

# ПОТОКИ В СЕТЯХ

## Задача о максимальном потоке

*Сеть* – это ориентированный граф  $G = (V, E)$ , каждому ребру  $(v_i, v_j)$  которого поставлено в соответствие число  $c(v_i, v_j) \geq 0$ , называемое пропускной способностью, а также выделено две вершины  $v_0$  – исток и  $v_{n-1}$  – сток,  $n = |V|$ .

*Поток* – это функция  $f(v_i, v_j)$ ,  $(v_i, v_j) \in E$  обладающая тремя свойствами:

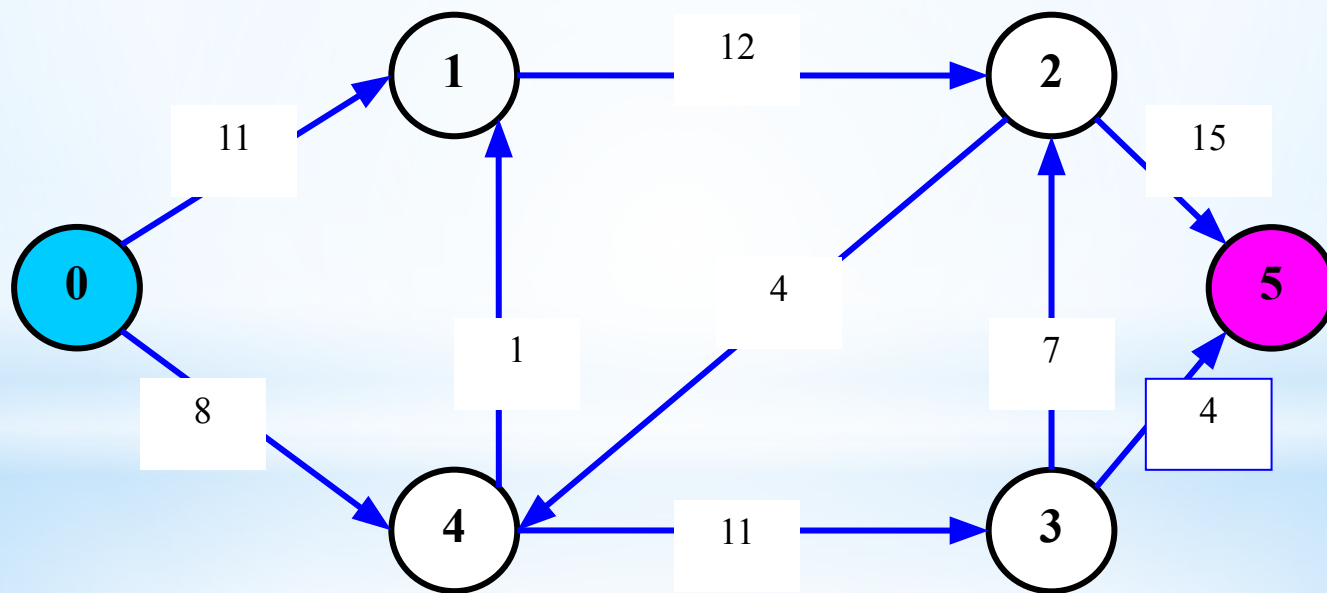
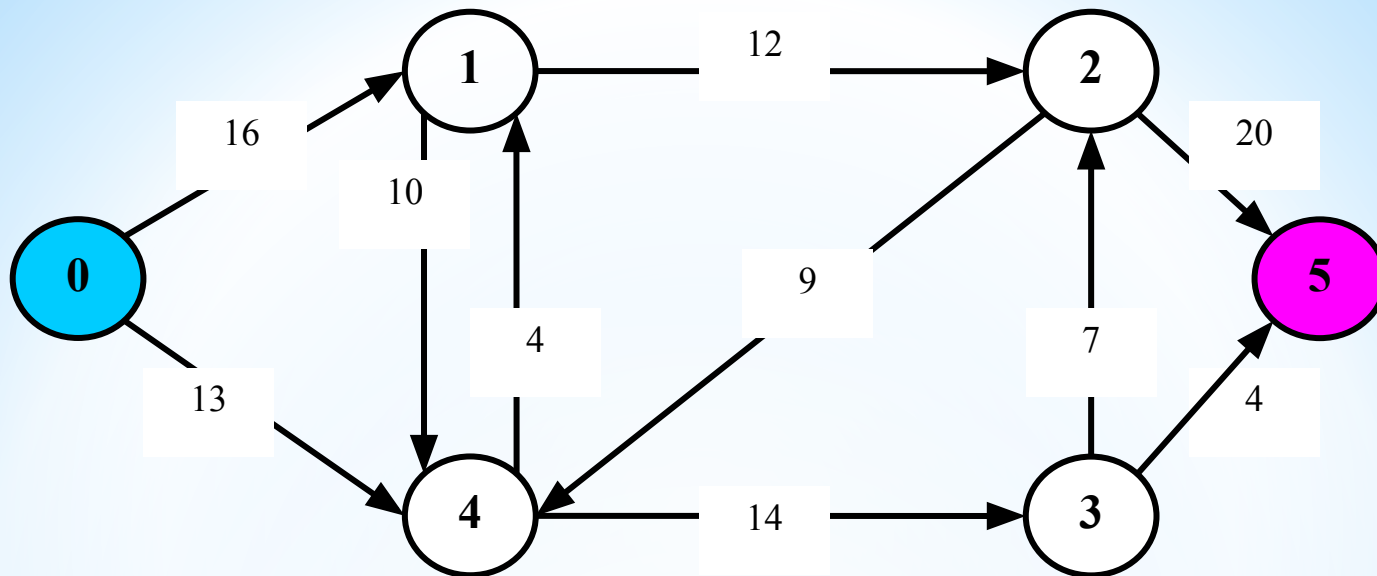
1.  $f(v_i, v_j) \leq c(v_i, v_j)$ ;
2.  $f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i)$  (кососимметричность);
3.  $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0, u \in V - \{v_0, v_{n-1}\}$

