Построение и анализ алгоритмов

Лекция 4

Динамическое программирование

Оптимальные деревья поиска

Пример 3. Оптимальные деревья поиска

См. начало в Лекции 3.

См. также раздел 2.8

пособия «Деревья кодирования и поиска»

Оптимальные деревья поиска

Ранее при рассмотрении БДП, как правило, предполагалось, что для поиска различные ключи предъявляются **с равной вероятностью**.

Пусть теперь заранее известно, что некоторые ключи предъявляются чаще других.

Тогда расположение «частых» ключей ближе к корню дерева сократит время их поиска и, возможно, среднее время поиска (по разным предъявлениям ключей).

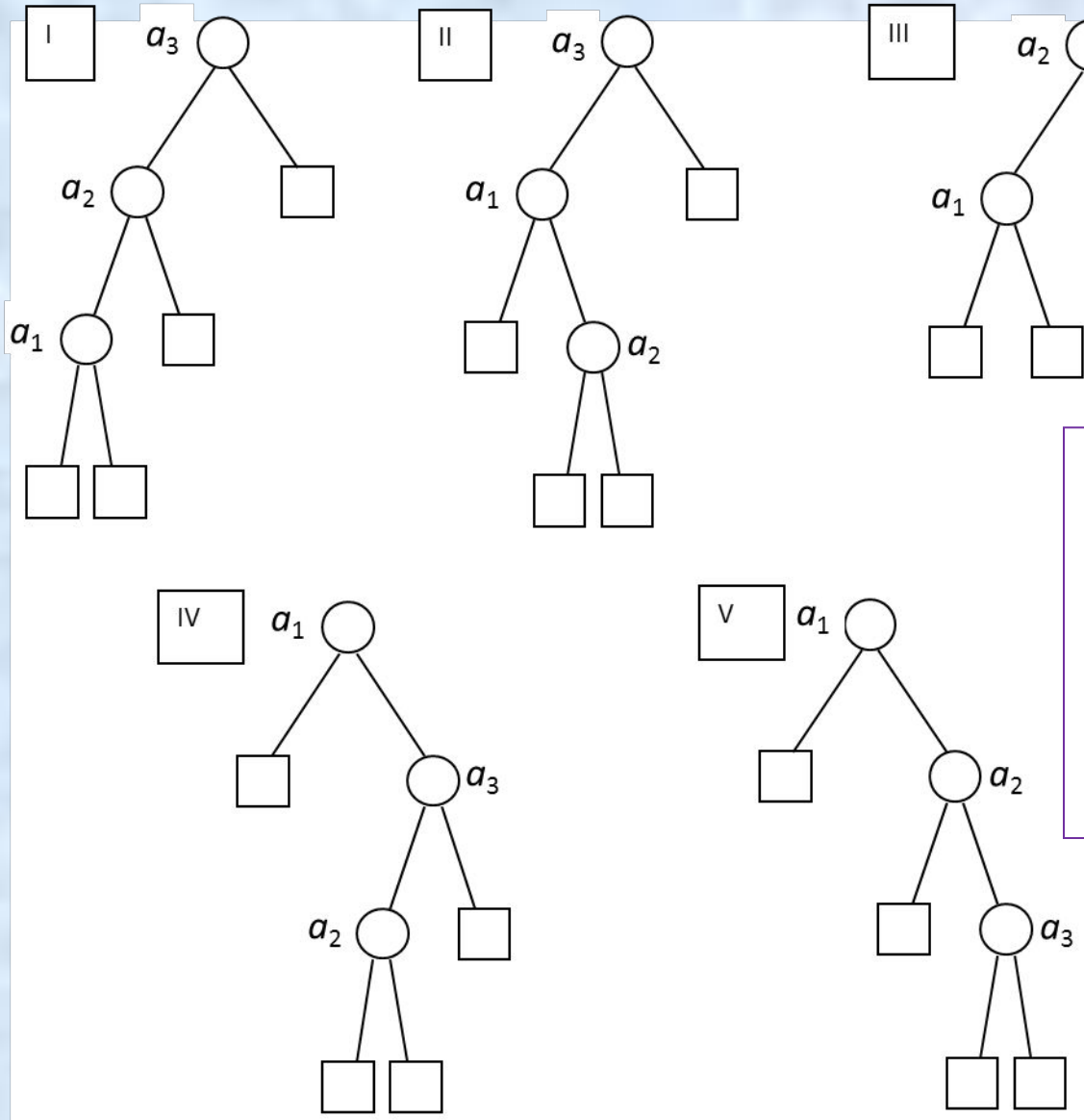


Рис. 2.9. Все различные расширенные БДП из трёх элементов $a_1 < a_2 < a_3$

Пример дерева поиска из трёх элементов $a_1 < a_2 < a_3$.

