Лекция 1

Исчерпывающий поиск в комбинаторных алгоритмах

1. Темы лекций, лаб. и курсовой работ
2. Поиск с возвращением. Общая схема (алгоритм).
3. Задача о ферзях.
4. Оценка сложности. Метод Монте-Карло.
5. Другие способы программирования.

Темы лекций

1. Поиск с возвращением. Задача о ферзях. Оценка методом Монте-Карло.
2. Метод ветвей и границ. Общая схема. Задача коммивояжёра (ЗК).
3. Метод ветвей и границ. ЗК (продолжение). Приближённые решения.
4. Динамическое программирование. Идея и общая схема. Оптимальное умножение матриц.
5. Динамическое программирование. Оптимальные БДП. Хорошие БДП. Аналогии.

Продолжение

6. Графы и структуры данных. Задачи связности.
7. Остовные деревья графа. Алгоритм Краскала. Алгоритм ЯПД.
8. Непересекающиеся подмножества.
9. Обходы графа. Алгоритм Борувки для МОД.
10. МОД как приближение в ЗК. *Двусвязные* компоненты (применение обхода в глубину).
11. ПВГ в орграфах. Топологическая сортировка. Сильно связные компоненты.
12. Кратчайшие пути в графе (1).
13. Кратчайшие пути в графе (2).

Лабораторные работы и курсовая работа

Задание 1.

Алгоритмы сортировки, частичного упорядочения, хеширования.

Задание 2.

Перебор с возвращением (Backtracking).

Задание 3.

Метод ветвей и границ

Задание 4.

Динамическое программирование.

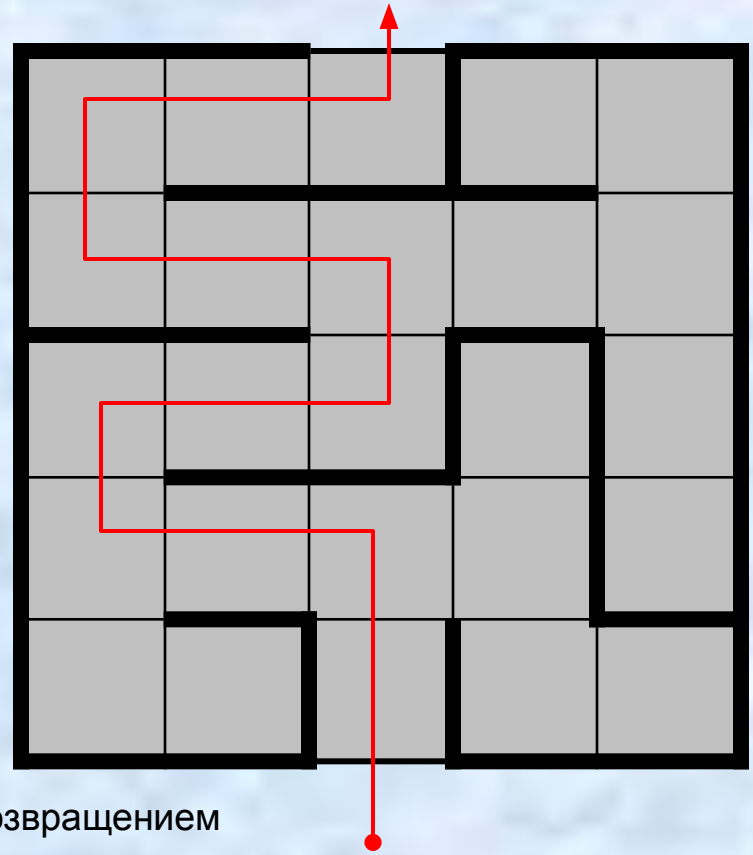
Курсовая работа (КР): **Алгоритмы на графах.**

Исчерпывающий поиск в комбинаторных алгоритмах

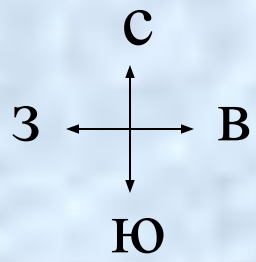
Поиск с возвращением = = Перебор с возвратом = = Backtracking

Пример.

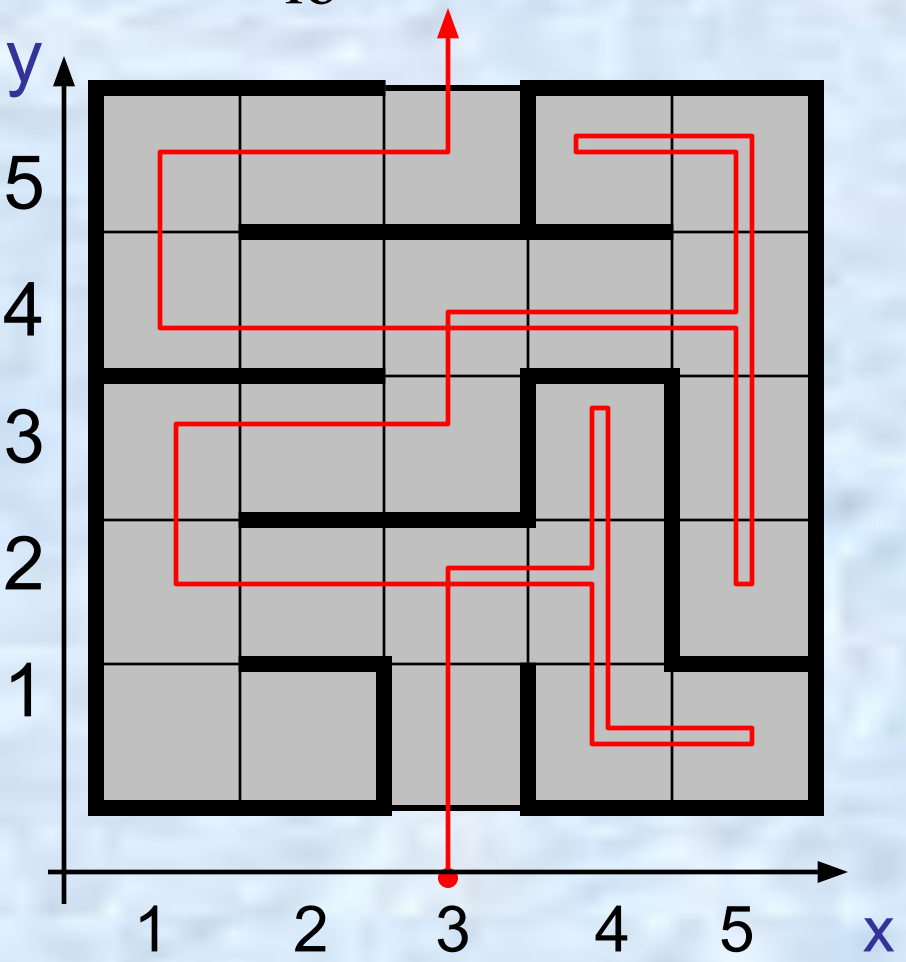
Поиск пути в лабиринте



Стратегия поиска



С→В→Ю→З



Направление = (с, в, ю, з)

Ход = (x, y, Направление)

(3,1,с)
(3,2,с)
(4,2,в)
(4,3,с)
(4,2,ю)
(4,1,ю)
(5,1,в)
(4,1,з)
(3,2,з)
(2,2,з)
(1,2,з)
...

(x,y) – целевая клетка,
Направление – в ц.к.

Общий алгоритм

Решение вида $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

n – конечно, но, вообще говоря, заранее не известно

$\forall a_i \in A_i$;

A_i – конечное линейно упорядоченное множество

Исчерпываем все элементы множества $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_i$

$i = 0 \rightarrow ()$

$i = 1$; $S_1 \subset A_1$; $a_1 \in S_1$; $() \rightarrow (a_1)$

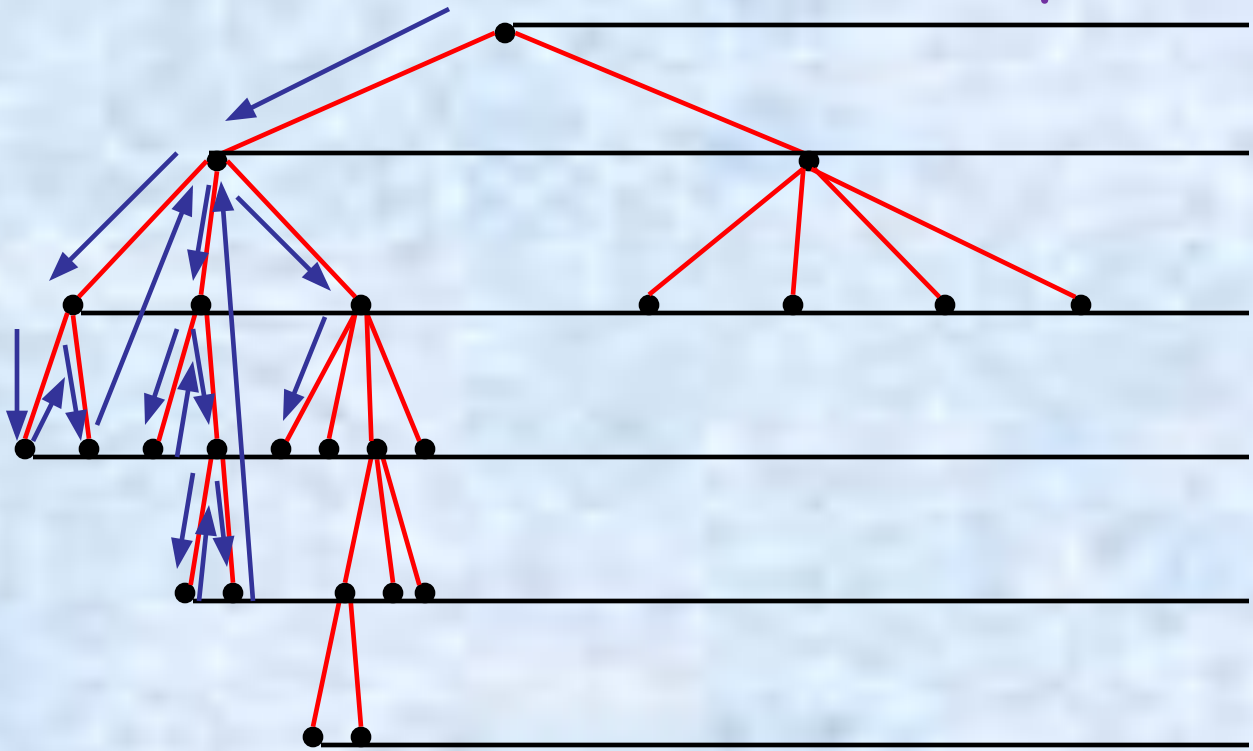
$i = 2$; $S_2 \subset A_2$; $a_2 \in S_2$; $(a_1) \rightarrow (a_1, a_2)$

…

$i = k$; $S_k \subset A_k$; $a_k \in S_k$; $(a_1,\ldots, a_{k-1}) \rightarrow (a_1,\ldots, a_{k-1}, a_k)$

При $S_k = \varnothing$ ***backtrack*** и новый выбор $a_{k-1} \in S_{k-1}$;

Обход дерева



Выбор a_1

Выбор a_2

Выбор a_3

Выбор a_4

Выбор a_5

Выбор a_6

Прямой порядок обхода дерева. Тупики.