*Величина потока*  $f$  это  $|f| = \sum_{v \in V} f(v_0, v_j)$

Примем  $\forall v_i \in V, f(v_i, v_j) \leq 0, f(v_j, v_i) \geq 0$

$\sum_{v_i \in V} f(v_i, v_j)$  - величина *входящего потока* для вершины  $v_j$

$\sum_{v_j \in V} f(v_i, v_j)$  - величина *исходящего потока* для вершины  $v_i$

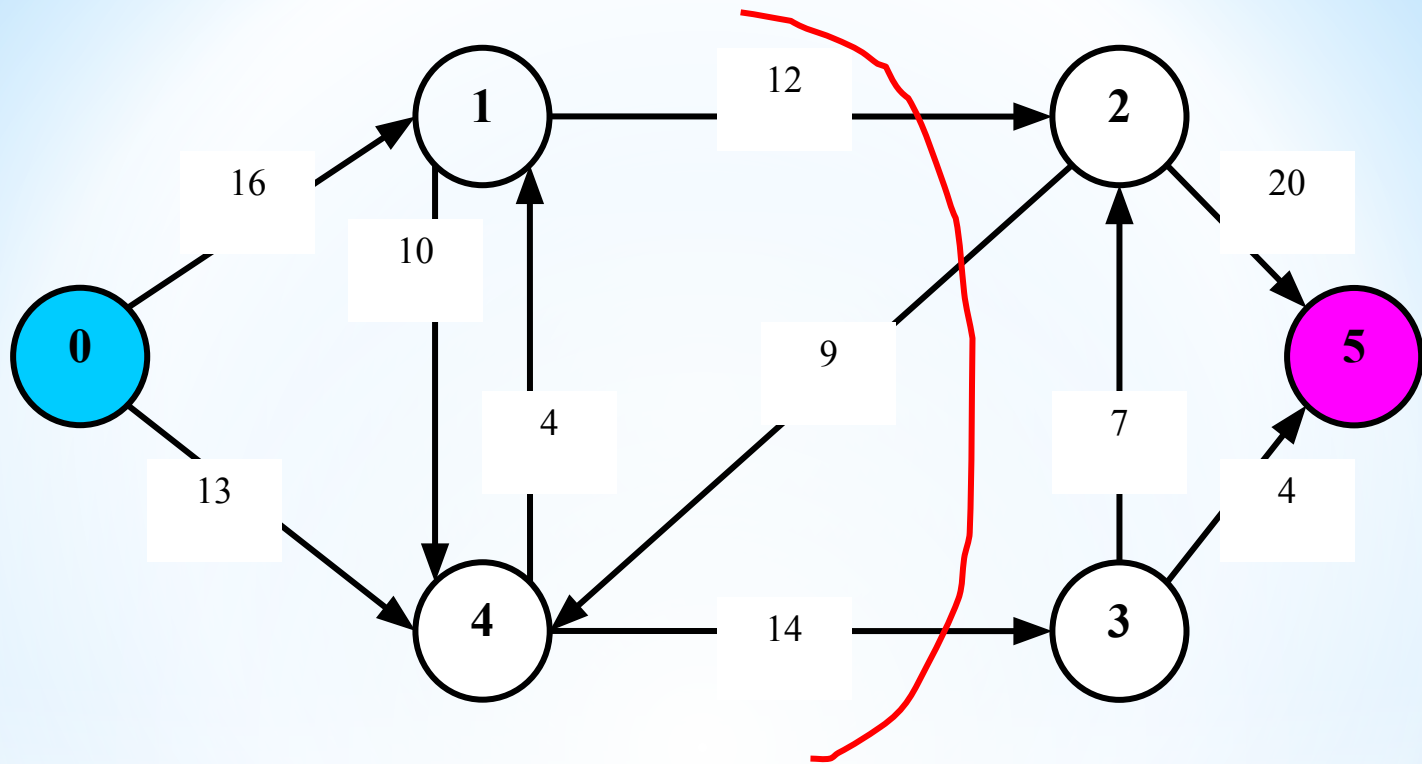


$$|f| = \sum_{v \in V} f(v_0, v_j) = 11 + 8 = 19$$

*Разрез  $(S, T)$  сети  $G = (V, E)$  называется разбиение множества  $V$  на две части  $S$  и  $T$  такое, что  $v_0 \in S, v_{n-1} \in T, S \cup T = V, S \cap T = \emptyset$ .*

