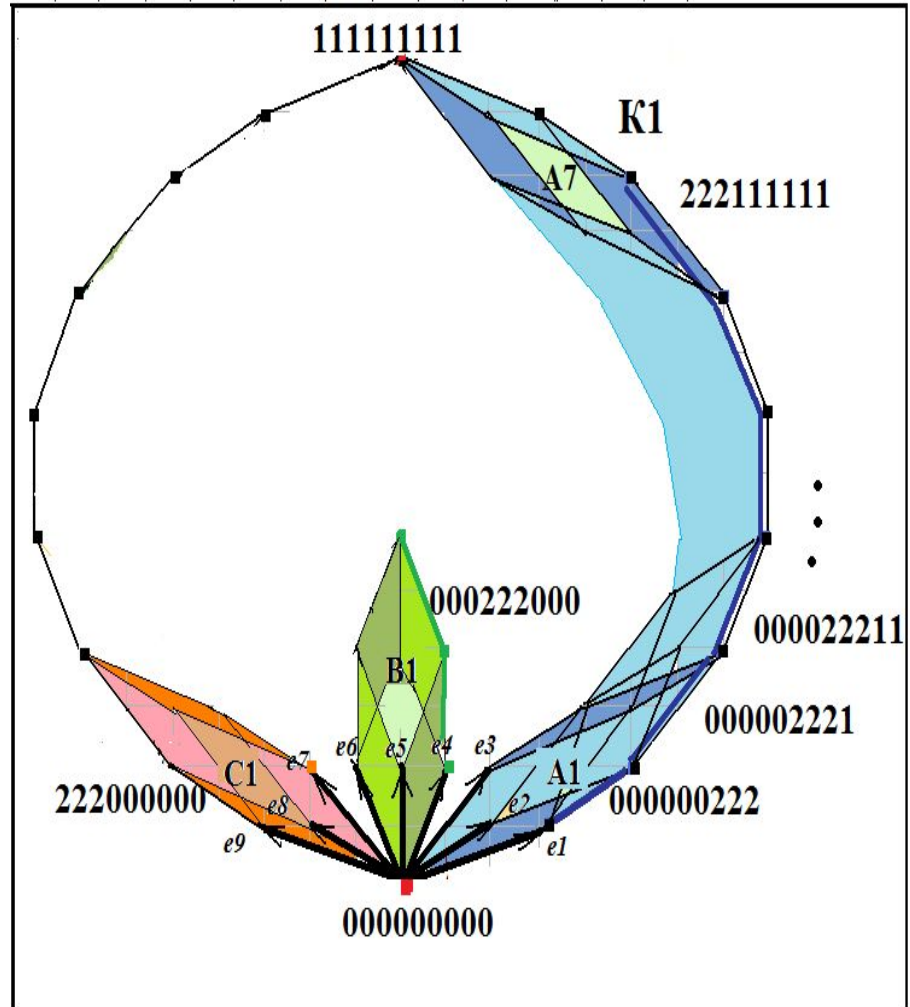
Формальная постановка для \mathbb{I}^9 .

- Общие условия: размерность $n=9$; заданы вершины $D1=(00\dots 0)$ и $D2=(11\dots 1)$; определить три k -пути (три множества кубантов)
 $K1\{A1, A2, \dots, Am\}; K2\{B1, B2, \dots, Bm\}; K3\{C1, C2, \dots, Cm\}$
размерности $k=3$ в \mathbb{I}^9 таких, что m - \min и выполняются
- УВК: $\dim\Pi(Ai, Ai+1)=2$; $\dim\Pi(Bi, Bi+1)=2$; $\dim\Pi(Ci, Ci+1)=2$; для $i=1 \div m-1$;
- $\Pi(A1, D1)=D1$; $\Pi(B1, D1)=D1$; $\Pi(C1, D1)=D1$;
- $\Pi(Am, D2)=D2$; $\Pi(Bm, D2)=D2$; $\Pi(Cm, D2)=D2$;
- УМК: $\Pi(Ai, Bi)=\emptyset$; $\Pi(Ai, Ci)=\emptyset$; $\Pi(Bi, Ci)=\emptyset$; $i=1 \div m$;
- $\rho_{HH}(Ai, Bi)=\rho_{HH}(Ai, Ci)=\rho_{HH}(Bi, Ci)=\max$; $i=1 \div m$;
- Кратчайший путь по ребрам (1-путь) между $D1$ и $D2$ равен 9, по квадратным граням (2-путь) – 8, по кубическим граням (3-путь)-7. Отсюда $m=7$;
- Общий вид Ai и $Ai+1$ \square 002121210
002121120 \square $\Pi=002121110$ \square $\dim \Pi=2$;