Общий алгоритм

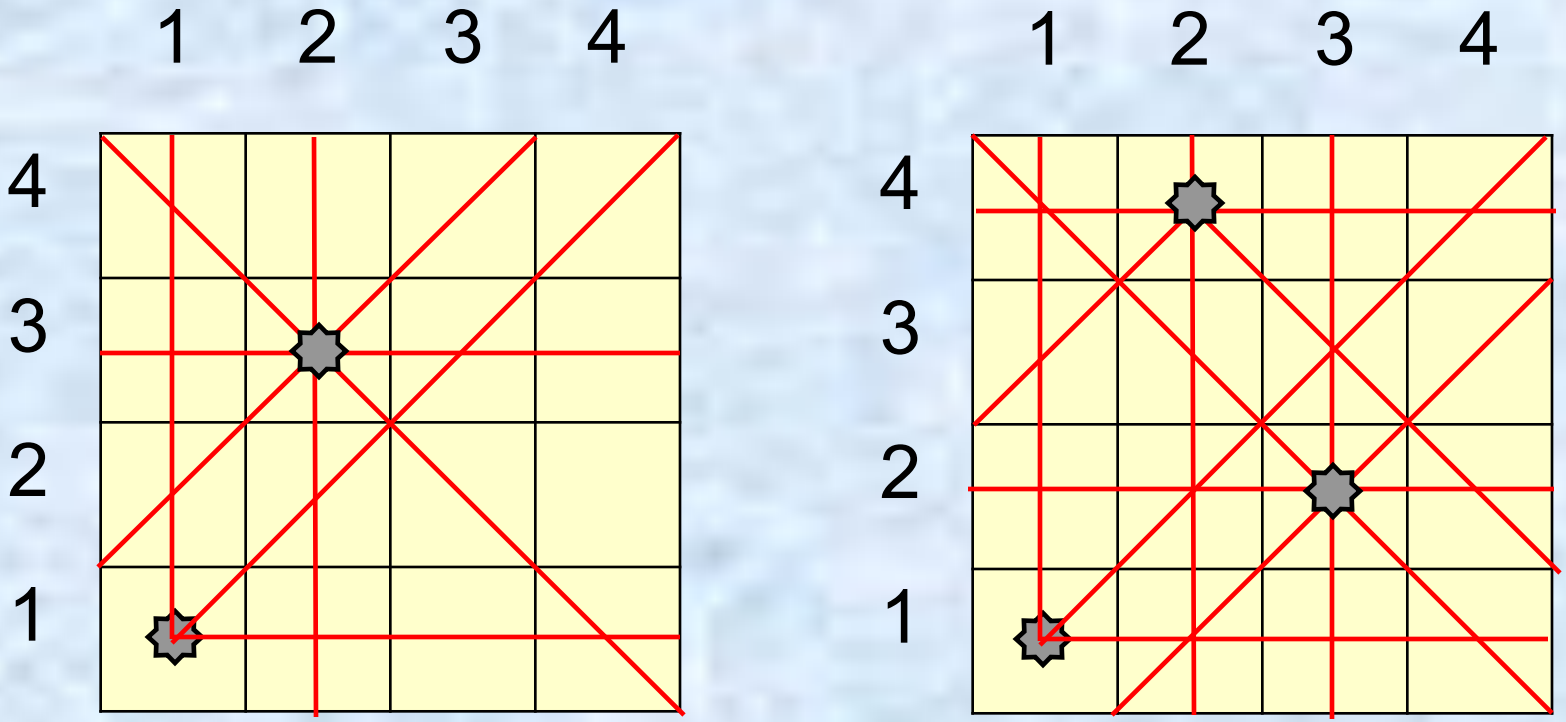
$S_1 = A_1$; k = 1; count = 0;
while (k>0) { //пока не все решения найдены
  while (S_k != ∅) **{**
    // продвижение вперёд

    }
  } // end while продвижения вперёд
  k --; // backtrack
} //все решения найдены; count – число обследованных узлов

Пример задачи,
решаемой алгоритмом по этой схеме

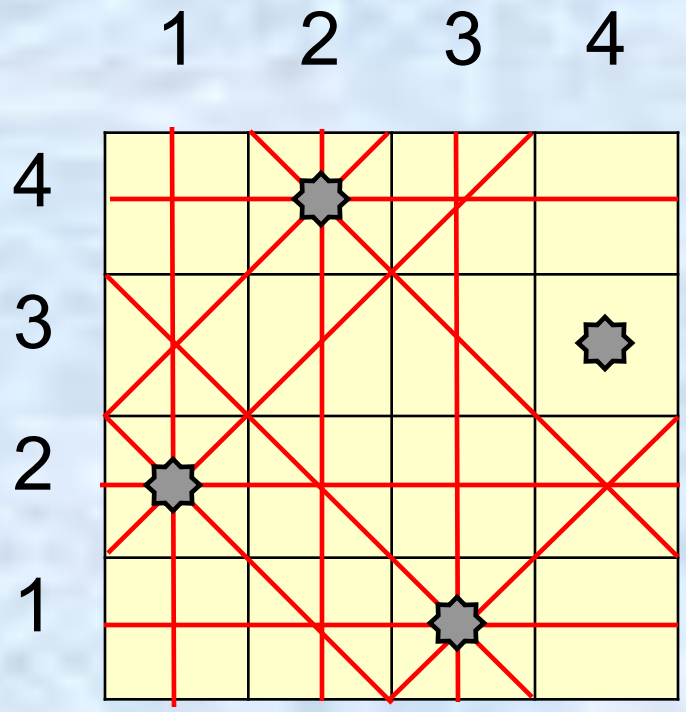
Задача о ферзях

На шахматной доске размера n×n расставить максимальное число не атакующих друг друга ферзей.



n = 4

Продолжение



Решение = (a_1, a_2, a_3, a_4)

a_i – номер горизонтали на i-ой вертикали

Решение = (2, 4, 1, 3)

Решение $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Ферзи i и k *атакуют* друг друга:

- $i = k$ – ферзи на одной вертикали
- $a_i = a_k$ – ферзи на одной горизонтали
- $|a_i - a_k| = |i - k|$ – ферзи на одной диагонали

Наращивание (продолжение) решения

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}) \cdot a_k = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$$

$A_k = (1, 2, \ldots, n)$ – номера клеток вертикалей.

Множество S_k явно не формируется,

но, выбирая очередного кандидата $a_k \in A_k$,

проверяем $a_k \in S_k$

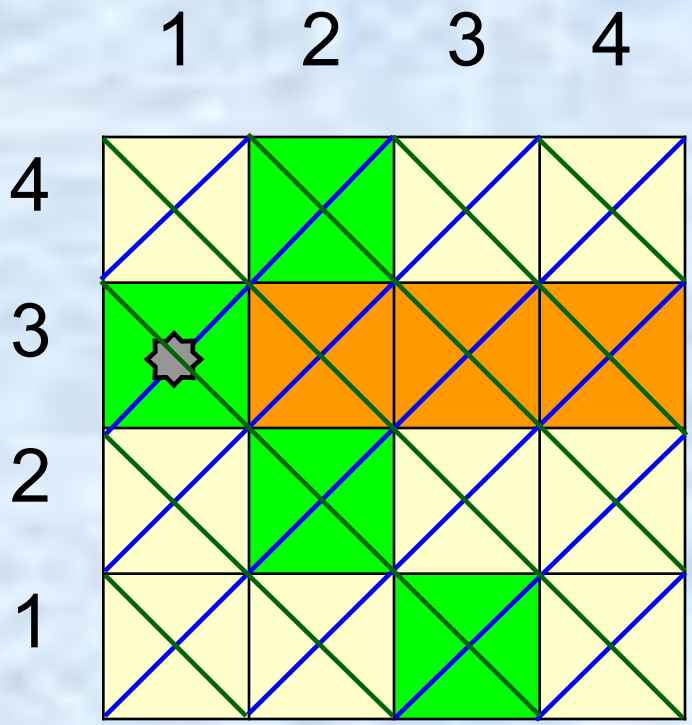
Используется s_k - нижняя граница в A_k,

т.о. кандидаты в S_k выбираются из множества

$(s_k, s_k+1, \ldots, n)$, т.е. $S_k \subset (s_k, s_k+1, \ldots, n)$.

Обсудить альтернативу.