Заданы вероятности предъявления элемента x для поиска: $P(x = a_1) = \alpha$; $P(x = a_2) = \beta$; $P(x = a_3) = \gamma$.

Дерево	Стоимость	Варианты значений α, β и γ			
		α = 1/3 β = 1/3 γ = 1/3	α = 3/6 β = 2/6 γ = 1/6	α = 4/7 β = 2/7 γ = 1/7	α = 5/8 β = 2/8 γ = 1/8
		Значения стоимости при заданных α, β и γ			
I	3α + 2β + γ	6/3	14/6	17/7	20/8
II	2α + 3β + γ	6/3	13/6	15/7	17/8
III	2α + β + 2γ	***5/3***	***10/6***	12/7	14/8
IV	α + 3β + 2γ	6/3	11/6	12/7	13/8
V	α + 2β + 3γ	6/3	***10/6***	***11/7***	***12/8***

Среднее (по всем предъявлениям x) число сравнений (**стоимость**) в случаях успешного поиска как функция переменных α, β и γ,

Постановка задачи

Поиск будет осуществляться среди набора данных

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

Пусть последовательность упорядочена:

$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$.

$A_1, \ldots, A_n$- события, соответствующие вариантам успешных исходов поиска,

т. е. $A_i : (x = a_i)$ для $i \in 1..n$,

$B_0, \ldots, B_n$ - события, соответствующие вариантам неудачных исходов поиска,

т. е. $B_i : (a_i < x < a_{i+1})$ для $i \in 0..n$.

Здесь для упрощения записи событий B_0 и B_n добавлены фиктивные элементы $a_0 = -\infty$ и $a_{n+1} = +\infty$, которые не должны использоваться в алгоритме.

Постановка задачи (продолжение)

Все эти $2n + 1$ событий (исходов поиска)

$$(A_i)_1^n \quad (B_i)_0^n$$

могут быть упорядочены:

$$B_0 < A_1 < B_1 < A_2 < \ldots < B_{n-1} < A_n < B_n.$$

Заданы вероятности (или частоты) этих событий:

$p_i = P(A_i)$ для $i \in 1..n$, и $q_i = P(B_i)$ для $i \in 0..n$.

При этом $\Sigma_{i \in 1..n} p_i + \Sigma_{i \in 0..n} q_i = 1$.

События A_i соответствуют внутренним узлам расширенного дерева поиска, а события B_i – внешним узлам (листьям) расширенного дерева поиска.

Постановка задачи (продолжение)

Тогда среднее число (математическое ожидание) сравнений при поиске можно записать в виде

$$C_{0,n} = \sum_{i=1}^{n} p_i \,(l(A_i)+1) + \sum_{i=0}^{n} q_i \, l(B_i),$$

где $l\ (x)$ – уровень узла x (или длина пути от корня до узла x) в БДП.

Здесь уровень узла определён так, что l (корень) = 0.

Итак, задача состоит в том, чтобы по заданным *весам*

$$\{p_i\}_1^n \text{ и } \{q_i\}_0^n$$

построить БДП, минимизирующее значение $C_{0,n}$.

Постановка задачи (продолжение)

Такое дерево называют *оптимальным* БДП.

Есть ли сходство этой задачи с задачей построения оптимального префиксного кода ?

В чём сходство, в чём различие?

Ответ.

Очевидное решение поставленной задачи состоит в переборе всех структурно различных бинарных деревьев с n узлами и выборе дерева с наименьшей *стоимостью* $C_{0,n}$.

Однако поскольку (см. лекции про БДП) число b_n структурно различных бинарных деревьев с n узлами есть

$$b_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

, то этот способ вряд ли будет иметь практическую ценность.