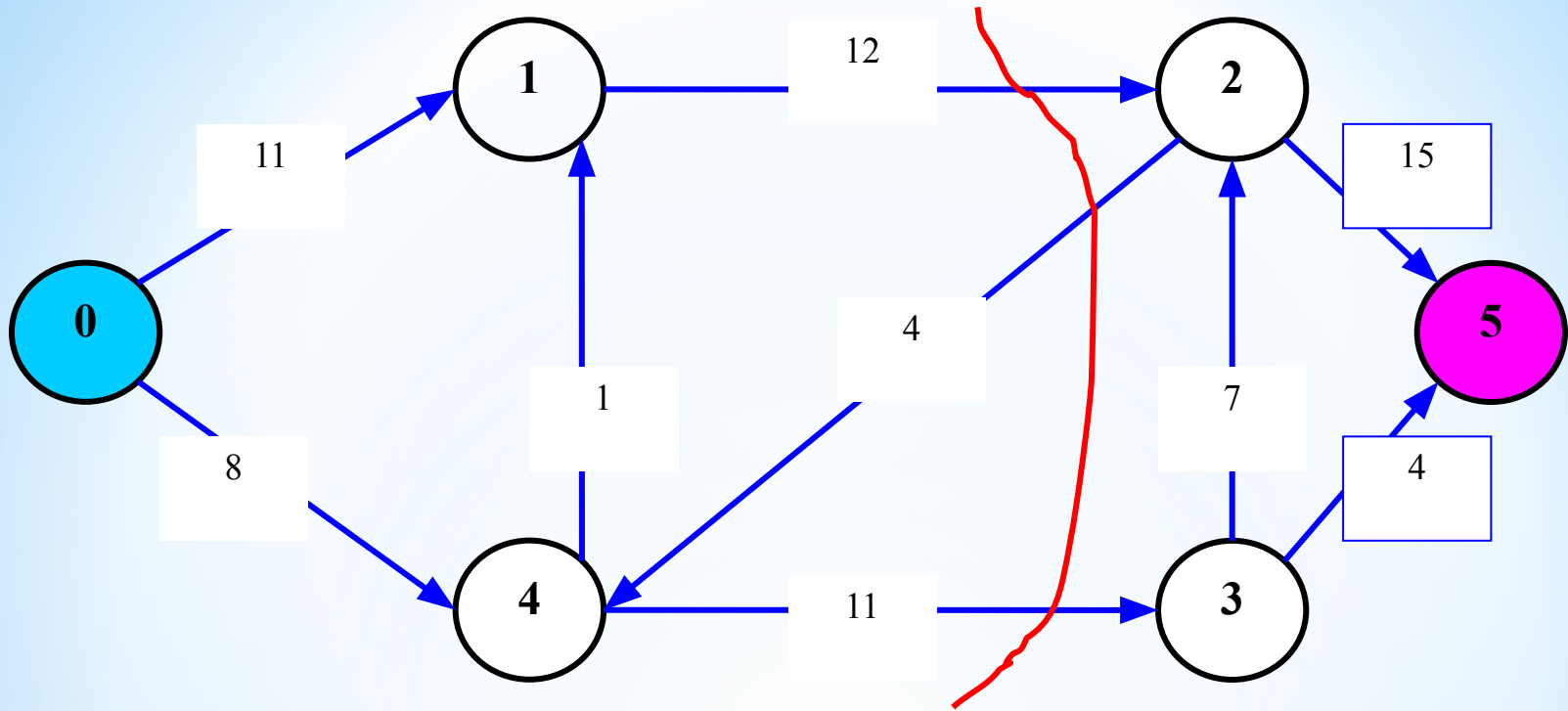
*Пропускная способность разреза  $c(S, T)$  – это сумма пропускных способностей дуг соединяющих вершины в  $S$  и  $T$ .*