Альтернативное представление S_k



Горизонталей = n

Диагоналей = $2(2n - 1)$

Проверка s[k]

```
bool noQueen (uns s, uns k)
// ферзь не может быть поставлен в строку s столбца k
{   bool Flag = true;
    uns i = 1;
     while ((i<k) && Flag) {
          // Flag='ферзи [1..i) не атакуют поле <k,s>'
          // атакует ли ферзь из i-го столбца поле <k,s>?}
          Flag = !( (a[i]==s) || (abs(a[i]-s)== k-i) );
          i++;
     } //end - while
   return (!Flag);
} //  end noQueen
```

Нахождение очередного свободного поля s[k]

```
/*найти следующее наименьшее значение s[k],
   начиная с текущего s[k];
   если такового нет, то s[k]=n+1
*/
while ((s[k]<=n) && noQueen (s[k],k)) s[k]++;
```

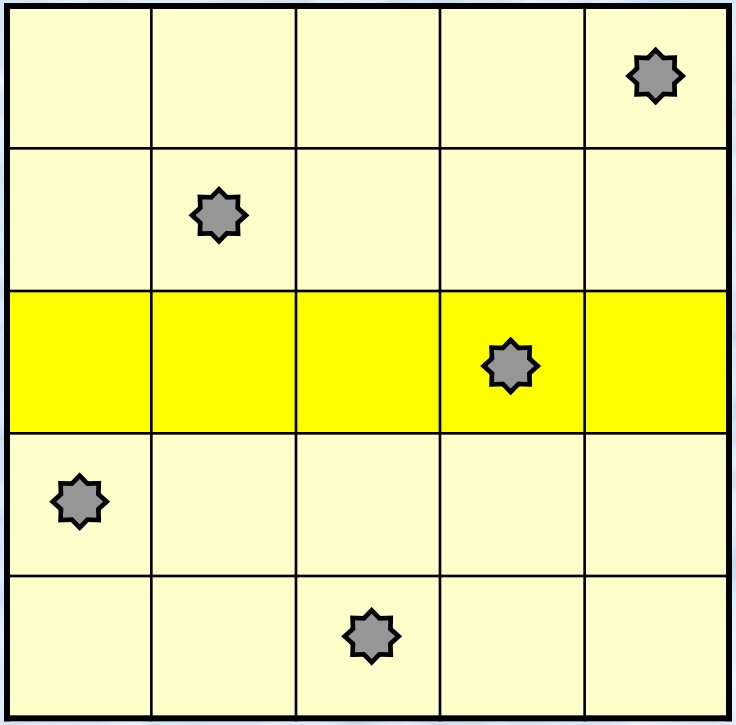
Реализация

```
void queen1(const uns n)
{   pos s;
/*s[k] - наименьший элемент множества Sk
  неопробованных (допустимых) значений
*/
    uns count = 0;  // счётчик обследованных
        // узлов дерева поиска
    uns countS = 0; // счётчик найденых
   решений
    a[1] = 1; s[1] = 1;
    uns k = 1;
```

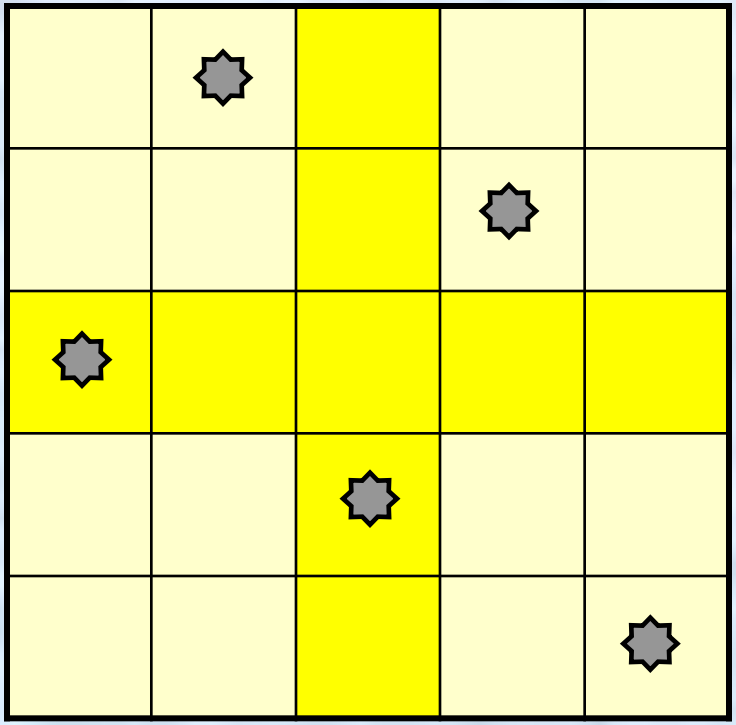
```
while (k>0) {
    while ((k>=1) && (s[k]<=n)) {
        a[k]= s[k];  s[k]++;
        // найти следующее наименьшее значение s[k]
        while ((s[k]<=n) && noQueen (s[k],k)) s[k]++;
            count++;
            if (k==n) {countS++; …} //решение найдено - фиксировать !
            else   {// переход к следующей вертикали
             k++;
             s[k]= 1;
             //найти следующее наименьшее значение s[k],
             while ((s[k]<=n) && noQueen (s[k],k)) s[k]++;
             }
        }
        k--; // backtrack
    }
```

Демонстрация

Усовершенствования: пояснения к инициализации
Вращения и отражения

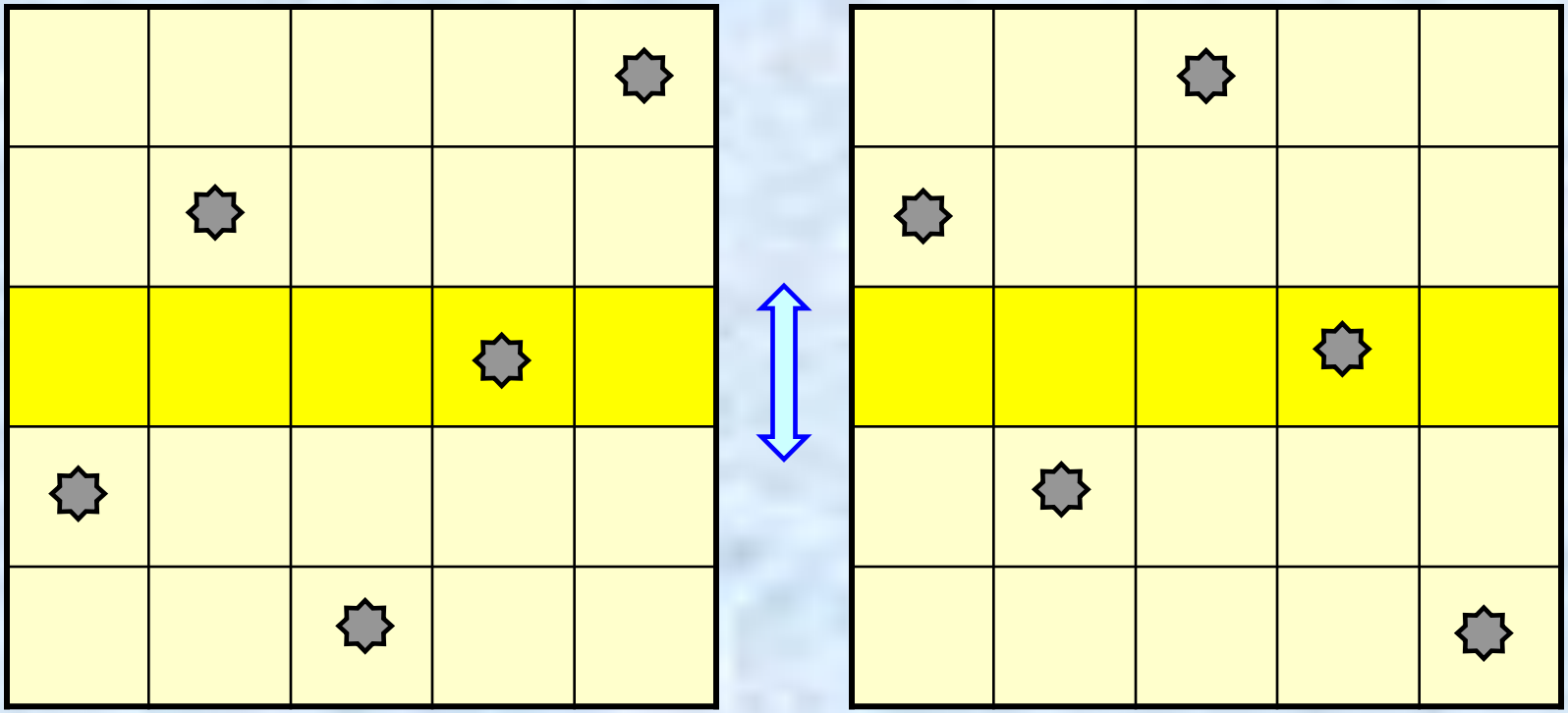


2 4 1 3 5



3 5 2 4 1

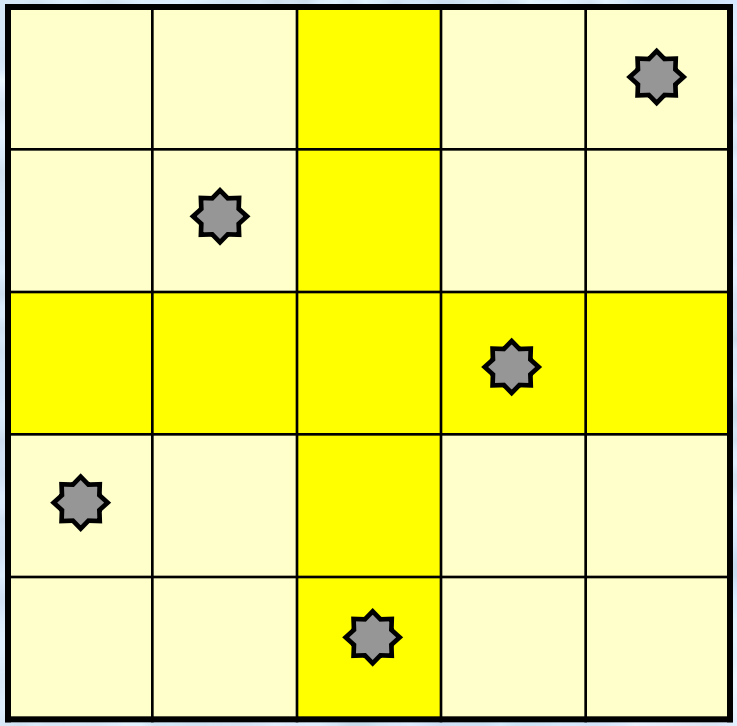
Усовершенствования: пояснения к инициализации
Вращения и отражения