К решению задачи

- Кубантный тензор-размер $9 \times 7 \times 3$, где 9-размерность куба, 7-длина кратчайшего пути, 3-число путей.
- Простейший вид матрицы 9×7 (кубанты располагаются столбцом в лексикографическом порядке слов), выполняются УВК:

- $K1$
- 000000222
- 000002221
- 000022211
- 000222111
- 002221111
- 022211111
- 222111111

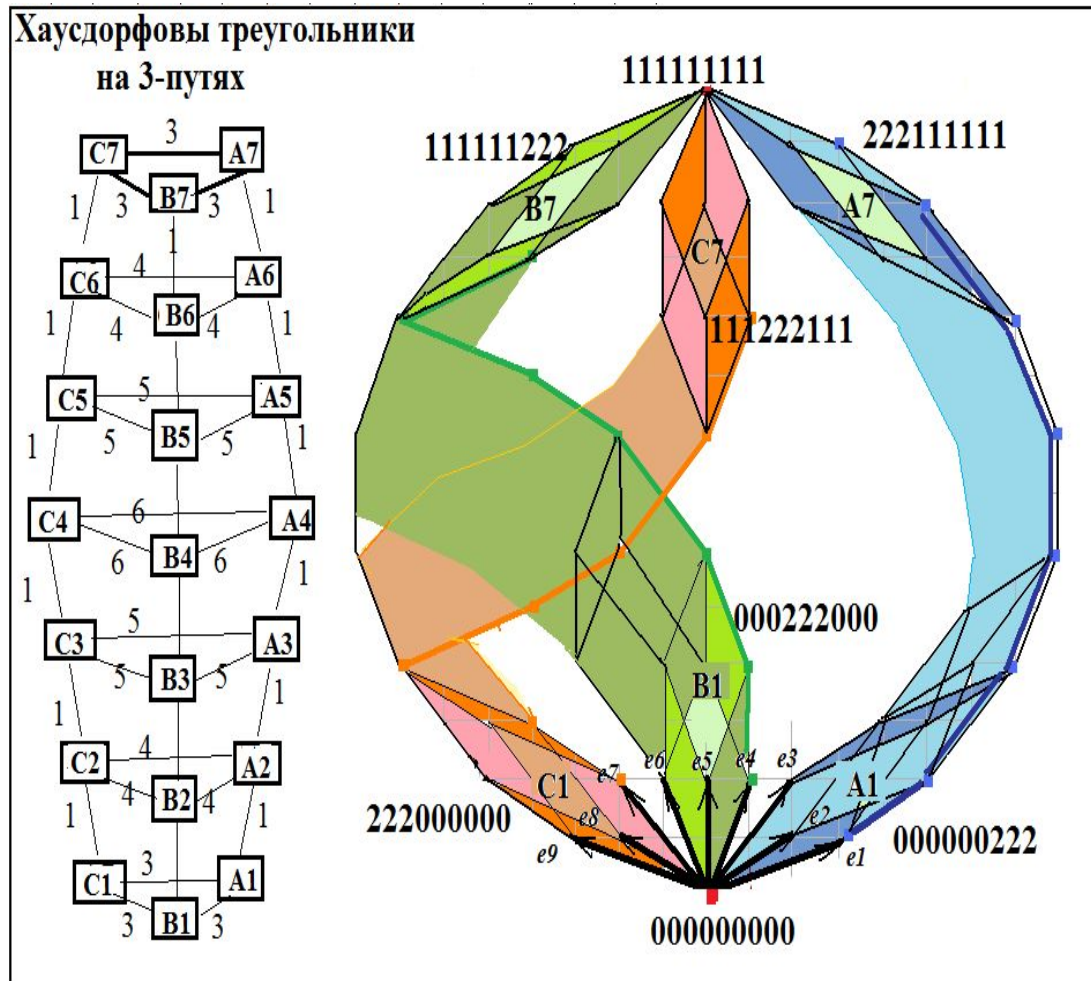


К решению задачи

- Куб как объект с осевой (00...0,11...1) симметрией □ организация по той же схеме матриц K2 и K3 приводит к :
- K1 K2 K3
- 000000222 000222000 222000000
- 000002221 002221000 221000002
- 000022211 022211000 211000022
- 000222111 222111000 111000222
- 002221111 221111002 111002221
