

ПОТОКИ В СЕТЯХ

Задача о максимальном потоке

Сеть – это ориентированный граф $G = (V, E)$, каждому ребру (v_i, v_j) которого поставлено в соответствие число $c(v_i, v_j) \geq 0$, называемое пропускной способностью, а также выделено две вершины v_0 – исток и v_{n-1} – сток, $n = |V|$.

Поток – это функция $f(v_i, v_j)$, $(v_i, v_j) \in E$ обладающая тремя свойствами:

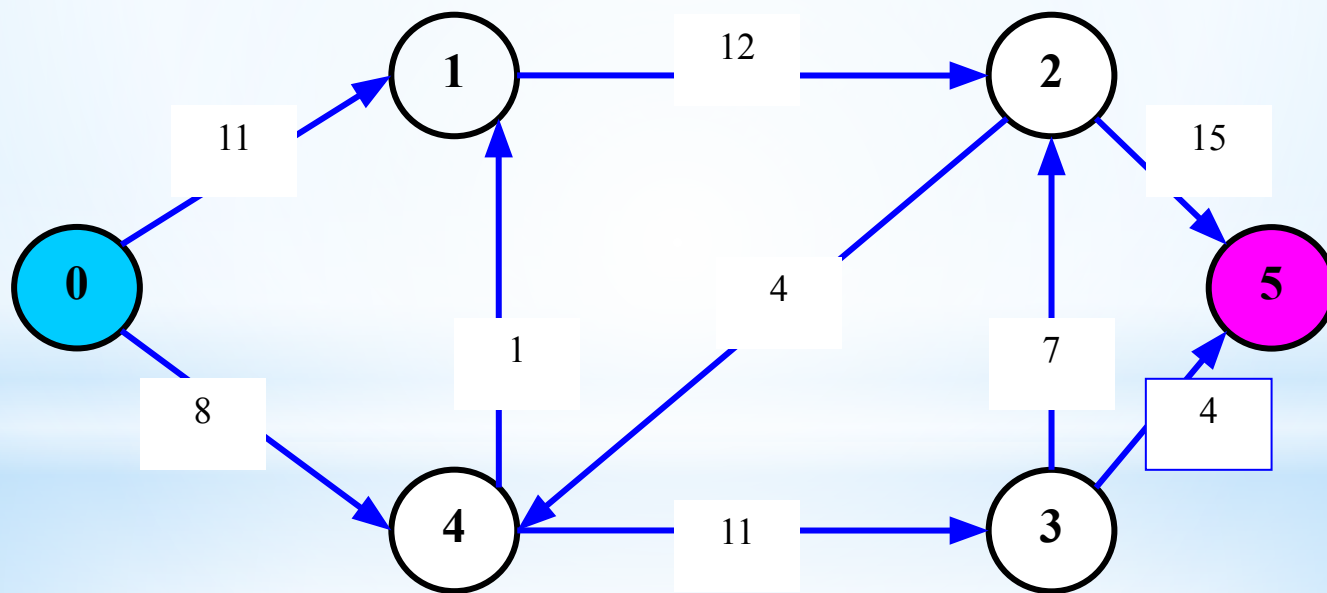
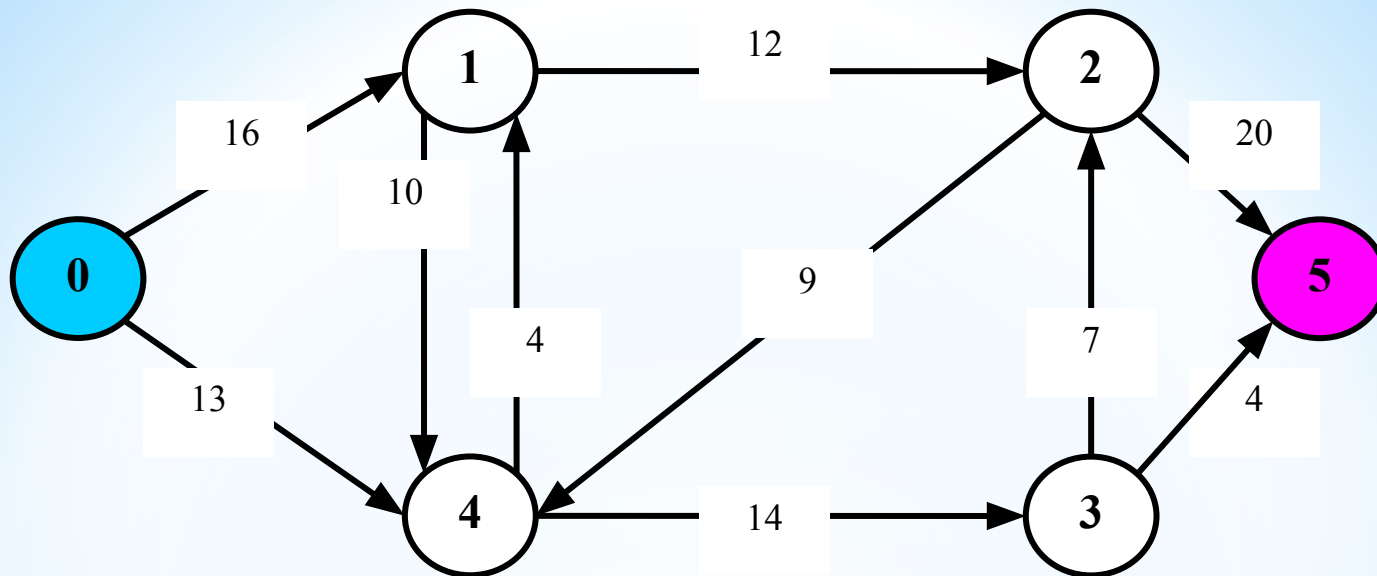
1. $f(v_i, v_j) \leq c(v_i, v_j)$;
2. $f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i)$ (кососимметричность);
3. $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0, u \in V - \{v_0, v_{n-1}\}$