*Минимальный разрез сети – это разрез с минимальной пропускной способностью.*



Разрез  $(\{0,1,4\}, \{2,3,5\})$ ,

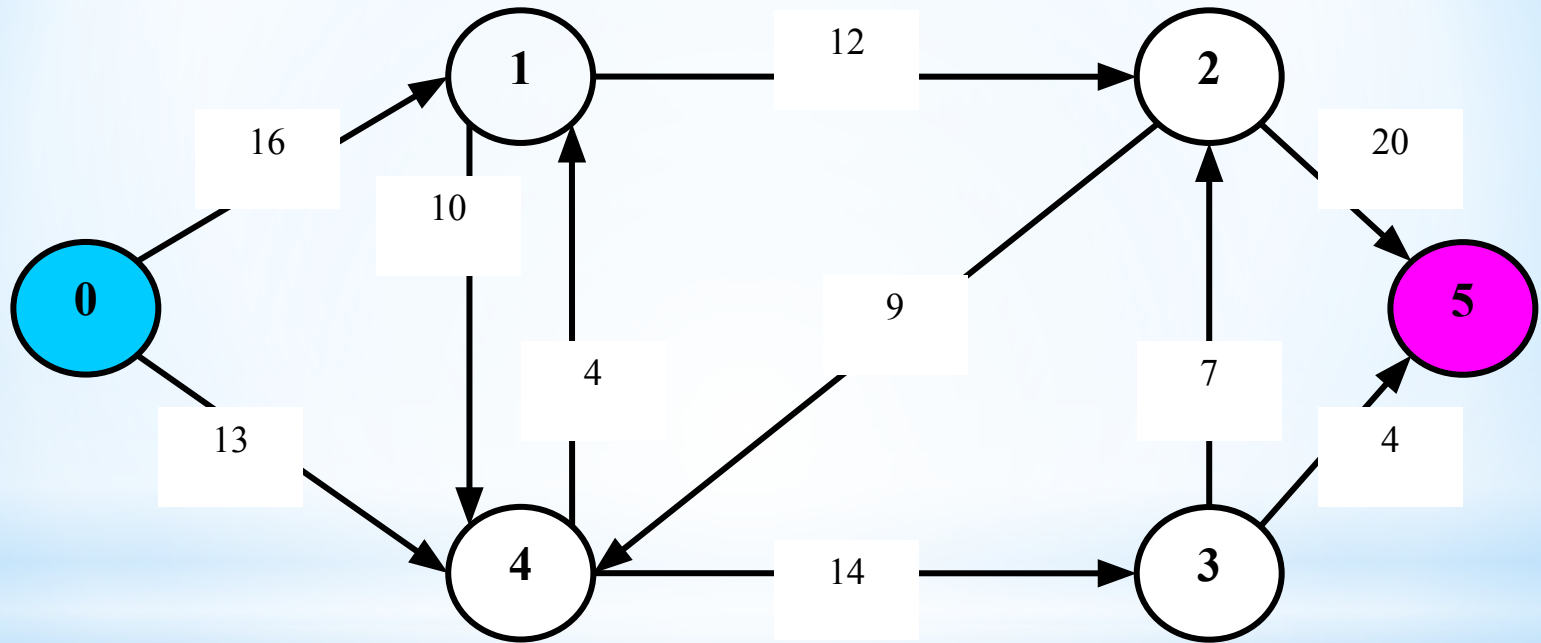
$$c(\{0,1,4\}, \{2,3,5\}) = c(1,2) + c(4,3) = 12 + 14 = 26$$