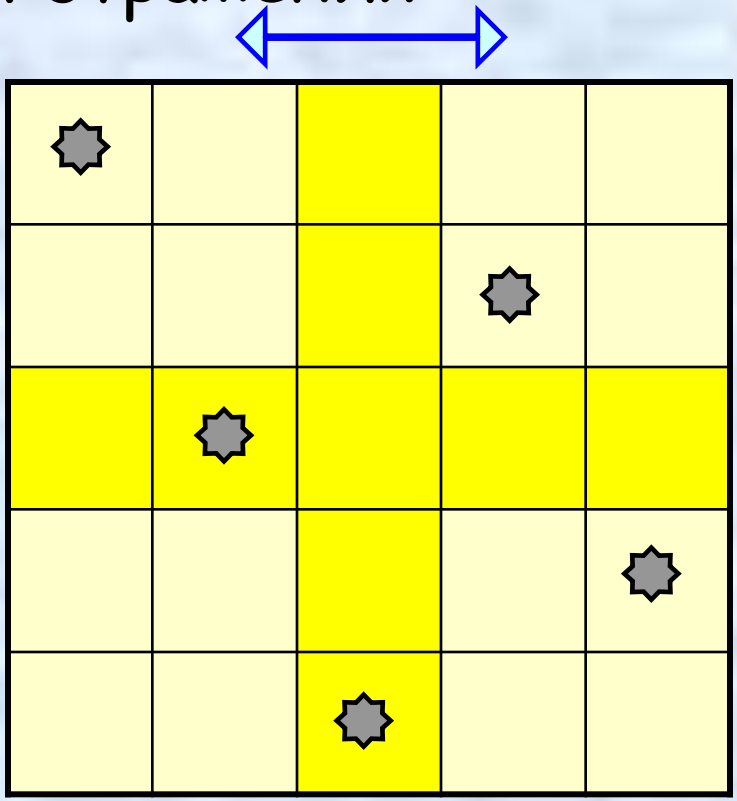
2 4 1 3 5

4 2 5 3 1

Усовершенствования: пояснения к инициализации
Вращения и отражения



2 4 1 3 5



5 3 1 4 2

Отсечение и склеивание ветвей

Усовершенствования

```
void queen1(const uns n)
{pos s; //s[k] - наименьший элемент множества Sk
//неопробованных (допустимых) значений
uns count = 1;  // счётчик обследованных узлов
uns countS = 0; // счётчик найденных решений
uns n_div_2 = n/2;
a[1] = 2; s[1] = 3;
uns k = 2; s[2] = 4;
while (k>0){
   while ( ((k>1) && (s[k]<=n)) || ((k==1) && (s[1]<=(n_div_2))) )
   { a[k]= s[k];
            …
    }
```

Подсчет вариантов

n=8

Все возможные способы $C(n^2|n) \approx 4{,}4*10^9$

В каждом столбце один $n^n \approx 1{,}7*10^7$

+ В каждой строке один $n! \approx 4{,}0*10^4$

На каждой диагонали не более одного 2056

Усовершенствования (вращения и отражения) 801

Результаты

количество ферзей = 4
р е ш е н и я :
1 :: 2 4 1 3
всего вершин = 4
количество ферзей = 5
р е ш е н и я :
1 :: 2 4 1 3 5
2 :: 2 5 3 1 4
всего вершин = 11
количество ферзей = 6
р е ш е н и я :
1 :: 2 4 6 1 3 5
2 :: 3 6 2 5 1 4
всего вершин = 54

количество ферзей = 7
р е ш е н и я :
1 :: 2 4 1 7 5 3 6
2 :: 2 4 6 1 3 5 7
3 :: 2 5 1 4 7 3 6
4 :: 2 5 3 1 7 4 6
5 :: 2 5 7 4 1 3 6
6 :: 2 6 3 7 4 1 5
7 :: 2 7 5 3 1 6 4
8 :: 3 1 6 2 5 7 4
9 :: 3 1 6 4 2 7 5
10 :: 3 5 7 2 4 6 1
11 :: 3 6 2 5 1 4 7
12 :: 3 7 2 4 6 1 5
13 :: 3 7 4 1 5 2 6
всего вершин = 164

количество ферзей = 8

р е ш е н и я :

1 :: 2 4 6 8 3 1 7 5
2 :: 2 5 7 1 3 8 6 4
3 :: 2 5 7 4 1 8 6 3
4 :: 2 6 1 7 4 8 3 5
5 :: 2 6 8 3 1 4 7 5
6 :: 2 7 3 6 8 5 1 4
7 :: 2 7 5 8 1 4 6 3
8 :: 2 8 6 1 3 5 7 4
9 :: 3 1 7 5 8 2 4 6
10 :: 3 5 2 8 1 7 4 6
11 :: 3 5 2 8 6 4 7 1
12 :: 3 5 7 1 4 2 8 6
13 :: 3 5 8 4 1 7 2 6
14 :: 3 6 2 5 8 1 7 4
15 :: 3 6 2 7 1 4 8 5
16 :: 3 6 2 7 5 1 8 4
17 :: 3 6 4 1 8 5 7 2
18 :: 3 6 4 2 8 5 7 1
19 :: 3 6 8 1 4 7 5 2
20 :: 3 6 8 1 5 7 2 4
21 :: 3 6 8 2 4 1 7 5
22 :: 3 7 2 8 5 1 4 6
23 :: 3 7 2 8 6 4 1 5
24 :: 3 8 4 7 1 6 2 5
25 :: 4 1 5 8 2 7 3 6
26 :: 4 1 5 8 6 3 7 2
27 :: 4 2 5 8 6 1 3 7
28 :: 4 2 7 3 6 8 1 5
29 :: 4 2 7 3 6 8 5 1
30 :: 4 2 7 5 1 8 6 3
31 :: 4 2 8 5 7 1 3 6
32 :: 4 2 8 6 1 3 5 7
33 :: 4 6 1 5 2 8 3 7
34 :: 4 6 8 2 7 1 3 5
35 :: 4 6 8 3 1 7 5 2
36 :: 4 7 1 8 5 2 6 3
37 :: 4 7 3 8 2 5 1 6
38 :: 4 7 5 2 6 1 3 8
39 :: 4 7 5 3 1 6 8 2
40 :: 4 8 1 3 6 2 7 5
41 :: 4 8 1 5 7 2 6 3
42 :: 4 8 5 3 1 7 2 6

всего вершин = 801

количество ферзей = 9
р е ш е н и я :

1 :: 2 4 1 7 9 6 3 5 8
2 :: 2 4 7 1 3 9 6 8 5
3 :: 2 4 8 3 9 6 1 5 7
4 :: 2 4 9 7 3 1 6 8 5
5 :: 2 4 9 7 5 3 1 6 8
6 :: 2 5 7 1 3 8 6 4 9
7 :: 2 5 7 4 1 3 9 6 8
8 :: 2 5 7 9 3 6 4 1 8
9 :: 2 5 7 9 4 8 1 3 6
10 :: 2 5 8 1 3 6 9 7 4
11 :: 2 5 8 1 9 6 3 7 4
12 :: 2 5 8 6 9 3 1 4 7
13 :: 2 5 8 6 9 3 1 7 4
14 :: 2 5 9 4 1 8 6 3 7
15 :: 2 6 1 3 7 9 4 8 5
16 :: 2 6 1 7 4 8 3 5 9
17 :: 2 6 1 7 5 3 9 4 8
18 :: 2 6 1 9 5 8 4 7 3
19 :: 2 6 3 1 8 4 9 7 5
20 :: 2 6 9 3 5 8 4 1 7
21 :: 2 7 5 1 9 4 6 8 3
22 :: 2 7 5 8 1 4 6 3 9
23 :: 2 7 9 6 3 1 4 8 5
24 :: 2 8 1 4 7 9 6 3 5
25 :: 2 8 5 3 9 6 4 1 7
26 :: 2 8 6 9 3 1 4 7 5
27 :: 2 9 5 3 8 4 7 1 6
28 :: 2 9 6 3 5 8 1 4 7
29 :: 2 9 6 3 7 4 1 8 5
30 :: 2 9 6 4 7 1 3 5 8
31 :: 3 1 4 7 9 2 5 8 6
32 :: 3 1 6 8 5 2 4 9 7
33 :: 3 1 7 2 8 6 4 9 5
34 :: 3 1 7 5 8 2 4 6 9
35 :: 3 1 8 4 9 7 5 2 6
36 :: 3 1 9 7 5 2 8 6 4
37 :: 3 5 2 8 1 4 7 9 6
38 :: 3 5 2 8 1 7 4 6 9
39 :: 3 5 7 1 4 2 8 6 9
40 :: 3 5 8 2 9 6 1 7 4
41 :: 3 5 8 2 9 7 1 4 6
42 :: 3 5 9 2 4 7 1 8 6
43 :: 3 5 9 4 1 7 2 6 8
44 :: 3 6 2 7 1 4 8 5 9
45 :: 3 6 2 9 5 1 8 4 7
46 :: 3 6 8 1 4 7 5 2 9
47 :: 3 6 8 1 5 9 2 4 7
48 :: 3 6 8 2 4 9 7 5 1
49 :: 3 6 8 5 1 9 7 2 4
50 :: 3 6 8 5 2 9 7 4 1
51 :: 3 6 9 1 8 4 2 7 5
52 :: 3 6 9 2 5 7 4 1 8
53 :: 3 6 9 2 8 1 4 7 5
54 :: 3 6 9 5 8 1 4 2 7
55 :: 3 6 9 7 1 4 2 5 8
56 :: 3 6 9 7 2 4 8 1 5
57 :: 3 6 9 7 4 1 8 2 5
58 :: 3 7 2 4 8 1 5 9 6
59 :: 3 7 2 8 5 9 1 6 4
60 :: 3 7 2 8 6 4 1 5 9
61 :: 3 7 4 2 9 5 1 8 6
62 :: 3 7 4 2 9 6 1 5 8
63 :: 3 7 4 8 5 9 1 6 2
64 :: 3 7 9 1 5 2 8 6 4
65 :: 3 7 9 4 2 5 8 6 1
66 :: 3 8 2 4 9 7 5 1 6
67 :: 3 8 4 7 9 2 5 1 6

.....

...

90 :: 4 2 9 5 1 8 6 3 7
91 :: 4 6 1 5 2 8 3 7 9
92 :: 4 6 1 9 5 8 2 7 3
93 :: 4 6 1 9 7 3 8 2 5
94 :: 4 6 3 9 2 5 8 1 7
95 :: 4 6 3 9 2 8 5 7 1
96 :: 4 6 3 9 7 1 8 2 5
97 :: 4 6 8 2 5 1 9 7 3
98 :: 4 6 8 2 5 7 9 1 3
99 :: 4 6 8 2 7 1 3 5 9
100 :: 4 6 8 3 1 7 5 2 9
101 :: 4 6 9 3 1 8 2 5 7
102 :: 4 7 1 3 9 6 8 5 2
103 :: 4 7 1 6 9 2 8 5 3
104 :: 4 7 1 8 5 2 9 3 6
105 :: 4 7 3 6 9 1 8 5 2
106 :: 4 7 3 8 2 5 9 6 1
107 :: 4 7 3 8 6 1 9 2 5
108 :: 4 7 3 8 6 2 9 5 1
109 :: 4 7 5 2 9 1 3 8 6
110 :: 4 7 5 2 9 1 6 8 3
111 :: 4 7 5 2 9 6 8 3 1
112 :: 4 7 9 2 5 8 1 3 6
113 :: 4 7 9 2 6 1 3 5 8
114 :: 4 7 9 6 3 1 8 5 2
115 :: 4 8 1 5 7 2 6 3 9
116 :: 4 8 5 3 1 6 2 9 7
117 :: 4 8 5 3 1 7 2 6 9
118 :: 4 9 3 6 2 7 5 1 8
119 :: 4 9 5 3 1 6 8 2 7
120 :: 4 9 5 3 1 7 2 8 6
121 :: 4 9 5 8 1 3 6 2 7