Величина потока f это $|f| = \sum_{v \in V} f(v_0, v_j)$

Примем $\forall v_i \in V, f(v_i, v_j) \leq 0, f(v_j, v_i) \geq 0$

$\sum_{v_i \in V} f(v_i, v_j)$ - величина *входящего потока* для вершины v_j

$\sum_{v_j \in V} f(v_i, v_j)$ - величина *исходящего потока* для вершины v_i

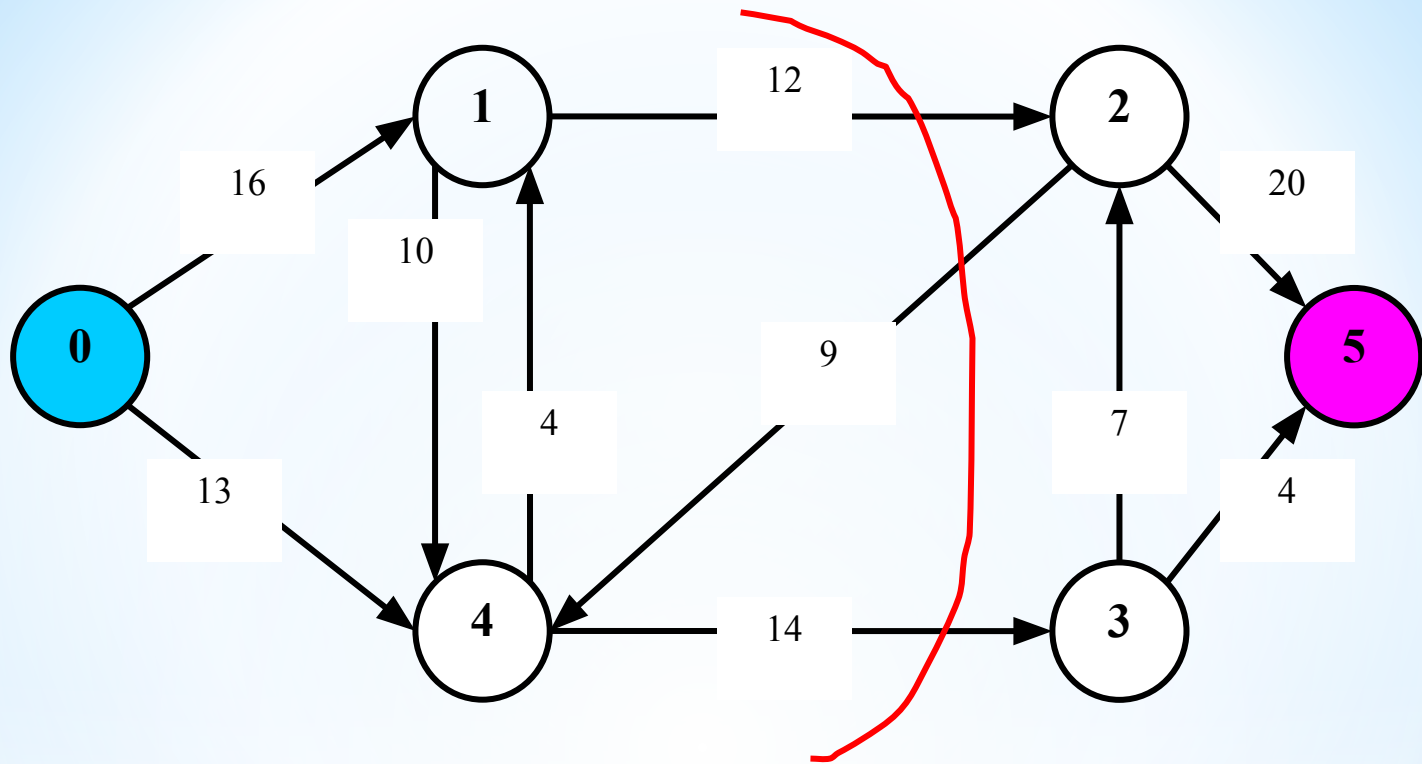


$$|f| = \sum_{v \in V} f(v_0, v_j) = 11 + 8 = 19$$

Разрез (S, T) сети $G = (V, E)$ называется разбиение множества V на две части S и T такое, что $v_0 \in S, v_{n-1} \in T, S \cup T = V, S \cap T = \emptyset$.

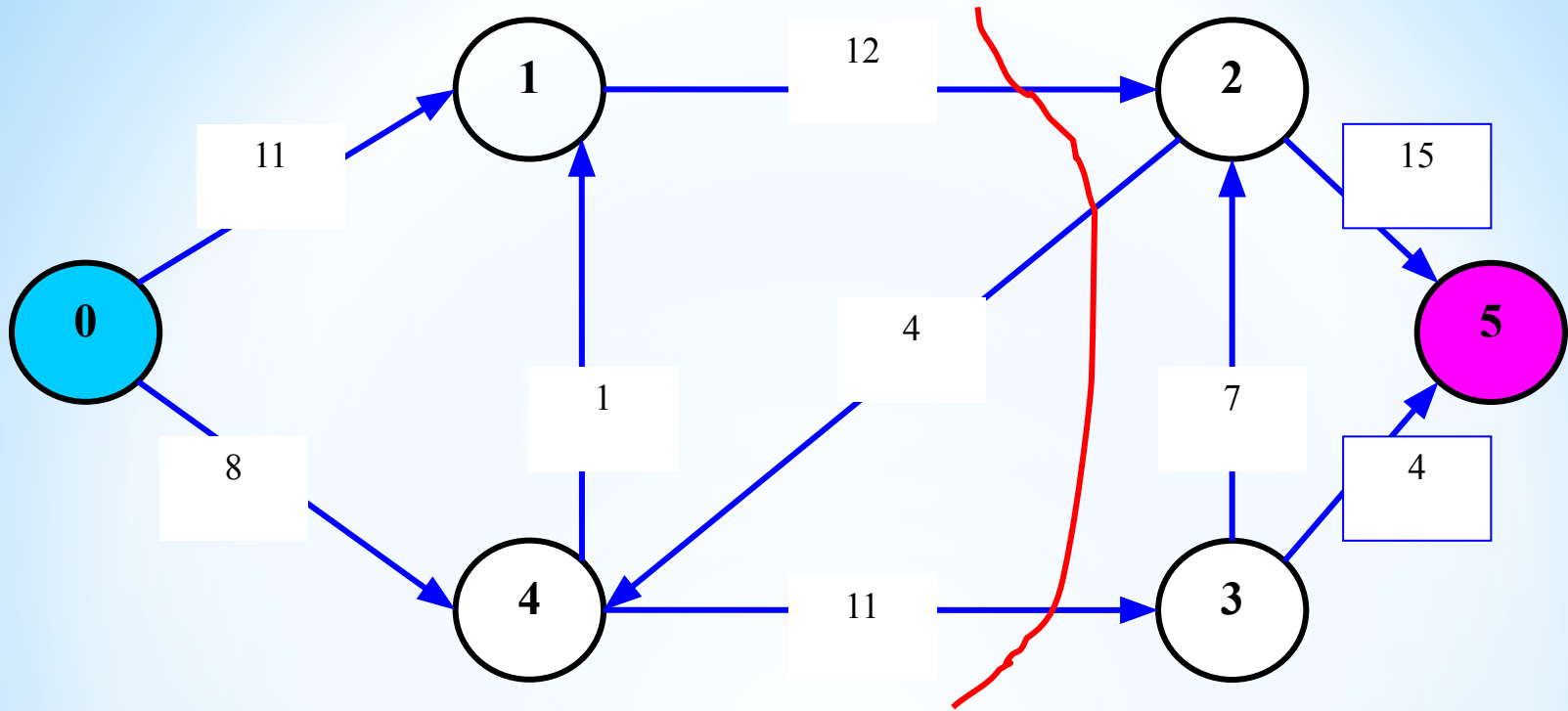
Пропускная способность разреза $c(S, T)$ – это сумма пропускных способностей дуг соединяющих вершины в S и T .

Минимальный разрез сети – это разрез с минимальной пропускной способностью.



Разрез $(\{0,1,4\}, \{2,3,5\})$,

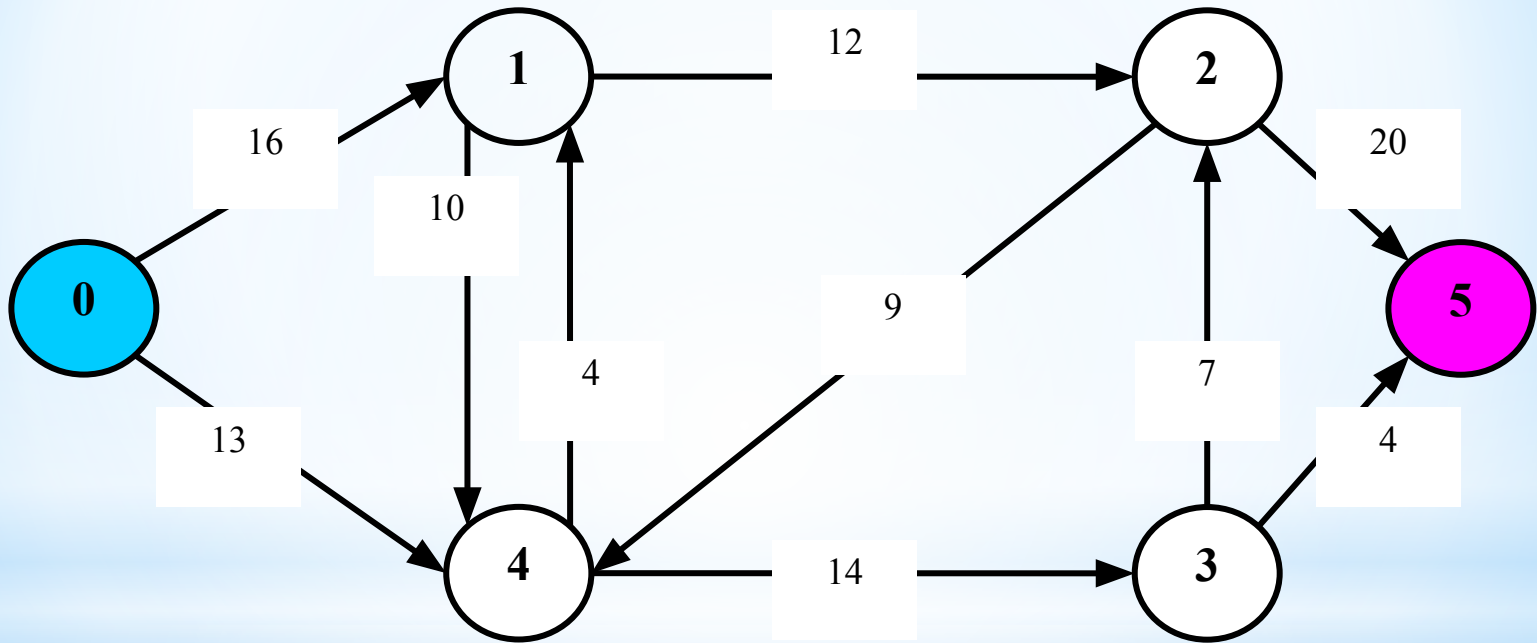
$$c(\{0,1,4\}, \{2,3,5\}) = c(1,2) + c(4,3) = 12 + 14 = 26$$