- 022211111 211111022 111022211
- 222111111 111111222 111222111
- Выполняются все условия поставленной задачи при любой одновременной перестановке столбцов в K1, K2, K3 (коммутативность умножения), кроме максимальной удаленности друг от друга.

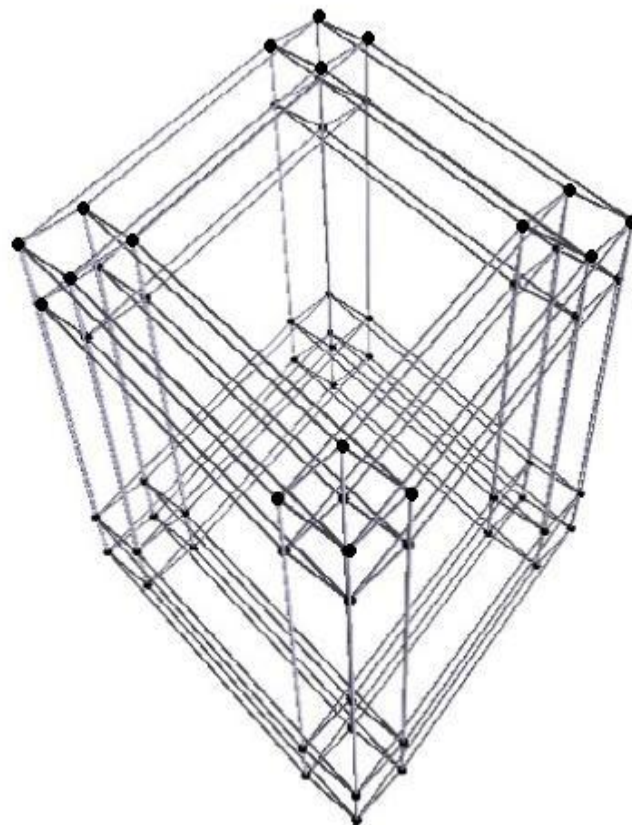
Хаусдорфова метрика в рассматриваемой задаче.

- Операция Н-сжатия не коммутативна и перестановки столбцов в k -тензоре могут менять ρ_{HH} между кубантами в путях.
- На рис.слева показаны значения ρ_{HH} для вышеприведенного решения. Они максимальны для $9!$ перестановок столбцов.



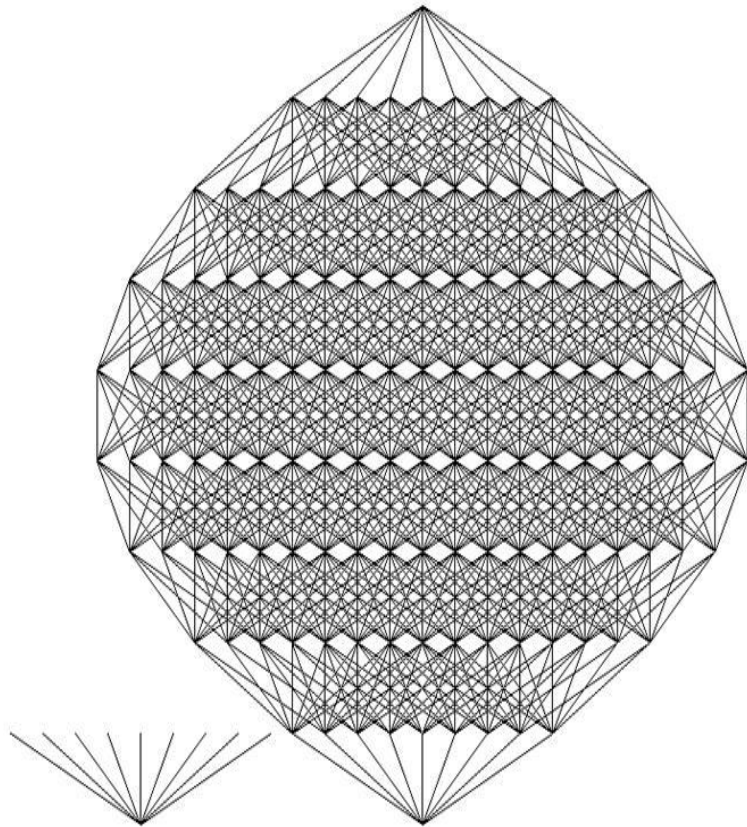
Приложение 2. О некоторых графических отображениях кубических структур