всего вершин = 2857

Оценка сложности выполнения Метод Монте-Карло

Число исследуемых узлов дерева

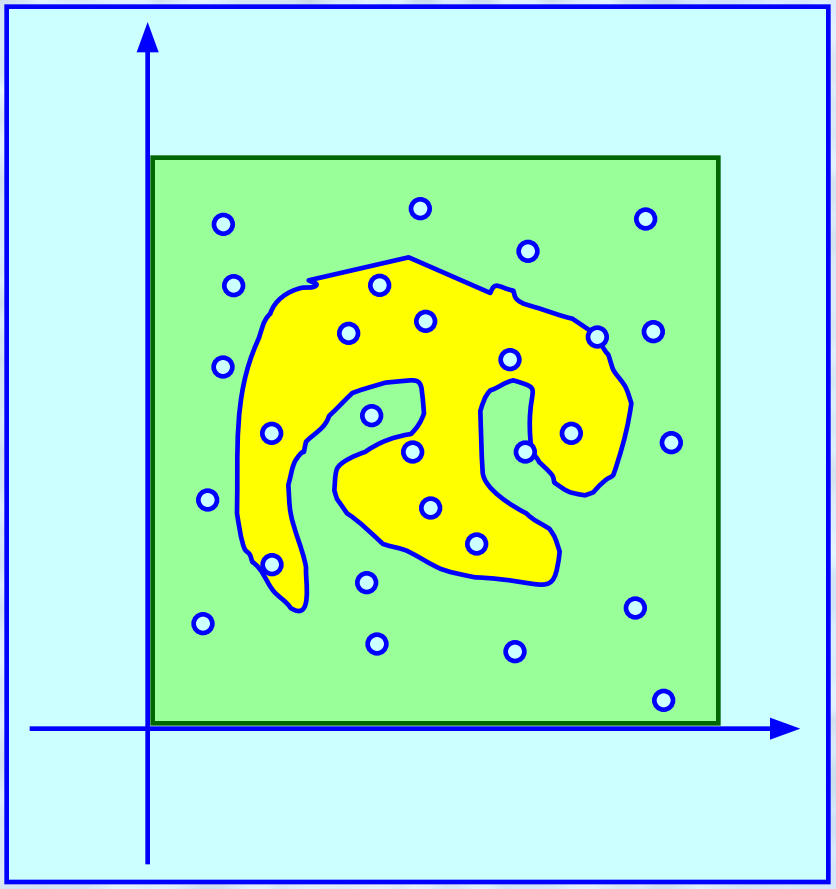
$$\cong \prod_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

$\mu(A_i)$ - мощность множества A_i

В лучшем случае $\mu(A_i)$ ≈ Const

и тогда число узлов дерева ≈ C^n

Метод Монте-Карло

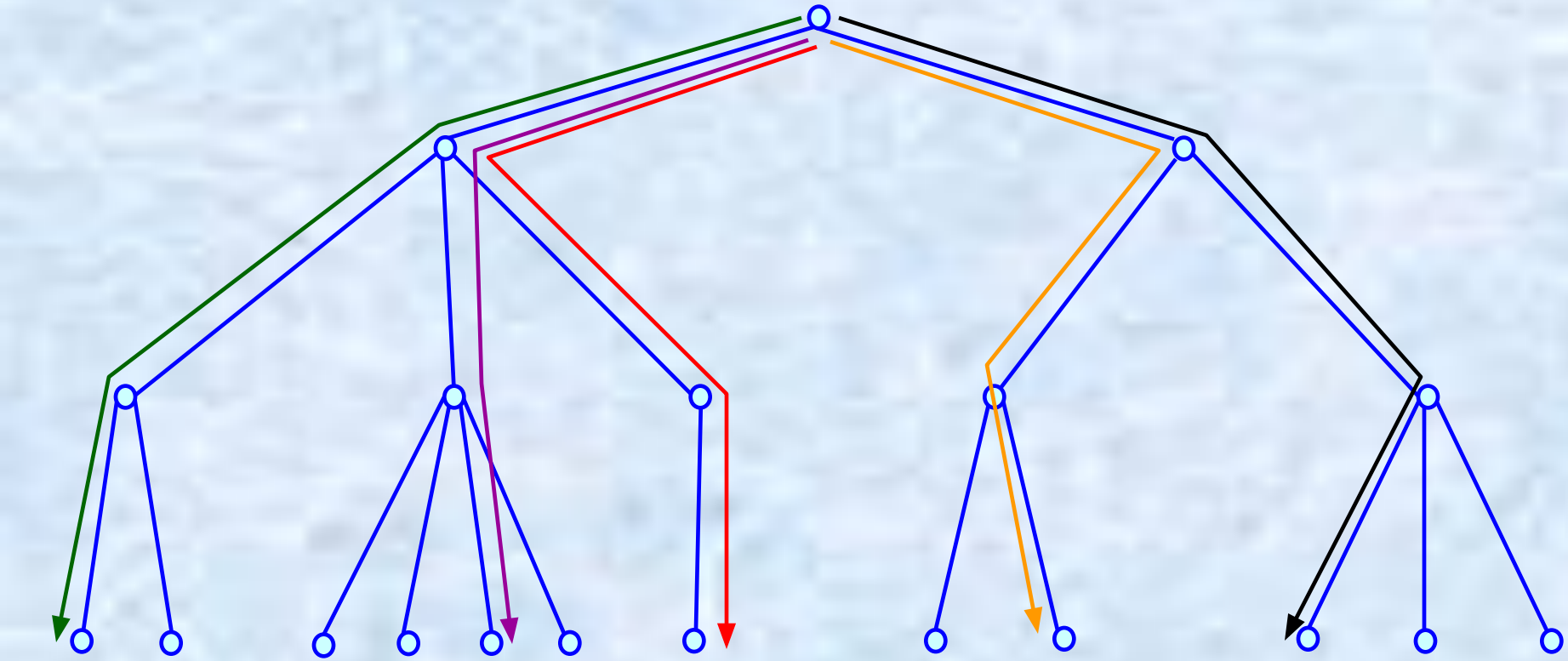


Оценка площади фигуры (интеграла)

$$\frac{\text{Число точек внутри}}{\text{Общее число точек}}$$

Оценка размеров дерева

Пример: 20 узлов, без корня 19 (количество веток)



(1) 2+2*3+2*3*4=32

(2) 2+2*2+2*2*2=14

(3) 2+2*2+2*2*3=18

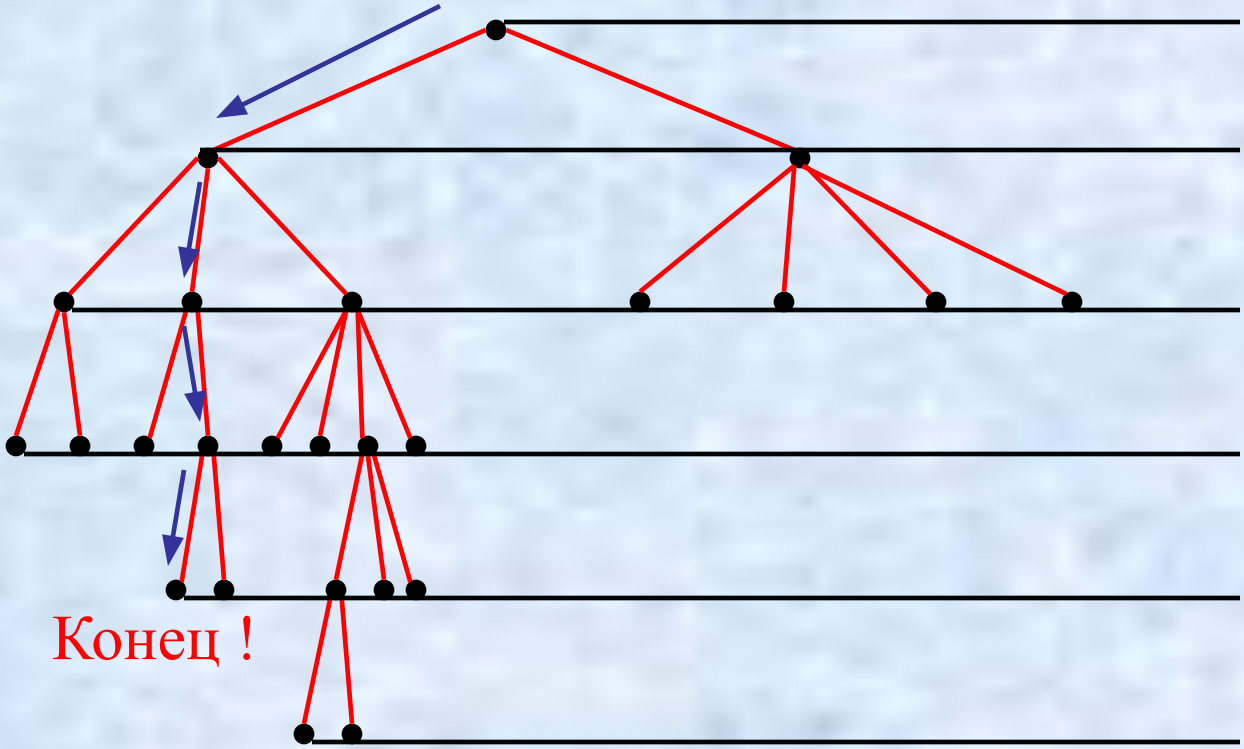
(4) 2+2*3+2*3*2=20

(5) 2+2*3+2*3*1=14

(32+14+18)/3 = 64/3=21.3≈21

(32+14+18+20+14)/5 = 98/5=19.6 ≈ 20

Схема испытания



Выбор a_1: $m_1 = |S_1|$

Выбор a_2 : $m_2 = |S_2|$

Выбор a_3 : $m_3 = |S_3|$

Выбор a_4 : $m_4 = |S_4|$

Выбор a_5 : $m_5 = |S_5|$

Выбор a_6 : $m_6 = |S_6|$

- При $m_k = |S_k| \neq 0$ выбор a_k из S_k случайный с вероятностью $1/m_k$.
- При $m_k = 0$ испытание заканчивается.

Схема испытания

Случайная величина

$V = m_1 + m_1m_2 + m_1m_2m_3 + \ldots + m_1m_2\ldots m_L$

Математическое ожидание

E(V) = число узлов в дереве (отличных от корня)

Напоминание: для случайной величины x с исходами $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ математическое ожидание есть

$$E(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

$$p_i = \frac{1}{k} \Rightarrow E(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$$

Внимание!