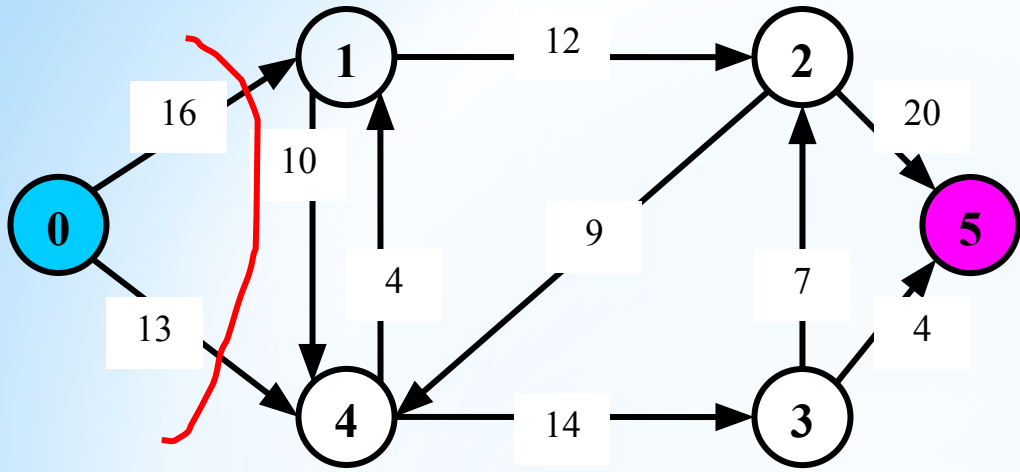


*Поток через разрез  $(\{0,1,4\}, \{2,3,5\})$*

$$f(1,2) + f(4,3) + f(2,4) = 12 + 11 + (-4) = 19$$

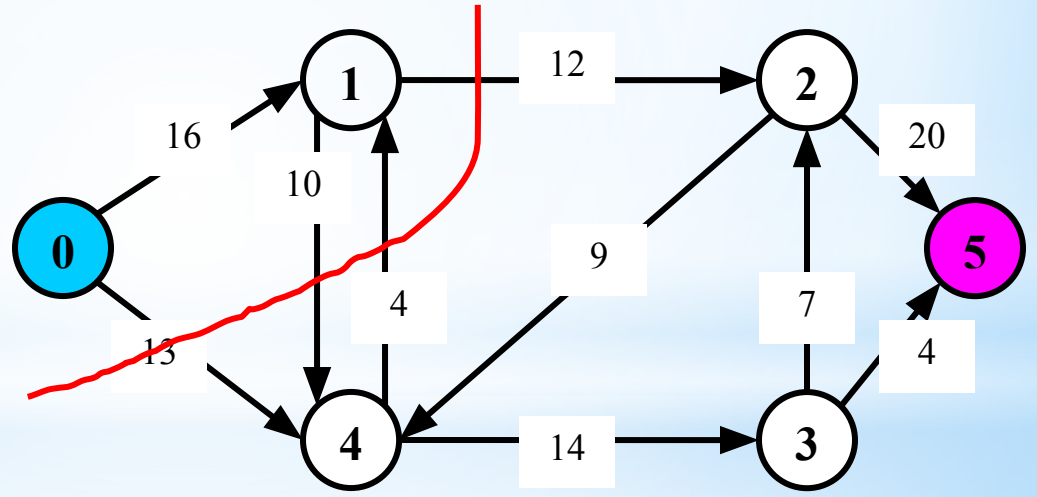
**Теорема Форда-Фалкерсона:** *В любой сети максимальная величина потока из истока  $S$  в сток  $t$  равна минимальной пропускной способности разреза отделяющего  $S$  от  $t$ .*