- Основные цели графического отображения в рамках рассматриваемых методов:
- Визуальная ориентация пользователя в многомерных структурах.
- Для различных задач – различные методы.
- Выход в открытые графические системы (VRML) с полным набором их средств визуализации.
- Рис. традиционный метод отображения для I^6 (с кластеризацией вершин по 8).



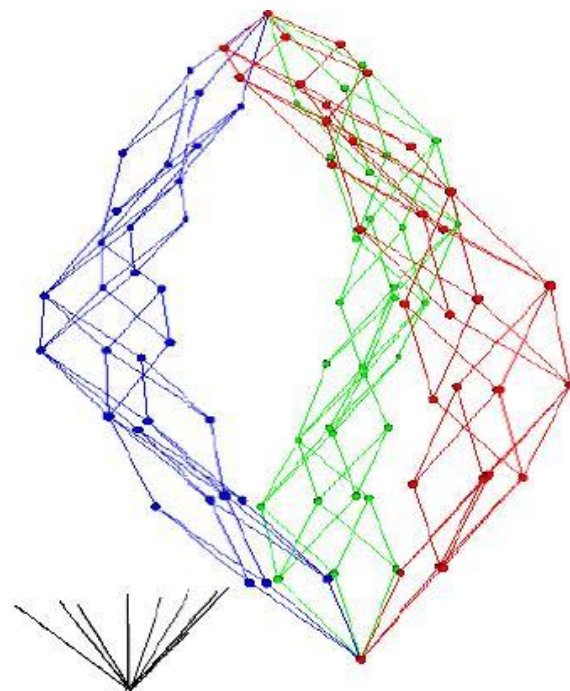
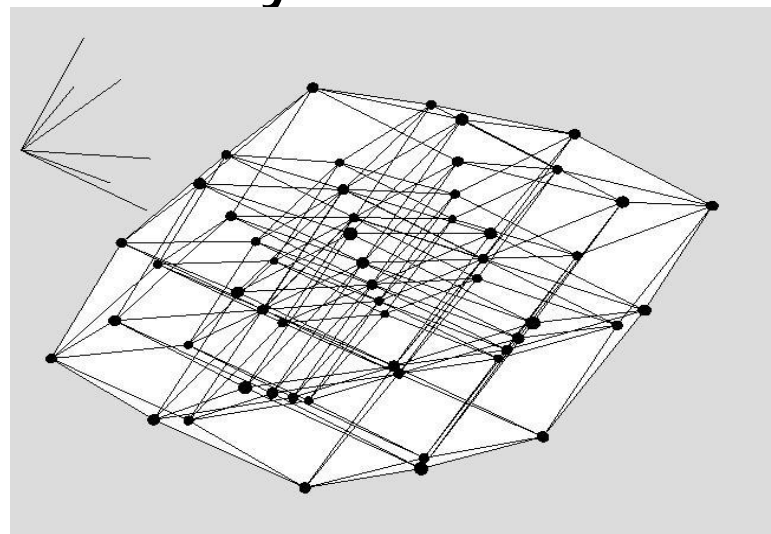
Реперно-ориентированные отображения

- Более привычное для глаза восприятие граней в n -мерном кубе (меньший разброс в метрике ребер).
- Вариация репера \square вариация отображения.
- Рис. плоский репер и отображение вершин и ребер 9-мерного куба.