Оказывается, приемлемое по количеству вычислений решение данной задачи может быть получено **методом динамического программирования.**

Конец повторения прошлой лекции

Построение оптимальных деревьев поиска

Дано:

1)набор элементов $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$.

2) набор весов $\{p_i\}_1^n$ и $\{q_i\}_0^n$

1)$\Sigma_{i\in 1..n}\, p_i + \Sigma_{i\in 0..n}\, q_i = 1$.

Требуется: по заданным *весам* построить БДП, минимизирующее значение $c_{0,n}$.

$$C_{0,n} = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(l(A_i)+1) + \sum_{i=0}^{n} q_i\, l(B_i),$$

Идея

Пусть имеется оптимальное дерево.

Согласно принципу оптимальности, лежащему в основе метода динамического программирования, левое и правое поддеревья этого дерева в свою очередь также должны быть оптимальны.

Идея

T_{ij} -поддерево БДП из элементов $a_{i+1}, \ldots, a_j$ (при $0 \le i \le j \le n$).

$$T_{ij} = \text{БДП}\{a_{i+1}, \ldots, a_j\}$$

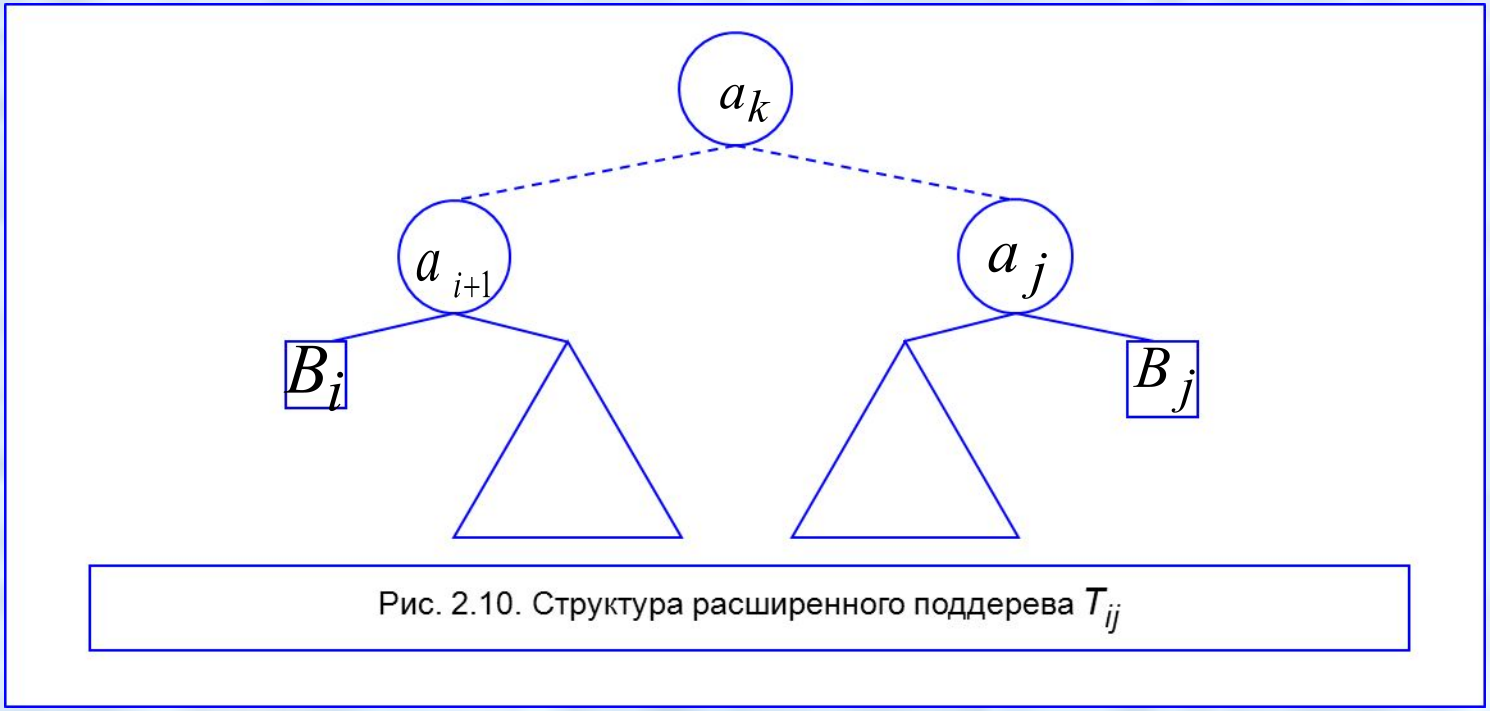


Рис. 2.10. Структура расширенного поддерева T_{ij}

корнем поддерева может быть любой из элементов , т. е. $k \in i+1..j$.