На следующих слайдах 35-39 дано обоснование схемы Монте-Карло (сл.40).

Это для студентов, которые хотят понять, почему эта схема будет работать!

Покажем, что

E(V) = число узлов в дереве

1) функция на дереве T (не случайная)

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = root(T) \\ \nu \times \mu(\text{отец}(x)), & \text{если } x \neq root(T) \end{cases}$$

где ν - число братьев x, включая самого x

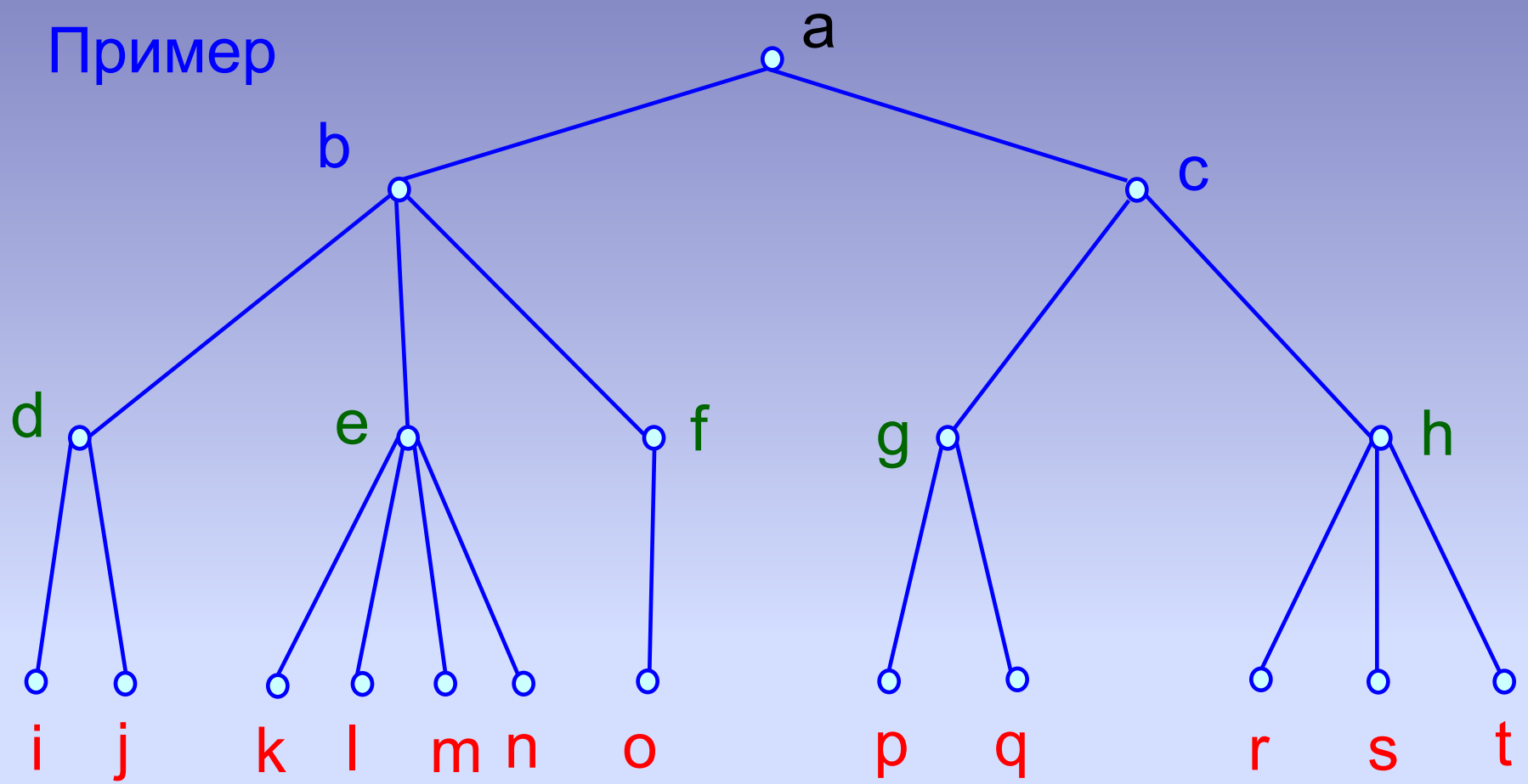
(т.е. число сыновей узла отец(x))

Пусть путь от корня к узлу x есть $v_1, v_2, \ldots, v_j$, тогда

$$\mu(x) = \mu(v_j) = \nu_j \times \mu(v_{j-1}) = \nu_j \times \nu_{j-1} \times \mu(v_{j-2}) = \ldots =$$

$$= \nu_j \times \nu_{j-1} \times \ldots \times \nu_1 \times \mu(v_1) = \nu_j \times \nu_{j-1} \times \ldots \times \nu_1$$

Пример



$\mu(a) = 1$, $\mu(b) = \mu(c) = 2$, $\mu(d) = \mu(e) = \mu(f) = 2*3=6$,

$\mu(g) = \mu(h) = 4$, $\mu(i) = \mu(j) = 12$, $\mu(k) = \mu(l) = \mu(m) = \mu(n) = 24$,

$\mu(o) = 6$, $\mu(p) = \mu(q) = 8$, $\mu(r) = \mu(s) = \mu(t) = 12$

2) Функция «индикатор», описывающая случайность

$$I(x) = \begin{cases} 1, \text{ если узел } x \text{ пройден при испытании} \\ 0, \text{ если узел } x \textbf{ не } \text{пройден при испытании} \end{cases}$$

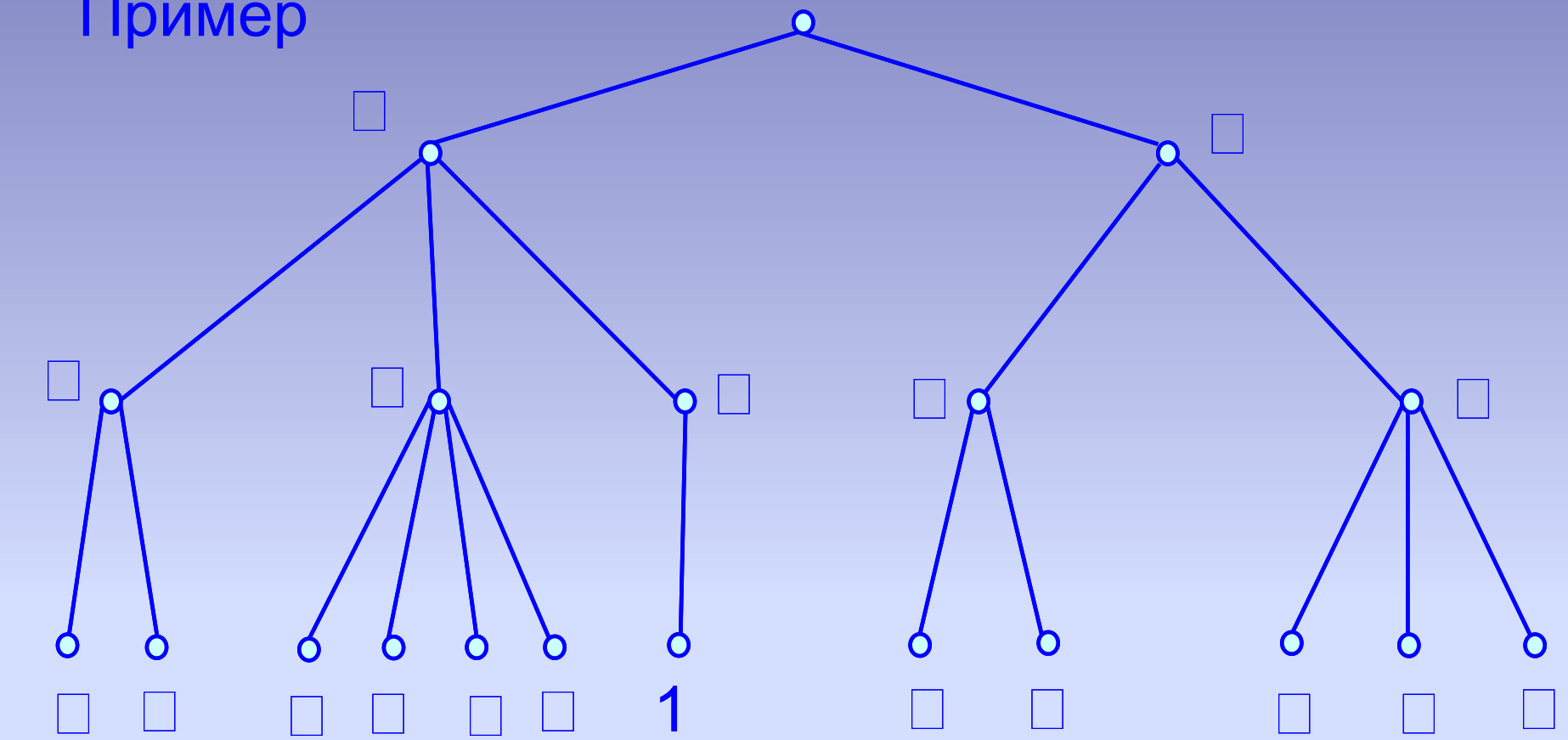
Случайное событие = «*узел x пройден*»,

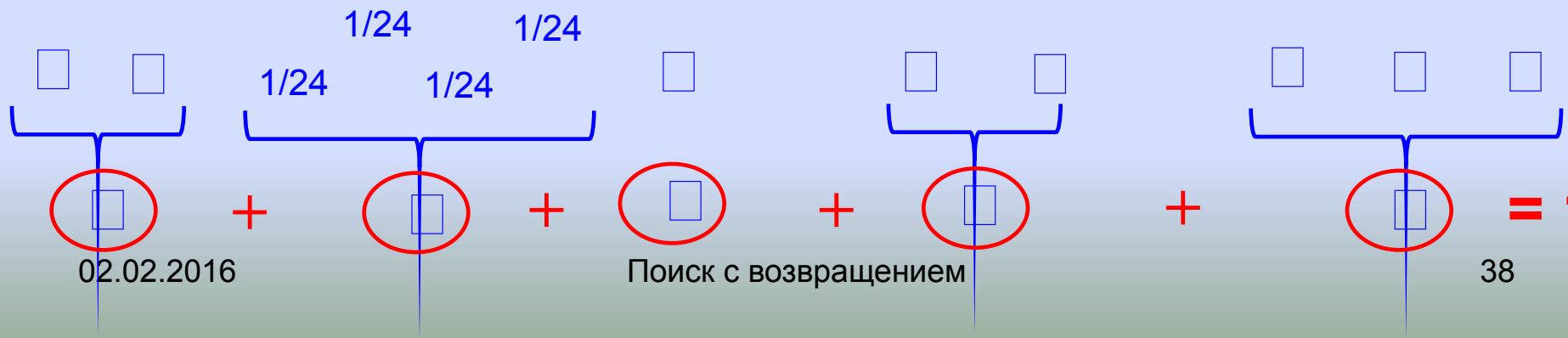
а $I(x)$ – *случайная величина* $\in \{0,1\}$