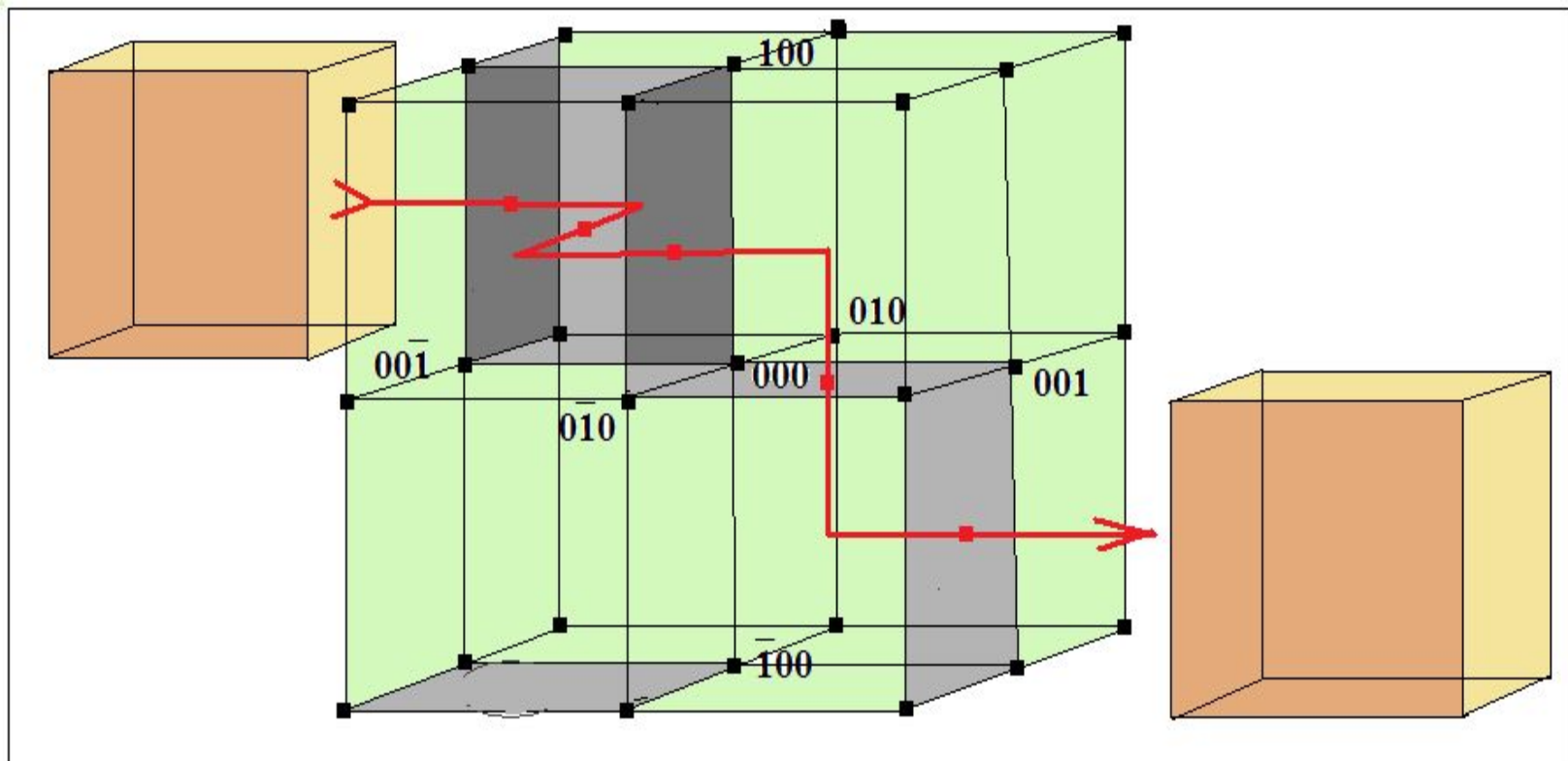
Кубанты и комплексы кубантов

- 3d-репер, цветовая идентификация, выход в VRML-оперативный инструментарий для отображения кубантов и комплексов из них.
- Рис. Отображения I^6 и решения задачи о 3-путях (приложение 1).