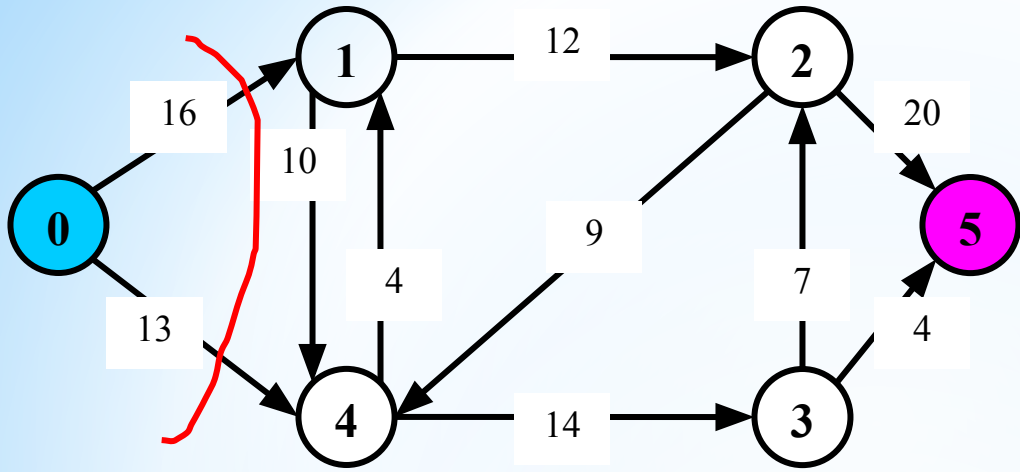


Поток через разрез $(\{0,1,4\}, \{2,3,5\})$

$$f(1,2) + f(4,3) + f(2,4) = 12 + 11 + (-4) = 19$$

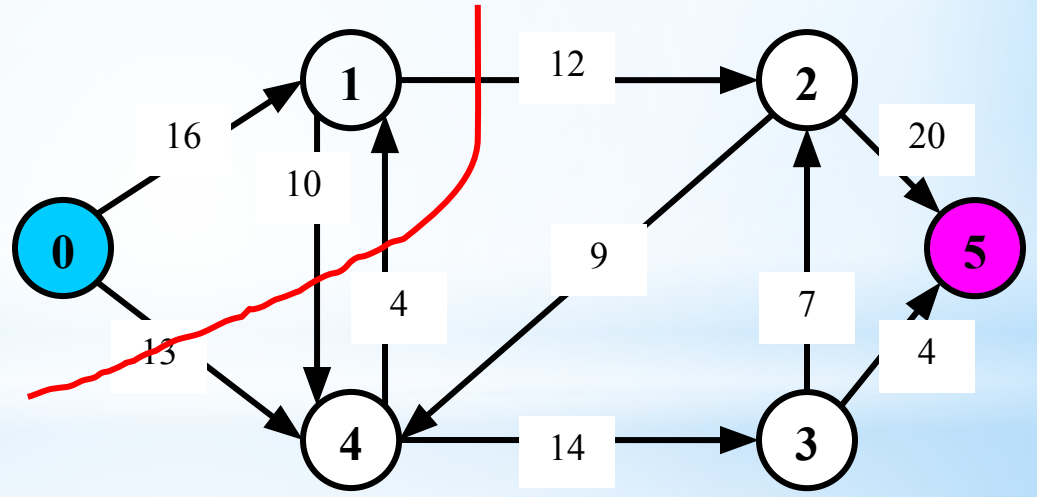
Теорема Форда-Фалкерсона: *В любой сети максимальная величина потока из истока S в сток t равна минимальной пропускной способности разреза отделяющего S от t .*