Вероятность дойти до узла $x = v_j$ есть

$$(1/m_1) \times (1/m_2) \times \ldots \times (1/m_j)$$

Пример





Итак, покажем, что

E(V) = число узлов в дереве

$$V = m_1 + m_1 m_2 + \ldots + \prod_{i=1}^{L} m_i = \sum_{\substack{x \in T \\ x \neq root(T)}} \mu(x) I(x)$$

$$E(V) = \sum_{\substack{x \in T \\ x \neq root(T)}} \mu(x) E(I(x)) = \sum_{\substack{x \in T \\ x \neq root(T)}} \mu(x) \frac{1}{\mu(x)} =$$

$$= \text{число узлов в дереве}, \textit{поскольку}$$

$$E(I(x)) = \Pr(I(x) = 1) \cdot 1 + \Pr(I(x) = 0) \cdot 0 =$$

$$= \Pr(I(x) = 1) = \frac{1}{\mu(x)}$$

Общий алгоритм

```
// Монте-Карло
SV = 0;  // M – число испытаний
for (i = 1; i<=M; i++) {
    k = 1;  S1 = A1;  m1 = |S1|;
    Sum = 0; Prod = 1;
    while (mk ≠ 0) {
    {     //продвижение вперёд
        Prod* =  mk;
        Sum+ =  Prod;
        ak = случайный выбор очередного элемента из Sk;
        k ++;
        вычислить Sk и mk;
    }
    SV := SV + Sum; //добав. рез. очередного испытания
} // end - for
V = SV/ M;
```

```
begin { MonteCarlo }
 Randomize;  n_div_2 := n div 2;   all := 0;
 for iExp:=1 to nExp do
 begin { очередное испытание }
     m_k := n_div_2 - 1;     num := Random ( m_k ) + 1;
     a[1] := 1+num;    k := 2;    prod := m_k;    sum := prod;
     FormSk ( k, m_k, S_k );
     while m_k<>0  do
     begin
          prod := prod*m_k;  sum := sum + prod;
          num := Random ( m_k ) + 1;  a[k] := S_k[num];
          k := k + 1;      FormSk ( k, m_k, S_k );
     end {while};
     all := all + sum
 end {for};
 v := all/nExp
end { MonteCarlo };
```

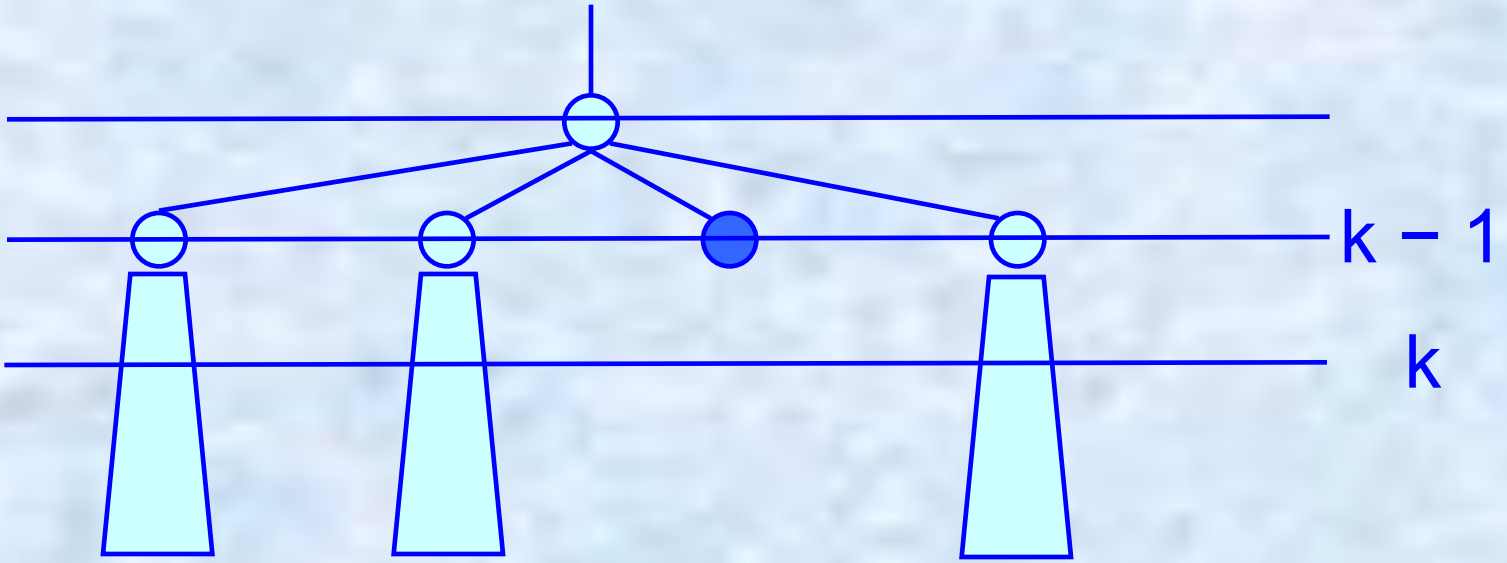
```
procedure FormSk ( k: Nat; var m_k: Nat0; var S_k: pos );
 { формирует "множество" (вектор) S_k возможных ходов и
   его мощность m_k; если S_k пусто, то m_k=0 }
   var s: Nat;
 begin
   m_k := 0;
   for s:=1 to n do
     if not NoQueen( k, s) then
     begin { можно ставить }
      m_k := m_k + 1;
      S_k[m_k] := s
     end;
 end {FormSk};
```

См. файлы с результатами

- Queen
- Queen_re

Backtracking. Другие способы программирования

1. Рекурсивный подход



void backtrack (sequence a, int k);

// a = (a_1, a_2, …,a_{k-1}) – частичное решение

```
void  backtrack (sequence a, int  k)
// a  = (a1, a2, …,ak-1) – частичное решение
{
  if (a – решение)  {фиксировать a;}
  else {
    вычислить Sk;
    for (∀b ∈ Sk )  backtrack ( postfix (a, b),  k+1 );
  }
} // end - backtrack
```

```
/*Старт:*/  k = 1; a = Create;   backtrack (a, k);
```

2. Макрокоманды

Уменьшение «накладных расходов»
(все решения одной длины n)

Макрокоманда

$CODE_k$: *вычислить* S_k;

L_k: **if** $S_k = \varnothing$ **then goto** L_{k-1};

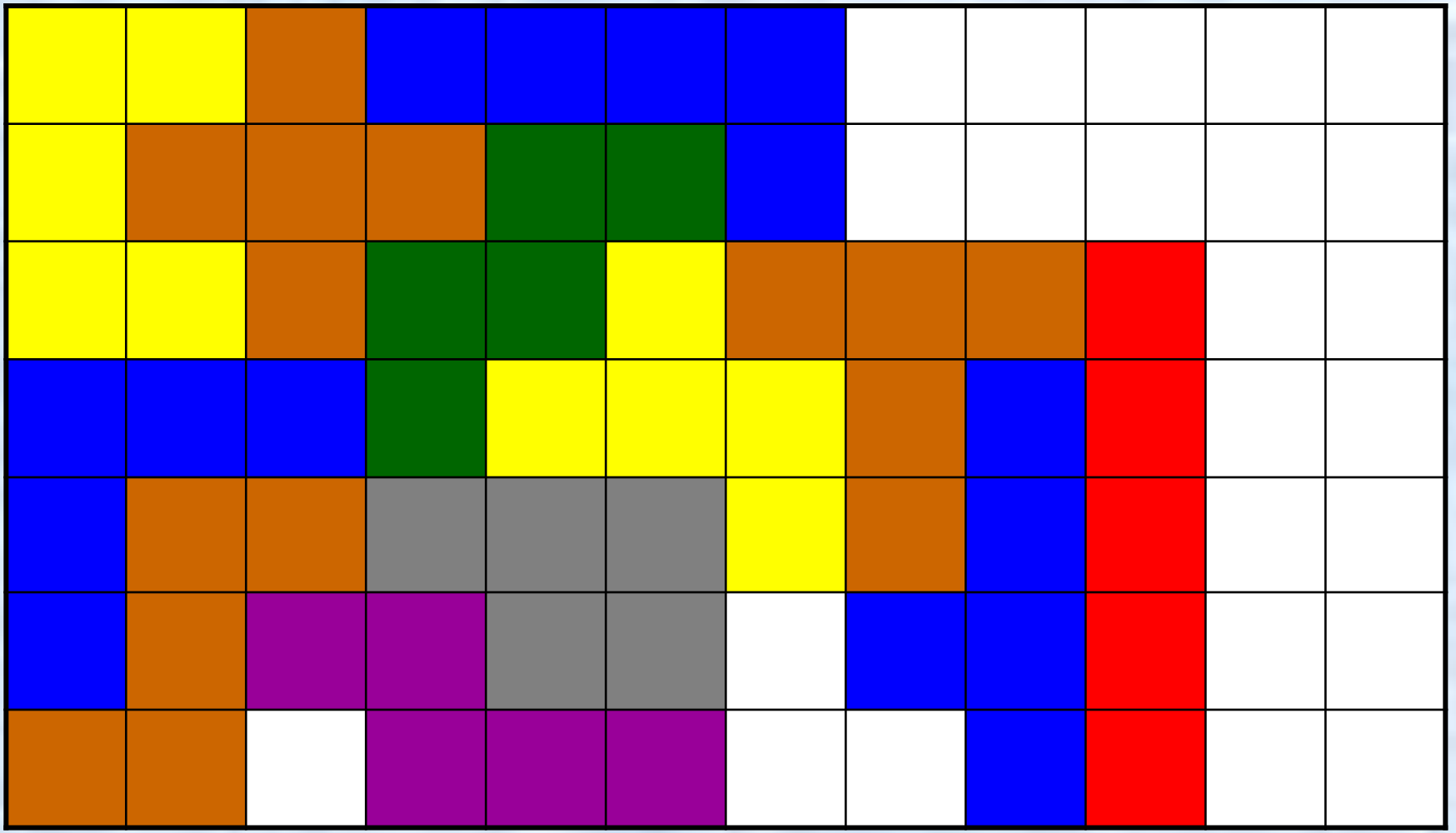
a_k = *очередной элемент из* S_k;