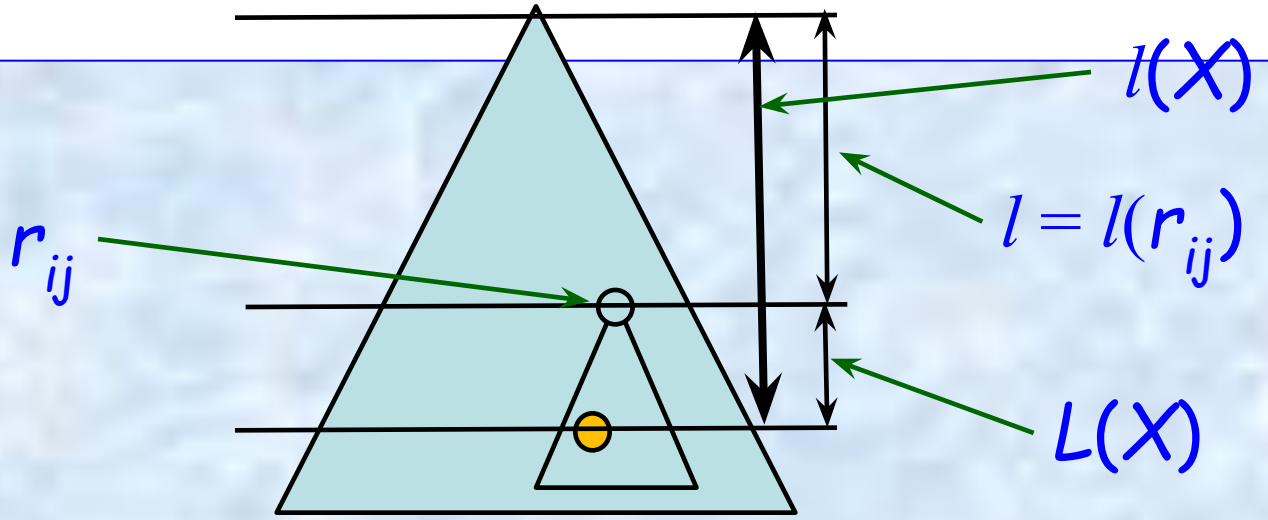
Обозначения

Пусть

$l = l(r_{ij})$- уровень корня r_{ij} поддерева T_{ij} в дереве $T_{0,n}$

$L(X)$ - уровень узла, соответствующего событию X, в поддереве T_{ij} . ($L(r_{ij})=0$)

Тогда $l(X) = L(X) + l$, где $X \in \{B_i, A_{i+1}, \ldots, B_j\}$.



Вклад поддерева T_{ij} в стоимость $C_{0,n}$

$$\sum_{k=i+1}^{j} p_k\,(l(A_k)+1)+\sum_{k=i}^{j} q_k\,l(B_i)=\sum_{k=i+1}^{j} p_k\,(L(A_k)+l+1)+\sum_{k=i}^{j} q_k\,(L(B_i)+l)=$$

$$=\sum_{k=i+1}^{j} p_k\,(L(A_k)+1)+\sum_{k=i}^{j} q_k\,L(B_i)+\Big(\sum_{k=i+1}^{j} p_k+\sum_{k=i}^{j} q_k\Big)\,l=C_{ij}+w_{ij}l,$$

где

$$C_{ij}=\sum_{k=i+1}^{j} p_k\,(L(A_k)+1)+\sum_{k=i}^{j} q_k\,L(B_i),\qquad w_{ij}=\sum_{k=i+1}^{j} p_k+\sum_{k=i}^{j} q_k\ .$$

C_{ij} - *стоимость* поддерева T_{ij}.