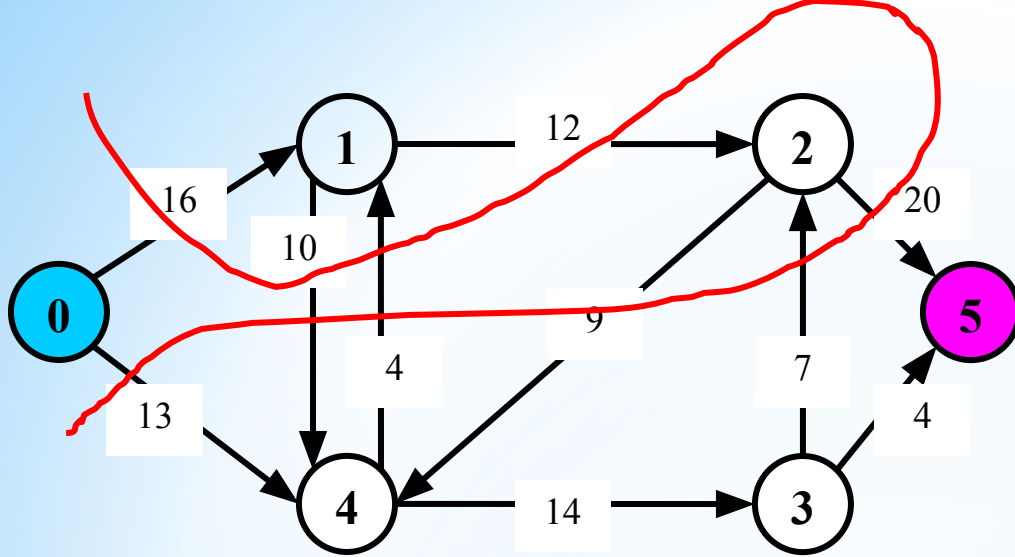
29

{0}



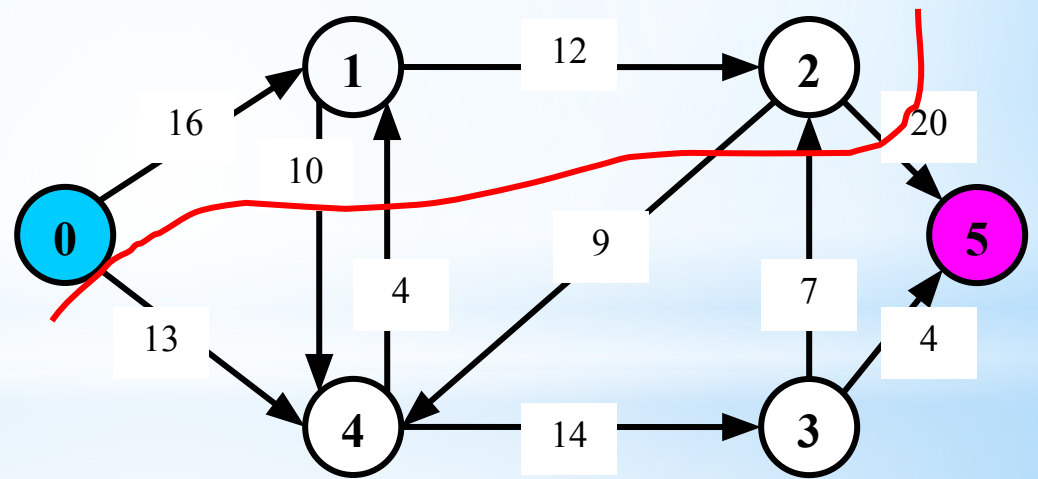
35

{0,1}



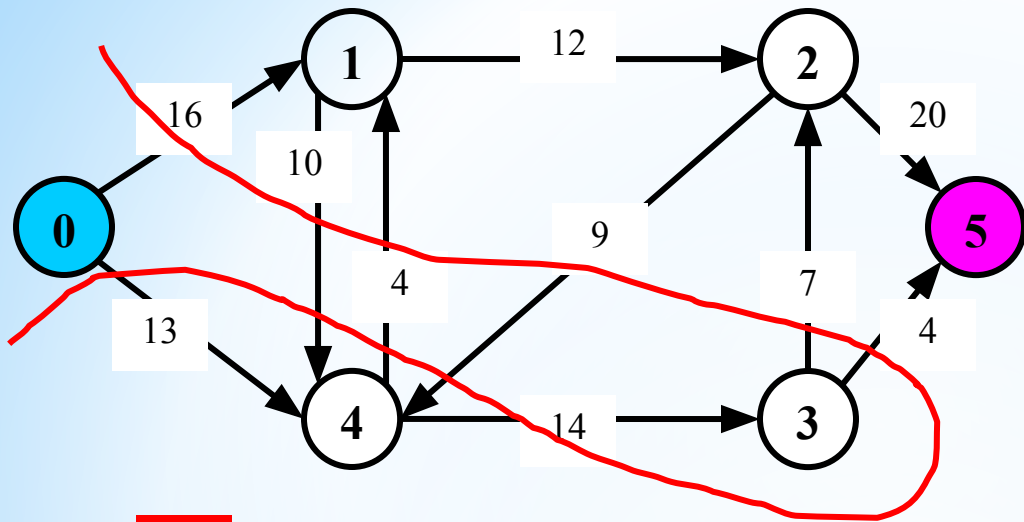
58

{0,2}



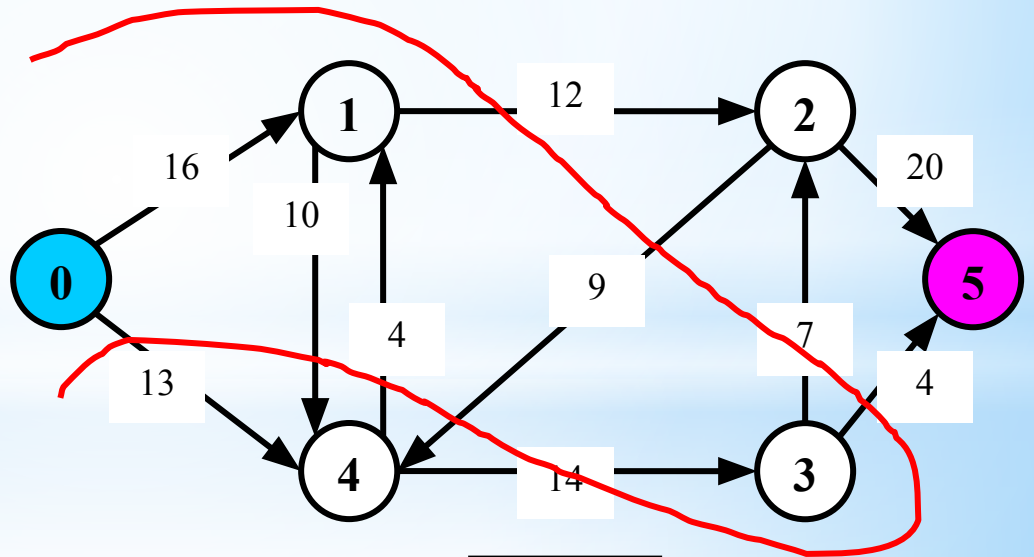
52

{0,1,2}



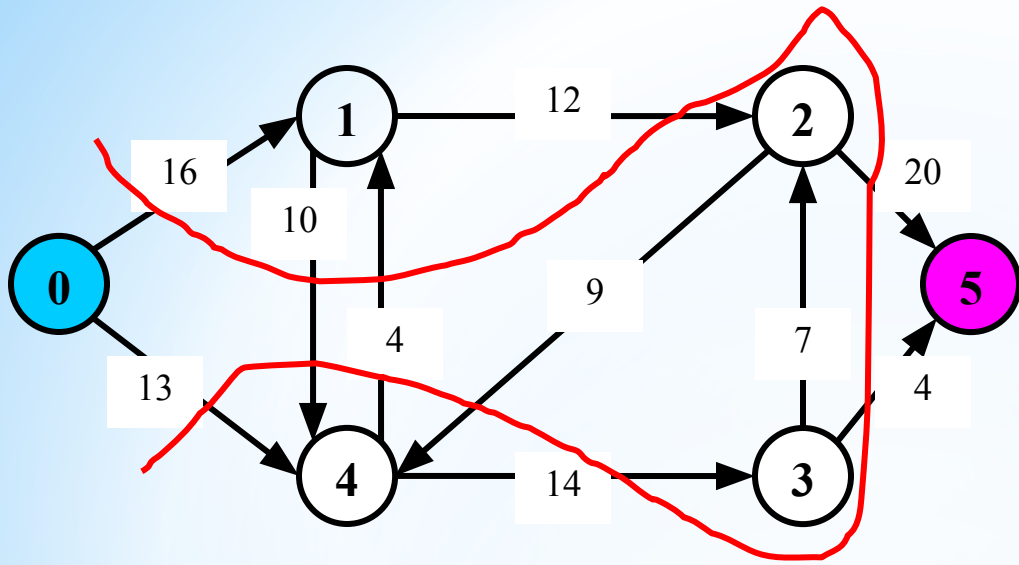
40

{0,3}



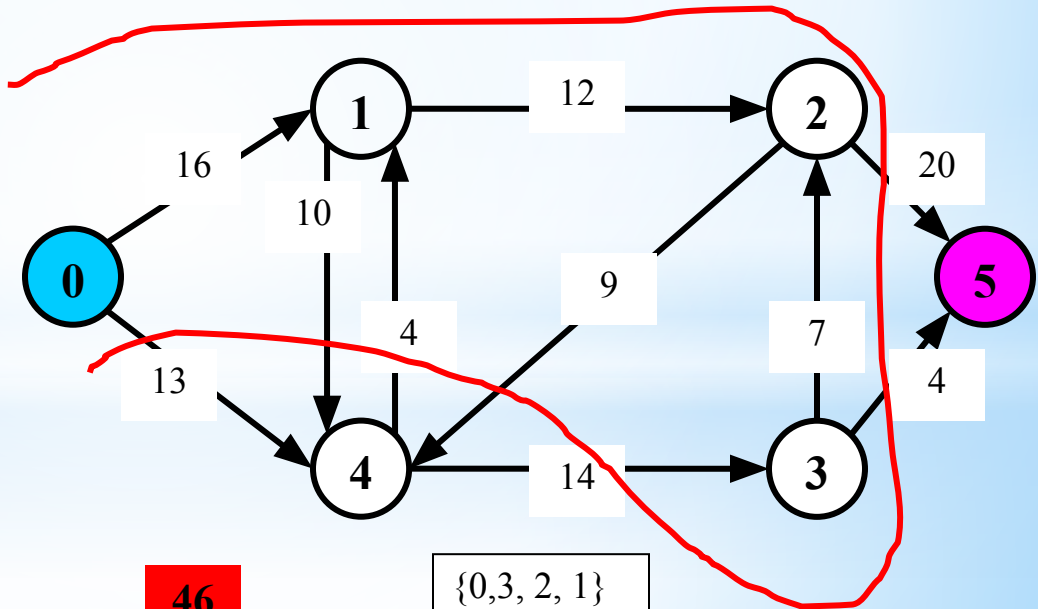
29

{0,3,1}



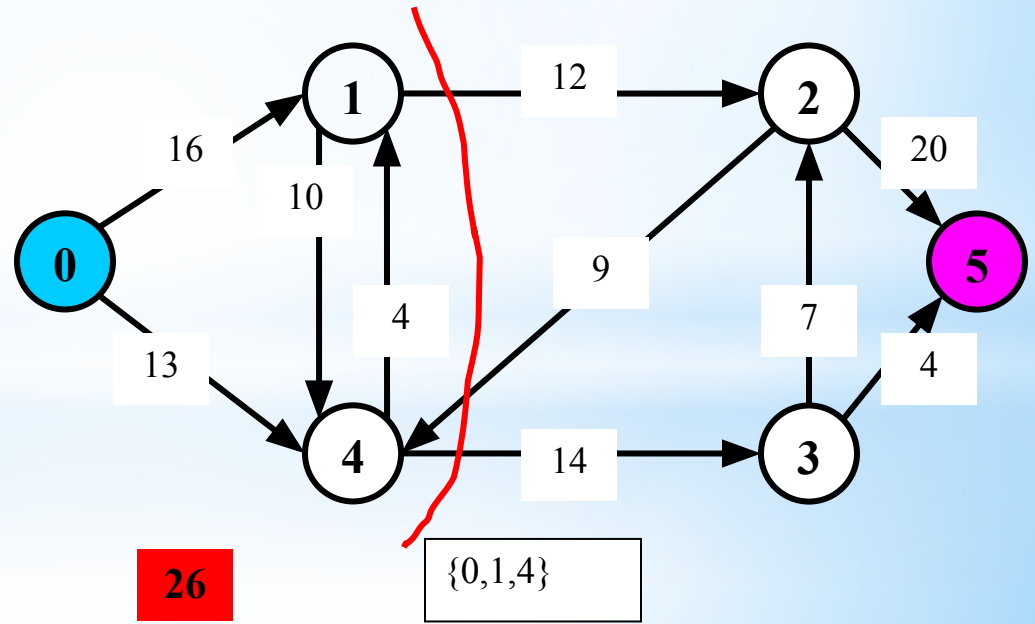
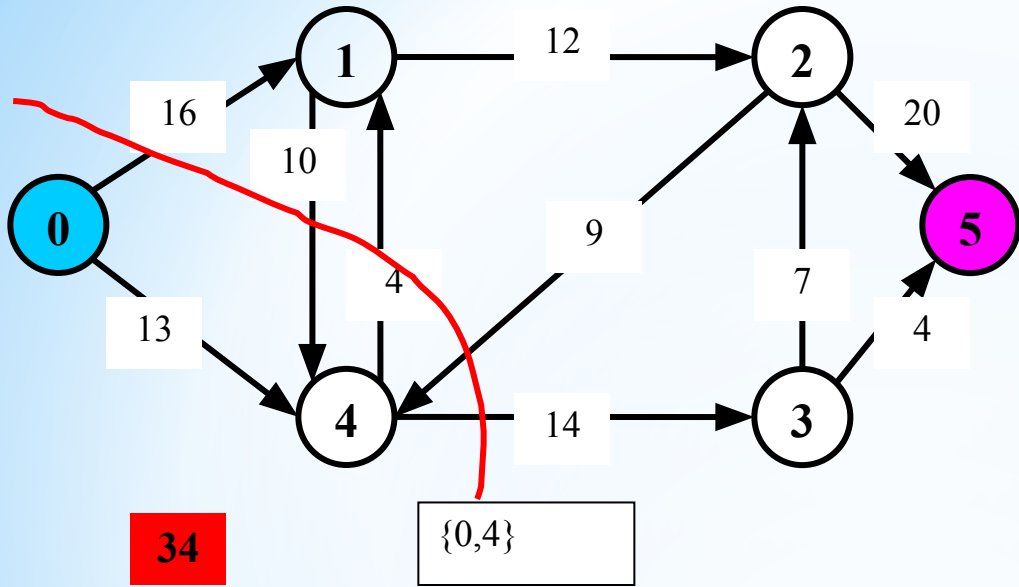
53