29

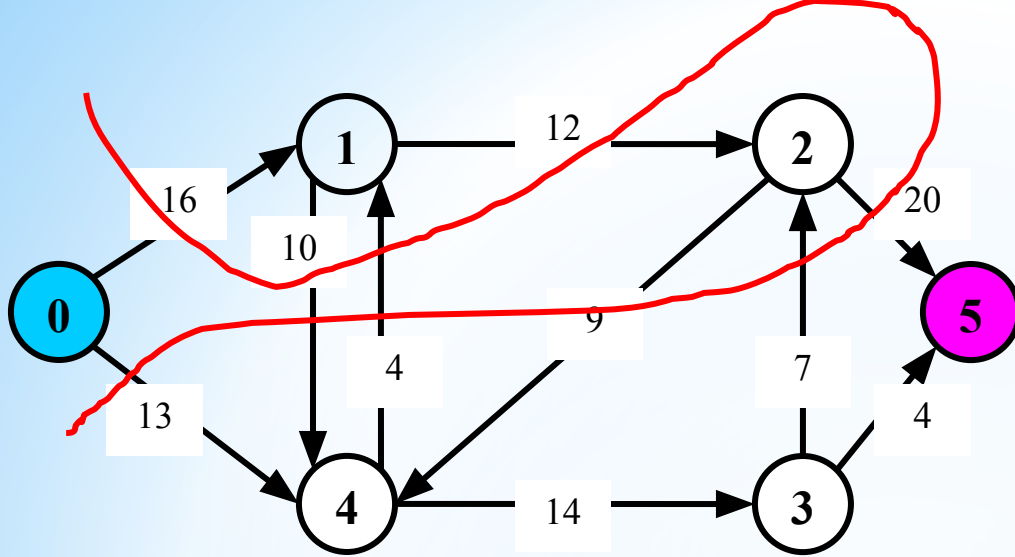
{0}



35

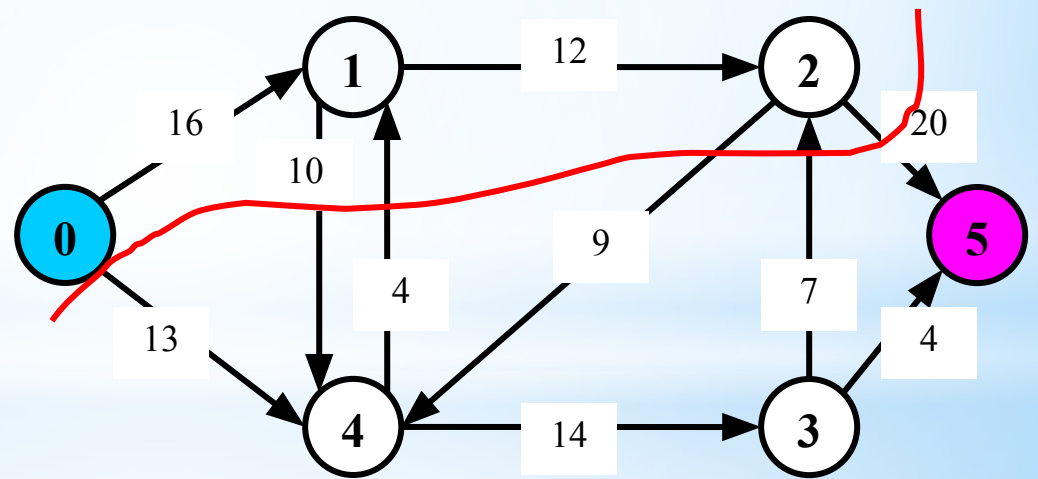
{0,1}