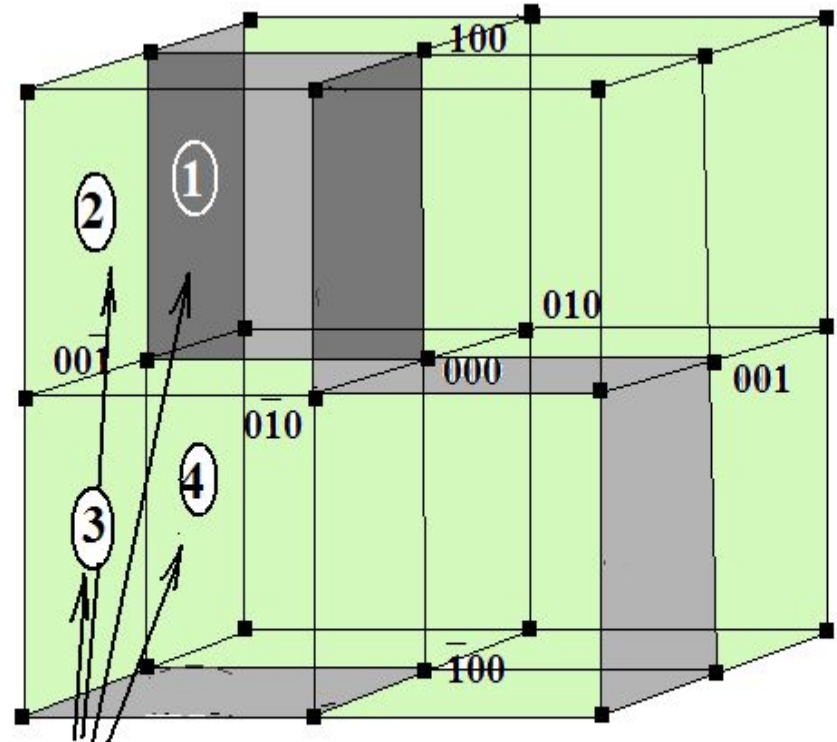
Приложение 3. 3-пути сквозь случайную O^3 .

- Постановка задачи. Задан октант, в нем 2-границы двух типов (кодировка: 0-закрыты, 1-открыты – рис.серый цвет).
- Вычислить кратчайший(ие) 3-пути между входами $(-1, \dots)$ и выходами $(1, \dots)$ -число и их длину, проходя через открытые 2-границы.



К постановке задачи.

- 36-и разрядный двоичный код отражает какие грани открыты (1) и закрыты (0) для 3-путей.
- На множестве всех возможных разбиений всех 2-граней O^3 построить распределение кратчайших 3-путей по числу и длине.
- Для каждого кода вычислить топологический тип.



1000.0100.0010.
0000.0100.0000. \rightarrow $L_{min}=4$;
0000.0001.0010.

$Q=64$ Mb;

Допустимые кратчайшие 3-пути и их длины

- Для дальнейшего изучения марковских процессов в динамике случайного поведения 2-граней необходима матрица переходных вероятностей между допустимыми состояниями. (20x20)