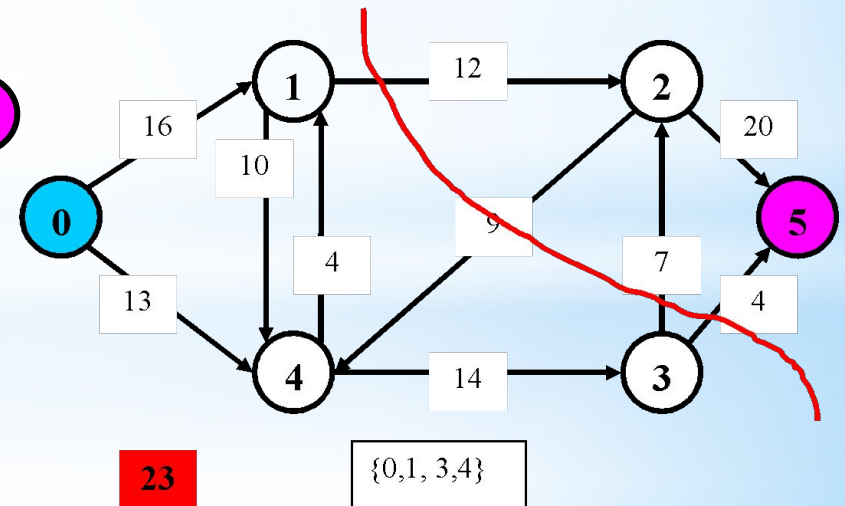
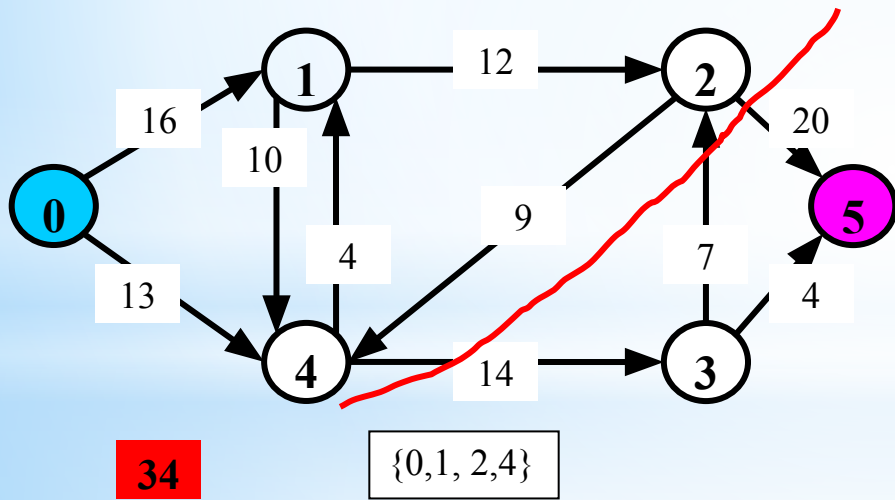
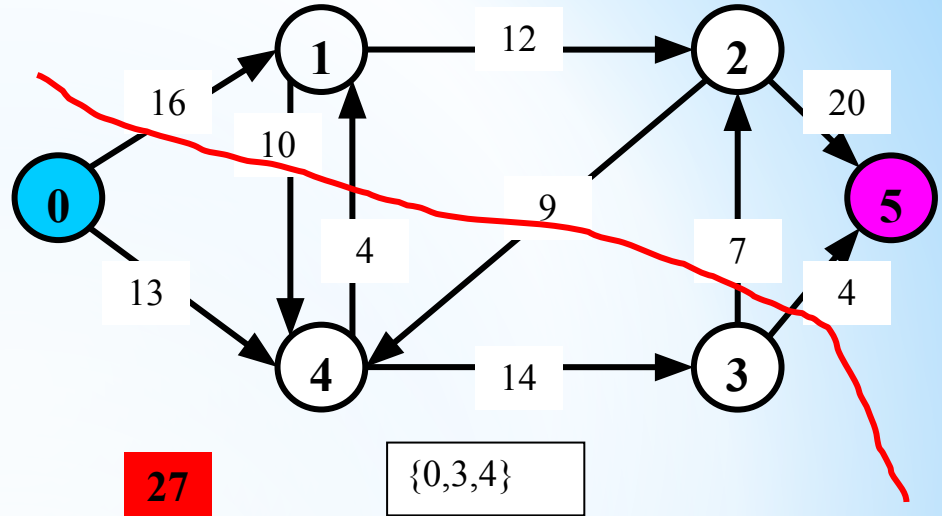
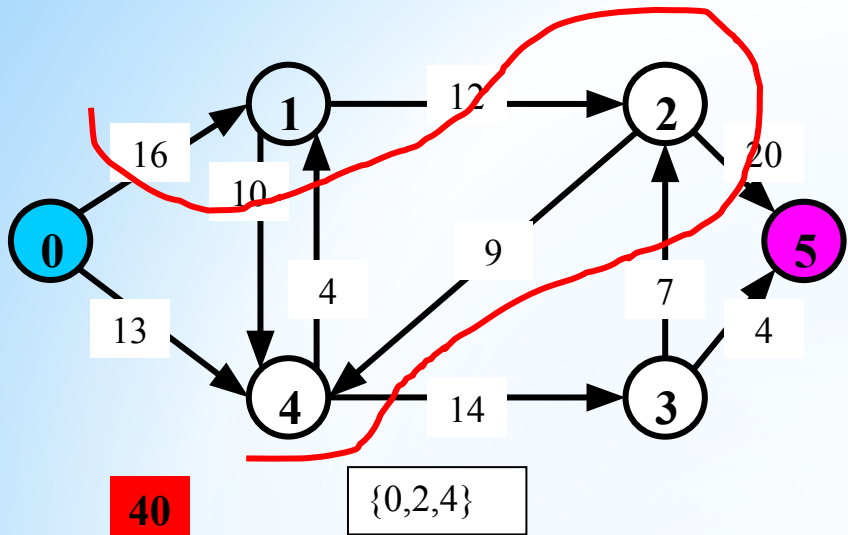
{0,3, 2}