w_{ij} - *вес* поддерева T_{ij}.

$$w_{ij}=w_{i,j-1}+(p_j+q_j)$$

Идея: структура дерева + принцип оптимальности

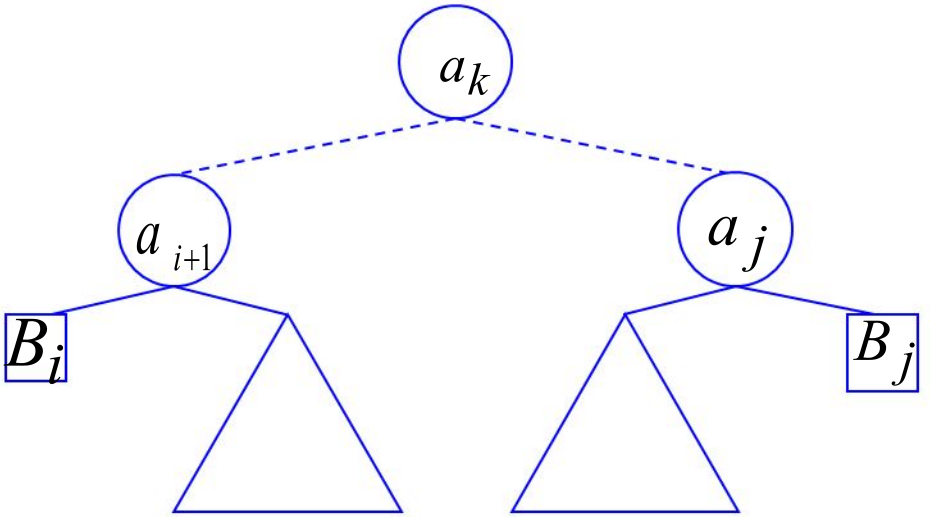


Рис. 2.10. Структура расширенного поддерева T_{ij}

$$C_{ij} = \min_{i<k\le j} \{C_{i,k-1} + C_{k,j} + (w_{i,k-1} + w_{k,j} + p_k)\}$$

Преобразование

$$C_{ij} = \min_{i<k\le j}\{C_{i,k-1} + C_{k,j} + (w_{i,k-1} + w_{k,j} + p_k)\}$$

$$w_{i,k-1} + w_{k,j} + p_k = w_{ij}$$

+

w_{ij} не зависит от структуры поддерева T_{ij}

$$C_{ij} = \min_{i<k\le j}\{C_{i,k-1} + C_{k,j}\} + w_{ij}$$

1) $C_{ii} = 0$
2) разности индексов $k - 1 - i$ и $j - k$ в слагаемых $C_{i,k-1}$ и $C_{k,j}$ меньше, чем разность индексов $j - i$ в C_{ij}.
3) $L = j - i$, $L=0..n$

Таблица
(аналогия с задачей о перемножении цепочки матриц)

$l = 0$	$T(0, 0)$	$T(1, 1)$	$T(2, 2)$	$T(3, 3)$	…	$T(n-1, n-1)$	$T(n, n)$
$l = 1$	$T(0, 1)$	$T(1, 2)$	$T(2, 3)$	…	$T(n-2, n-1)$	$T(n-1, n)$	
$l = 2$	$T(0, 2)$	$T(1, 3)$	…	$T(n-3, n-1)$	$T(n-2, n)$		
…	…	…	…	…			
$l = n-2$	$T(0, n-2)$	$T(1, n-1)$	$T(2, n)$				
$l = n-1$	$T(0, n-1)$	$T(1, n)$					
$l = n$	$T(0, n)$						

T_{ij}:

w_{ij} =
C_{ij} =
Num_{ij} =

$$\arg\min_{i<k\le j}\{C_{i,k-1} + C_{k,j}\} = Num$$

```
for (i =0; i<n; i++) {c[i] [i] = 0; w[i] [i] = q[i];} //заполнена первая строка
    for (L=1; L<n; L++) {
        for (i=0; i<n-L; i++) {
            j = i + L;  // заполнение T(i, j):
            w[i][ j] = w[i][j –1] + (p[j]+q[j]);
            c[i][j] = +∞;
            for (k =i +1 ; k< j-1; k++) {
s = c[i][k –1] + c [k][j];
                if (s < c[i][j] ){
                    c[i][j] = s;
                    num[i][j] = k
                };
            }
            c[i][j] = c[i][j] + w[i][j];
        }
    }
```