$S_k := S_k - \{a_k\}$;

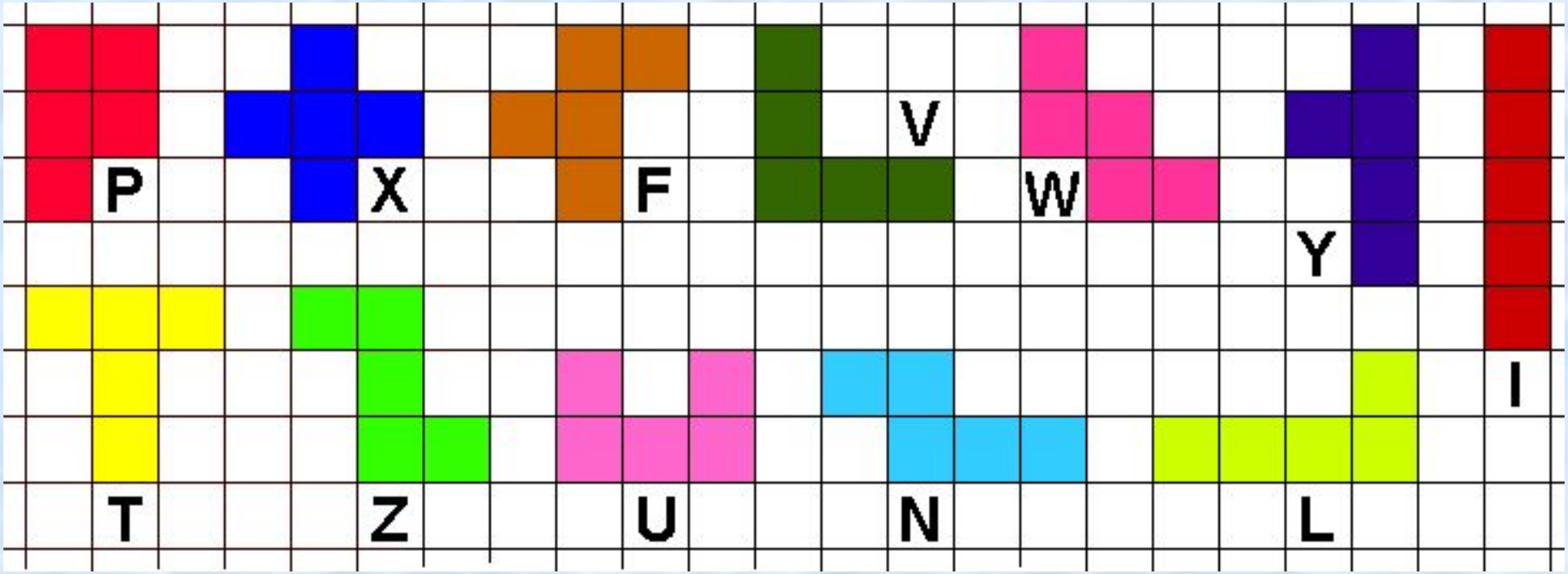
Цикл периода макрогенерации:
for (k = 1; k<=n; k++) $CODE_k$;

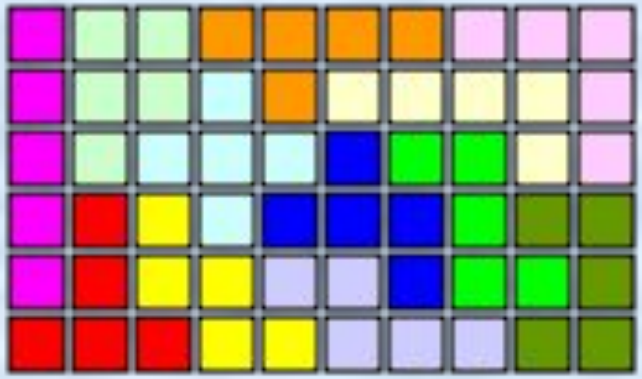
$CODE_1$;
$CODE_2$;
…
…
$CODE_k$;
…
$CODE_n$;
фиксировать решение (a_1, a_2, …,a_n);
goto L_n;
L_0: // конец – все решения найдены

Пентамино

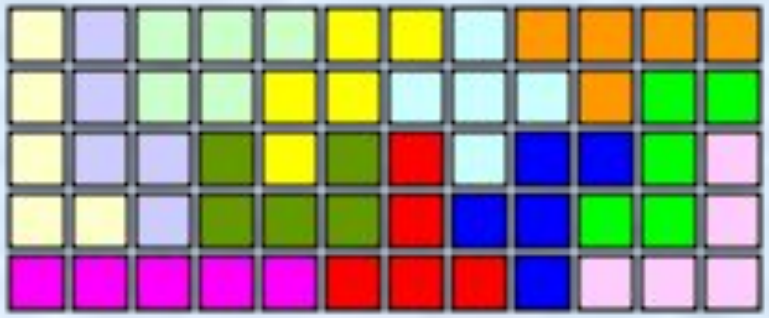


Пентамино

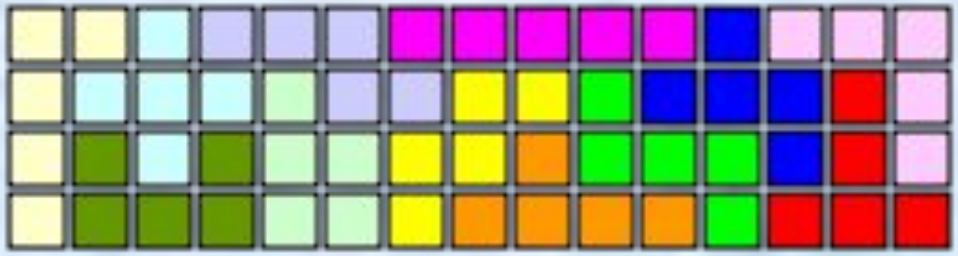




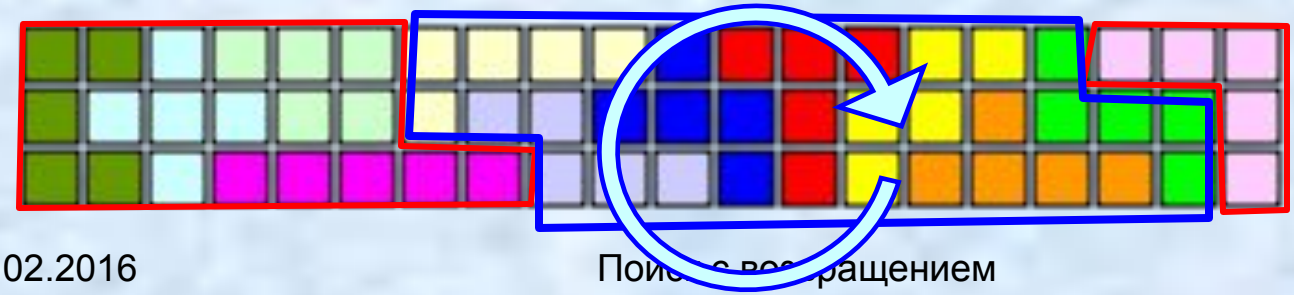
6 × 10



5 × 12



4 × 15



3 × 20

Для случая 6×10 эту задачу впервые решил в 1965 году Джон Флетчер [1].

Существует ровно 2339 различных укладок пентамино в прямоугольник 6×10, не считая поворотов и отражений целого прямоугольника, но считая повороты и отражения его частей

(иногда внутри прямоугольника образуется *симметричная комбинация фигур*, поворачивая которую, можно получить дополнительные решения; для прямоугольника 3×20, приведённого на рисунке, второе решение можно получить поворотом блока из 7 фигур, или, иначе говоря, если поменять местами четыре фигуры, крайние слева, и одну крайнюю справа, *см. предыдущий слайд*).

Продолжение

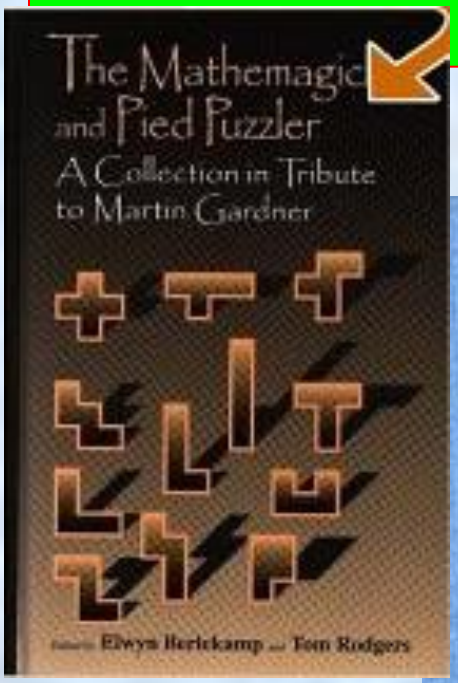
Для прямоугольника 5×12 существует 1010 решений,

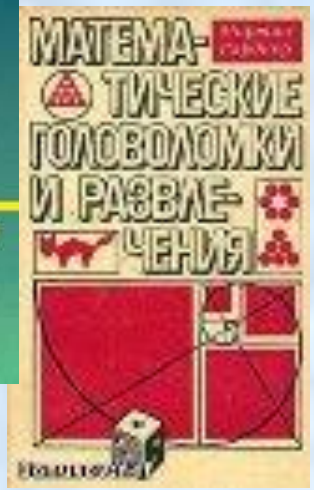
4×15 — 368 решений,

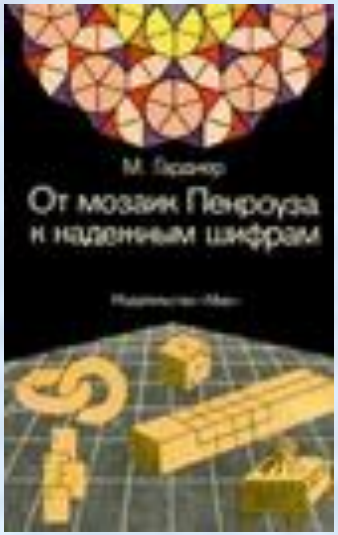
3×20 — всего 2 решения.

John G. Fletcher (1965). "A program to solve the pentomino problem **by the recursive use of macros**". *Communications of the ACM* **8**, 621–623.

Мартин Гарднер







КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