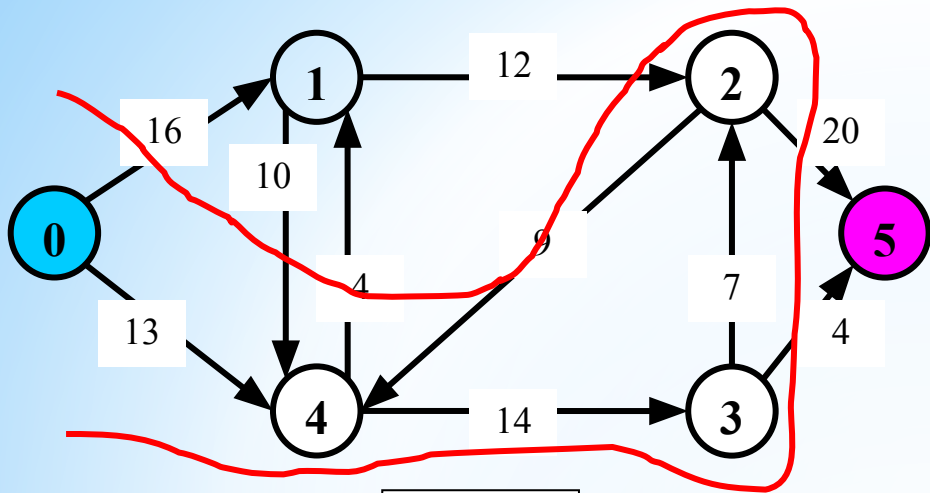


46

{0,3, 2, 1}

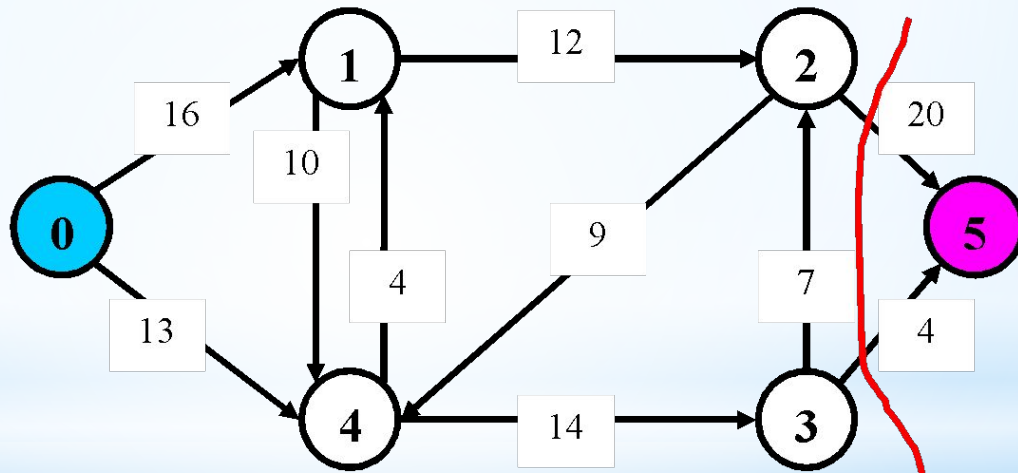






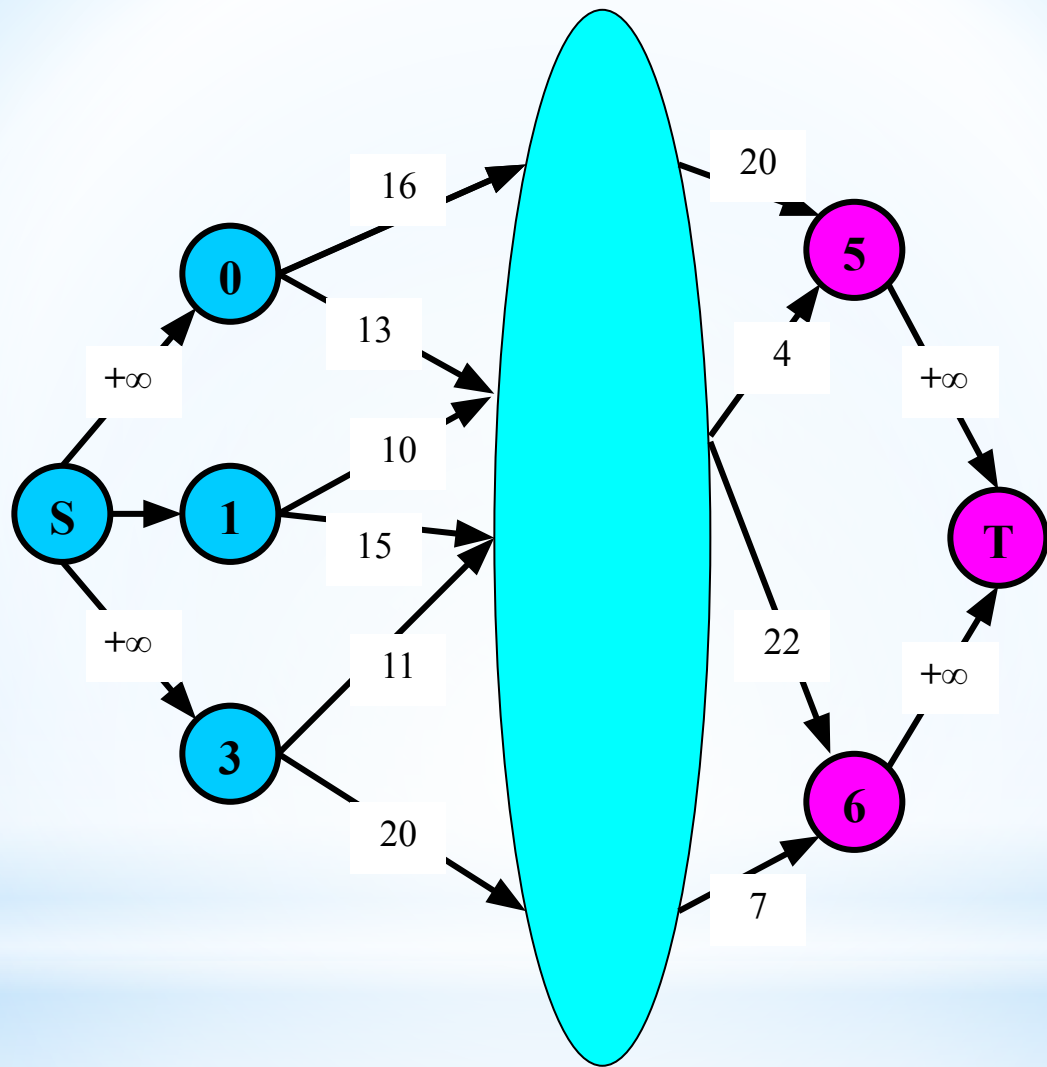
40

{0,2,3,4}



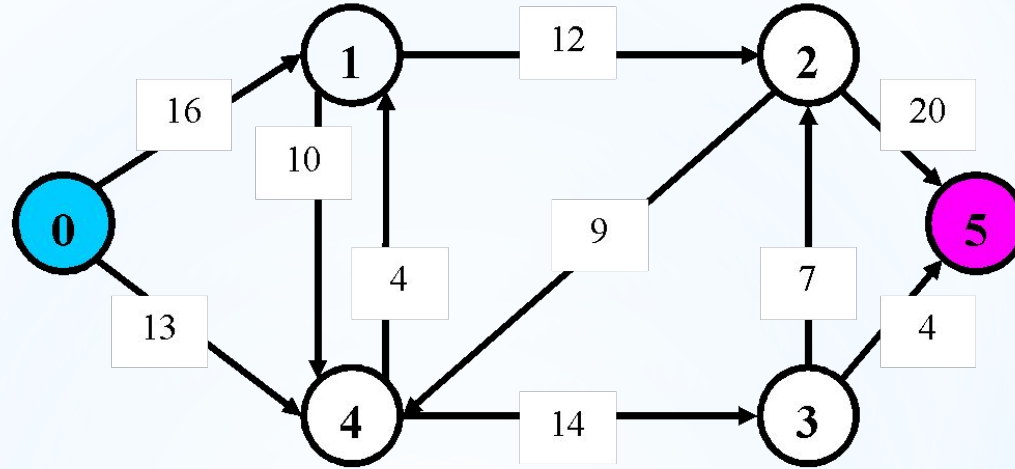
24

{01,,2,3,4}

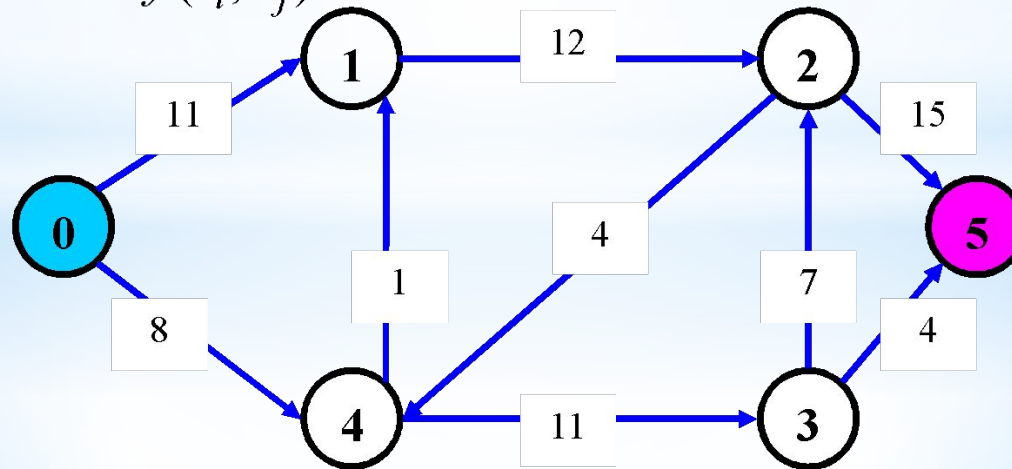


Понятие остаточной сети

Сеть $G = (V, E)$, $c(v_i, v_j)$ - пропускная способность дуги

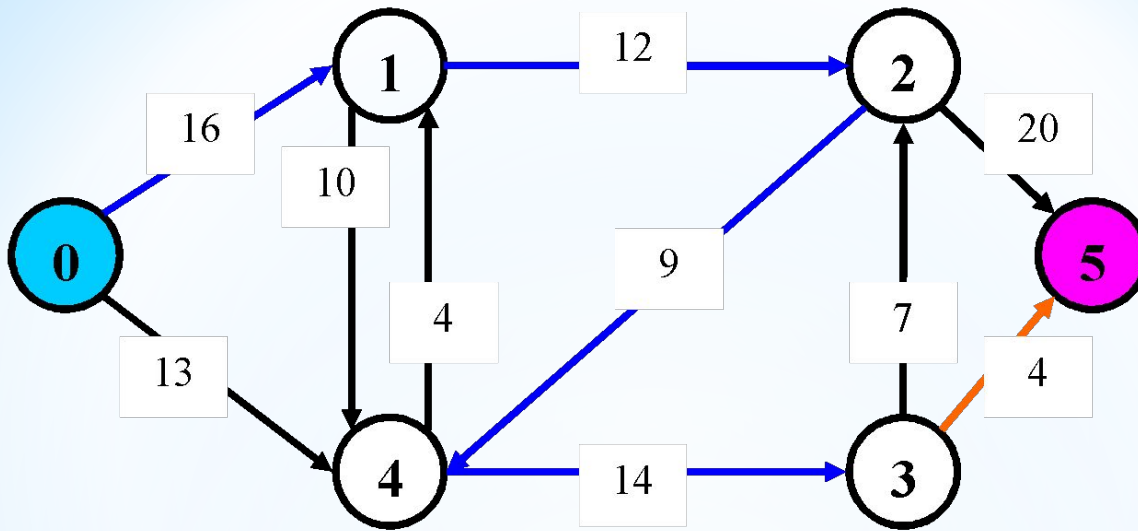


Поток $f(v_i, v_j)$

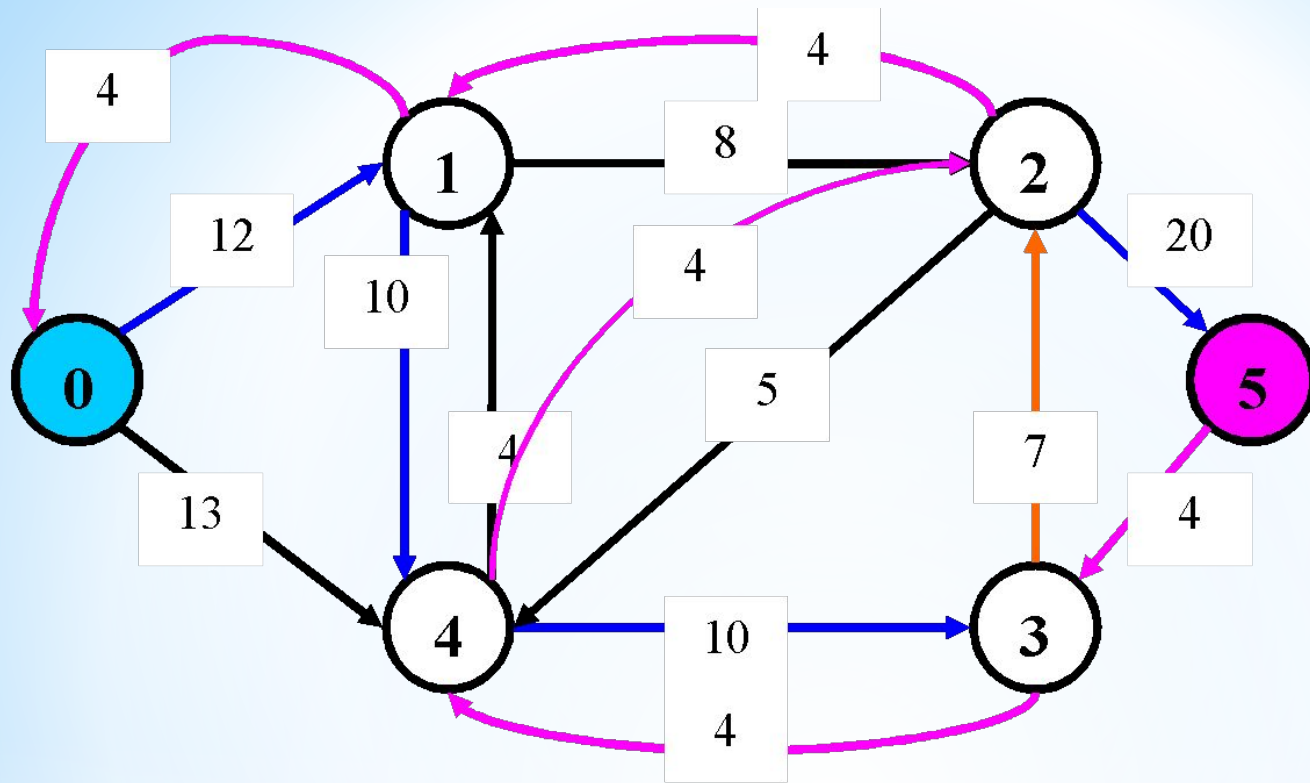


АЛГОРИТМ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

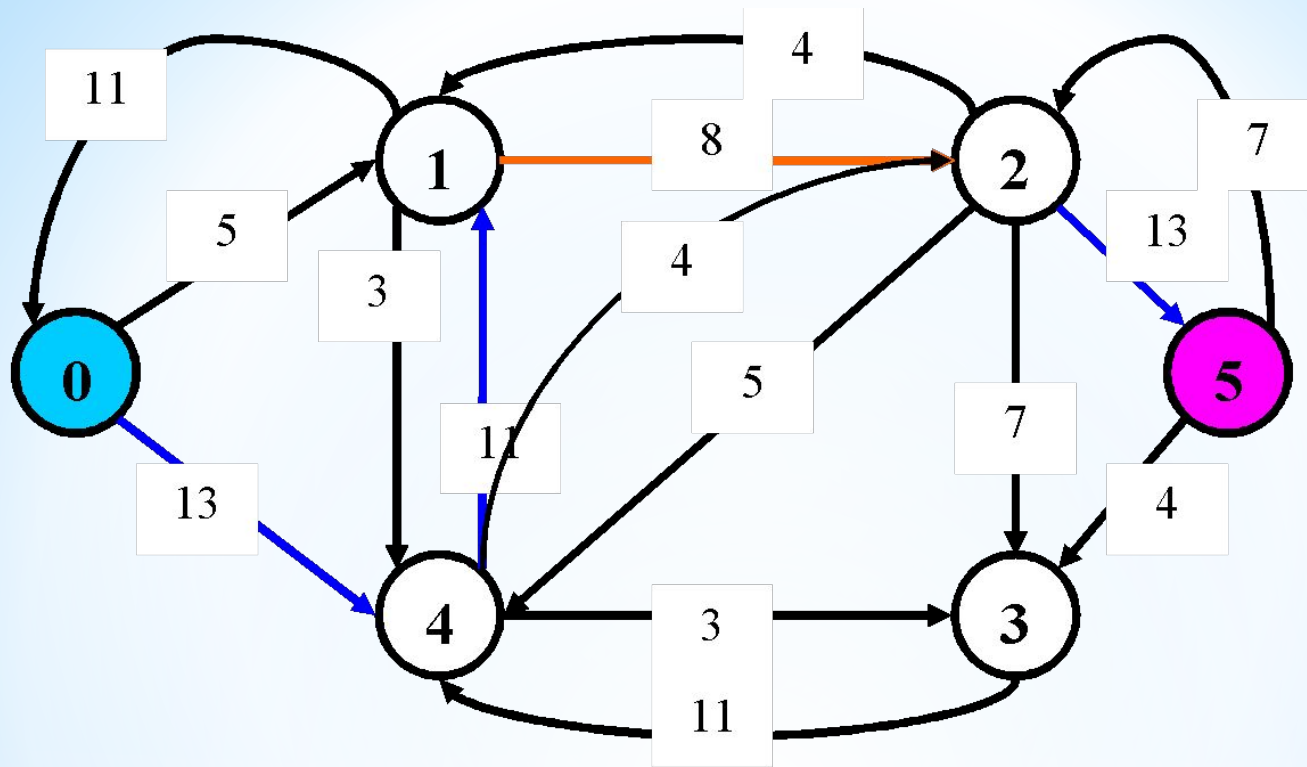
1. Обнуляем все потоки. Остаточная сеть изначально совпадает с исходной сетью.
2. В остаточной сети находим любой путь из источника в сток. Если такого пути нет, останавливаемся.
3. Пускаем через найденный путь (он называется увеличивающим путём или увеличивающей цепью) максимально возможный поток:
 - На найденном пути в остаточной сети ищем ребро с минимальной пропускной способностью c_{\min} .
 - Для каждого ребра на найденном пути увеличиваем поток на c_{\min} , а в противоположном ему - уменьшаем на c_{\min} .
 - Модифицируем остаточную сеть. Для всех рёбер на найденном пути, а также для противоположных им рёбер, вычисляем новую пропускную способность. Если она стала ненулевой, добавляем ребро к остаточной сети, а если обнулилась, стираем его.
4. Возвращаемся на шаг 2.