Вычисление таблицы

$n^2/2$ элементов памяти и $n^3/3$ выполнений тела внутреннего цикла

См. пример в файле «2_08_ОДП.doc»
С.67,68-…

Построение БДП по таблице значений num

```
BinT MakeOptBST (int i, j )
{   int k; ElemBinT root;
    BinT  L, R;
    k = num[i ][j ]; root = a[k];
    if (i < k –1) L = MakeOptBST (i, k –1);
    else L = NULL;
    if (k < j ) R = MakeOptBST (k, j);
    else R = NULL;
    return ConsBT (root, L, R);
} //MakeOptBST
```

со стартовым вызовом T = MakeOptBST (0, n).

Модификация Д.Кнута

$$r_{i,j-1} \le r_{ij} \le r_{i+1,j}$$

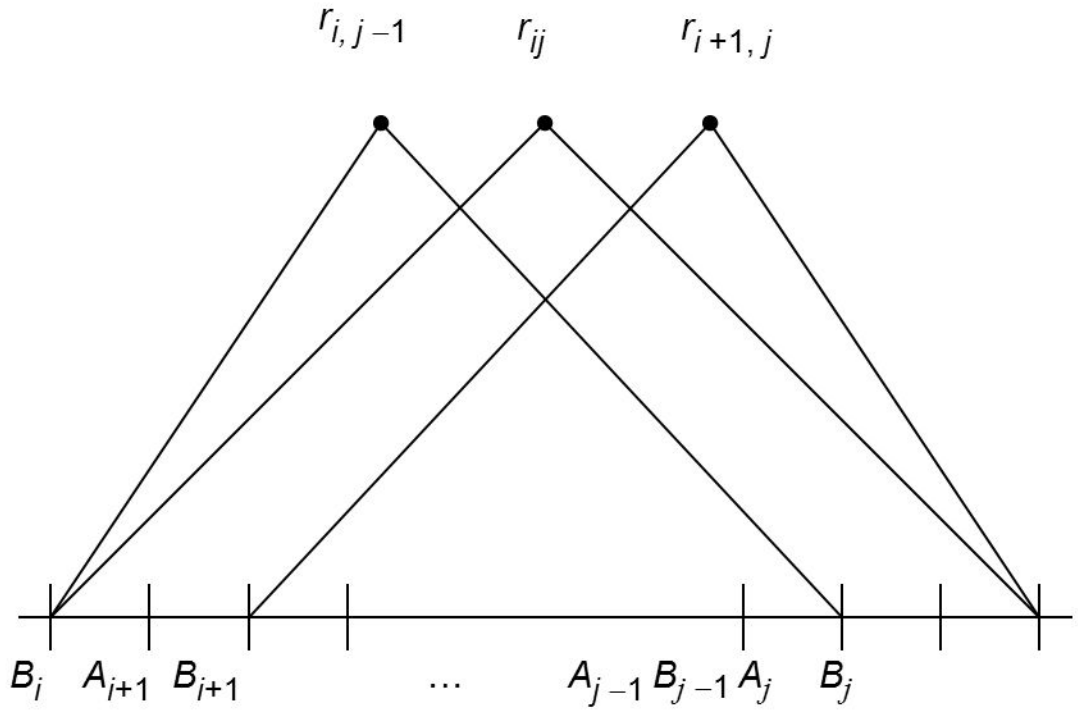


Рис. 2.14. Соотношение между корнями поддеревьев оптимального БДП

Вместо $k = (i+1) \,..\, j \quad \Rightarrow k = num[i][j-1] \,..\, num[i+1][j]$

См. с.72

Так в ранее рассмотренном примере на последнем шаге при вычислении $C_{0,4}$ вместо рассмотрения четырёх кандидатов на роль корня дерева (см. с.70)

a_k (k = 1, 2, 3, 4)

можно ограничиться лишь двумя (a_1 и a_2), поскольку

$num[0, 3] \le k \le num[1, 4]$,

а $num[0, 3] = 1$ и $num[1, 4] = 2$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