Допустимые пути
и их длины

2 2 2 2

2 2 2

2 2 3

2 2 4

2 2

2 3

2 4

2 5

2 6

3 3

3 4

3 5

4 4

2

3

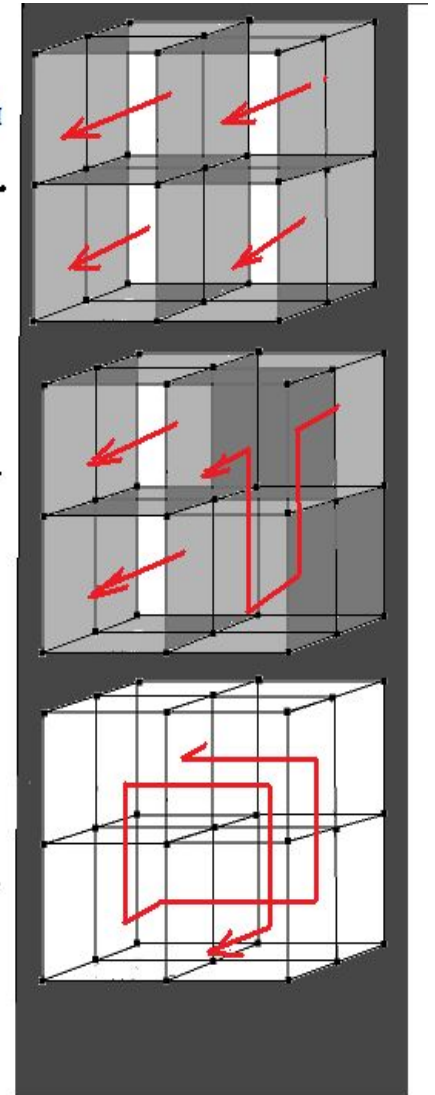
4

5

6

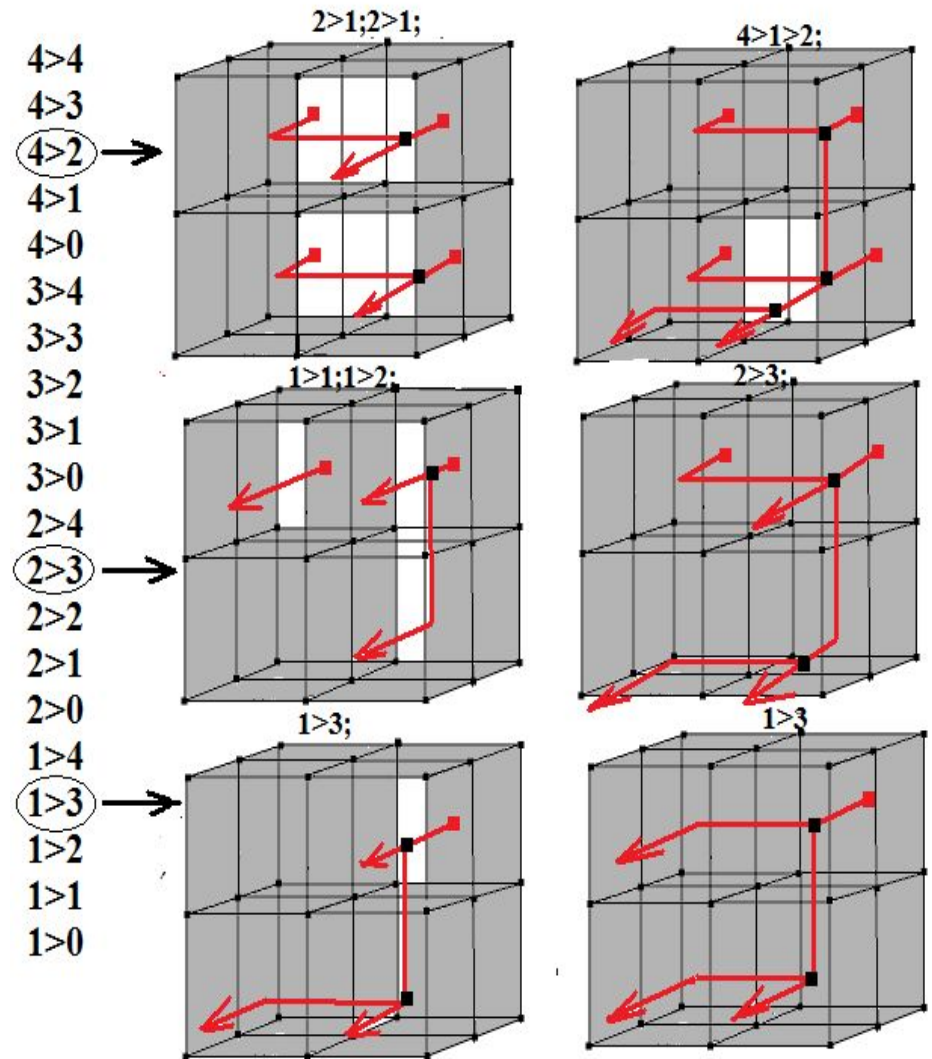
7

8



Допустимые топологические типы

- Соотношение числа входов и выходов.
- Структуры кратчайших связ. деревьев.
- Число изолированных деревьев.
- Характеристика каждого дерева.
- Дальнейшие расчеты на «Чебышеве».



- Конец презентации по результатам проекта за 2009 г, поддержанного грантом РФФИ 09-07-12135-офи_м.

- Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