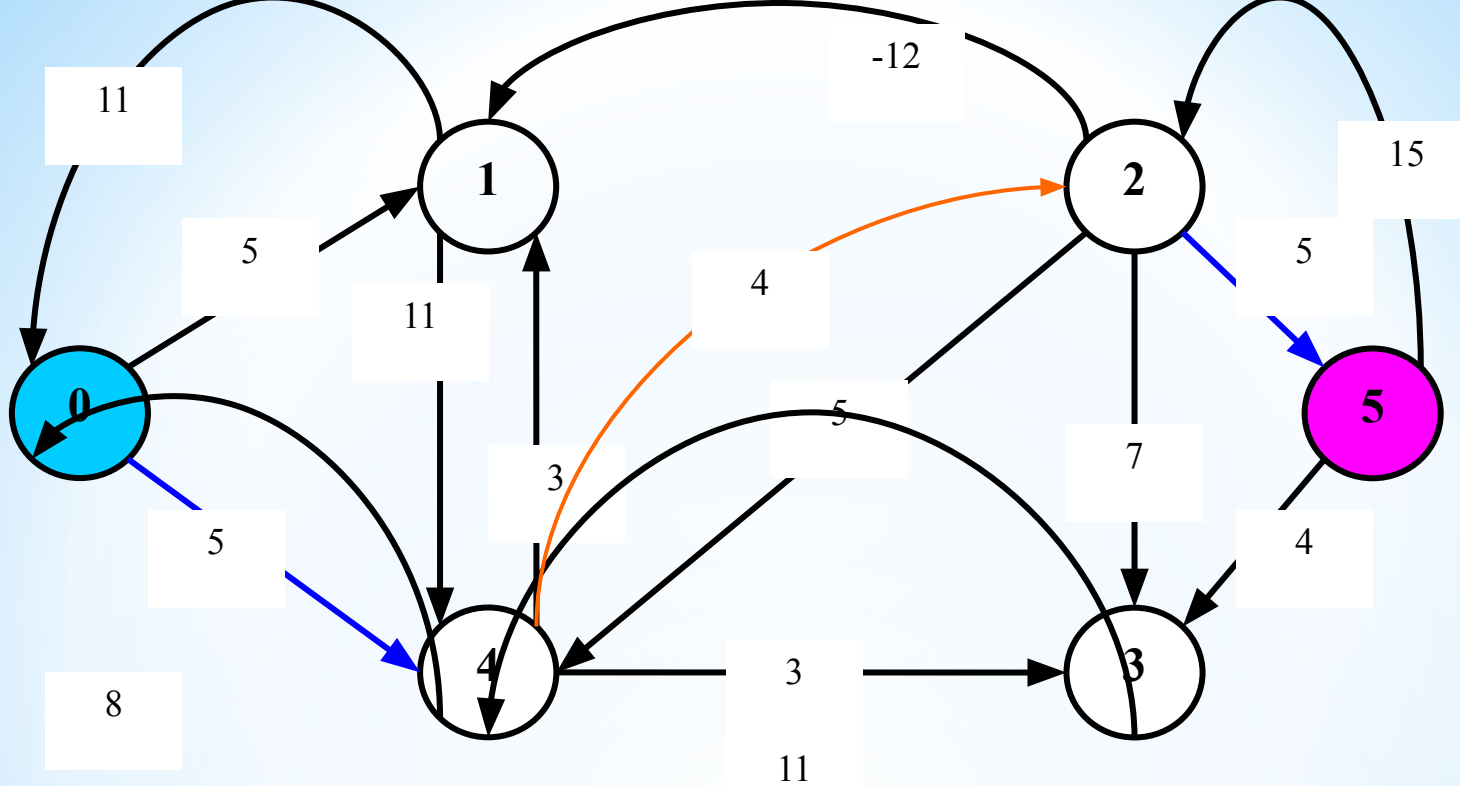
	0	1	2	3	4	5
0	0	4	0	0	0	0
1	-4	0	4	0	0	0
2	0	-4	0	0	4	0
3	0	0	0	0	-4	4
4	0	0	-4	4	0	0
5	0	0	0	-4	0	0



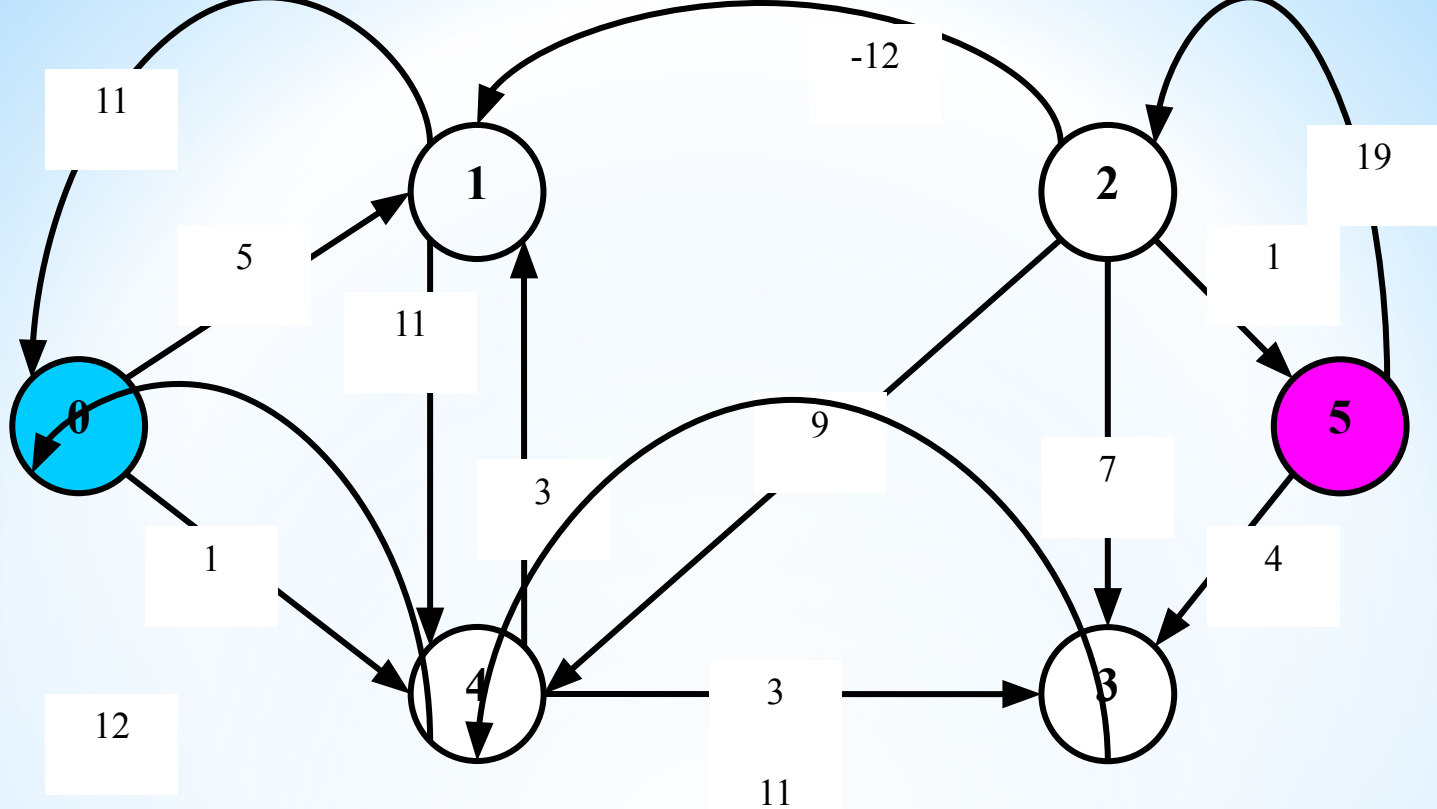
	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	0	0
1	-11	0	4	0	7	0
2	0	-4	0	-7	4	7
3	0	0	7	0	-11	4
4	0	-7	-4	11	0	0
5	0	0	-7	-4	0	0



	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	8	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	4	15
3	0	0	7	0	-11	4
4	-8	1	-4	11	0	0
5	0	0	-15	-4	0	0



	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	12	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	0	19
3	0	0	7	0	-11	4
4	-12	1	-0	11	0	0
5	0	0	-19	-4	0	0



	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	12	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	0	19
3	0	0	7	0	-11	4
4	-12	1	-0	11	0	0
5	0	0	-19	-4	0	0

	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	12	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	0	19
3	0	0	7	0	-11	4
4	-12	1	-0	11	0	0
5	0	0	-19	-4	0	0