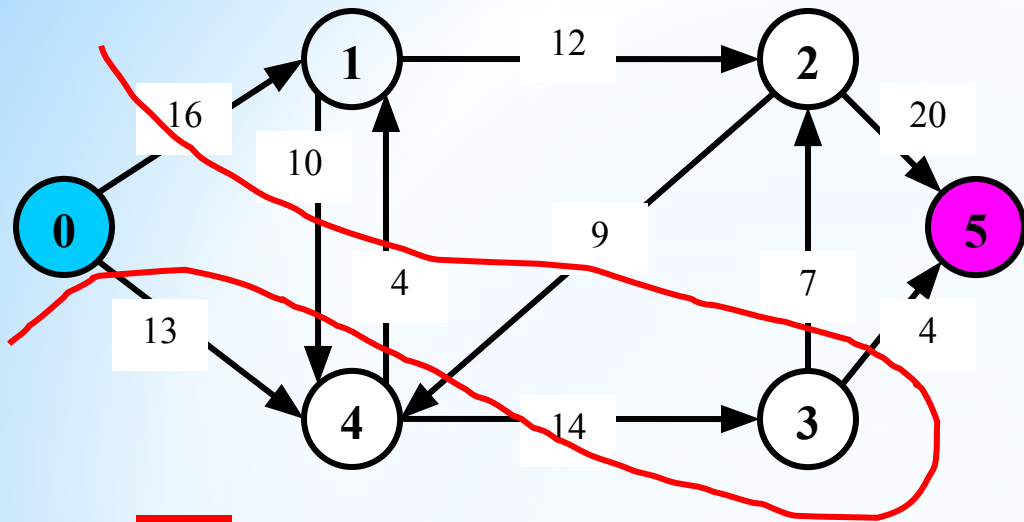
58

{0,2}



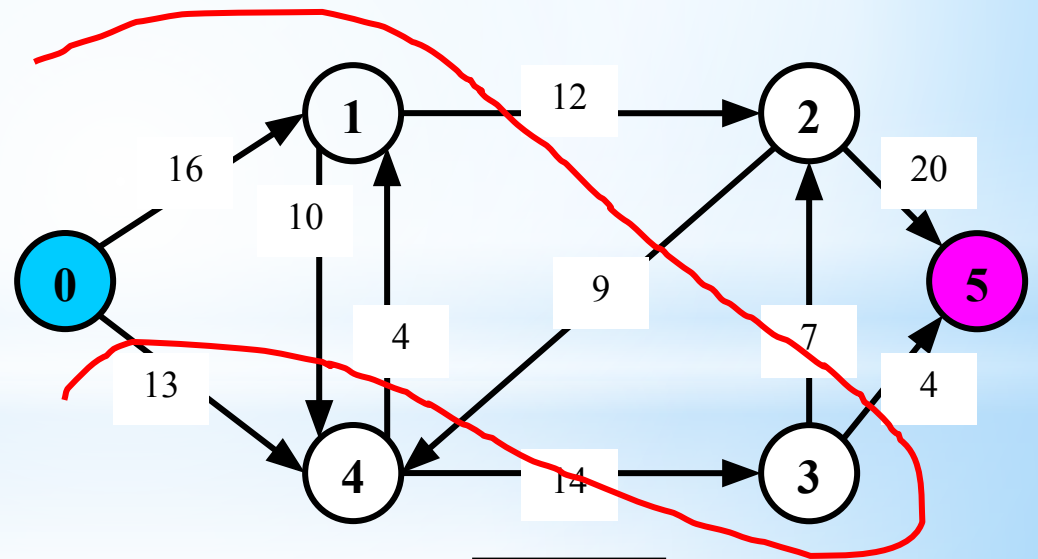
52

{0,1,2}



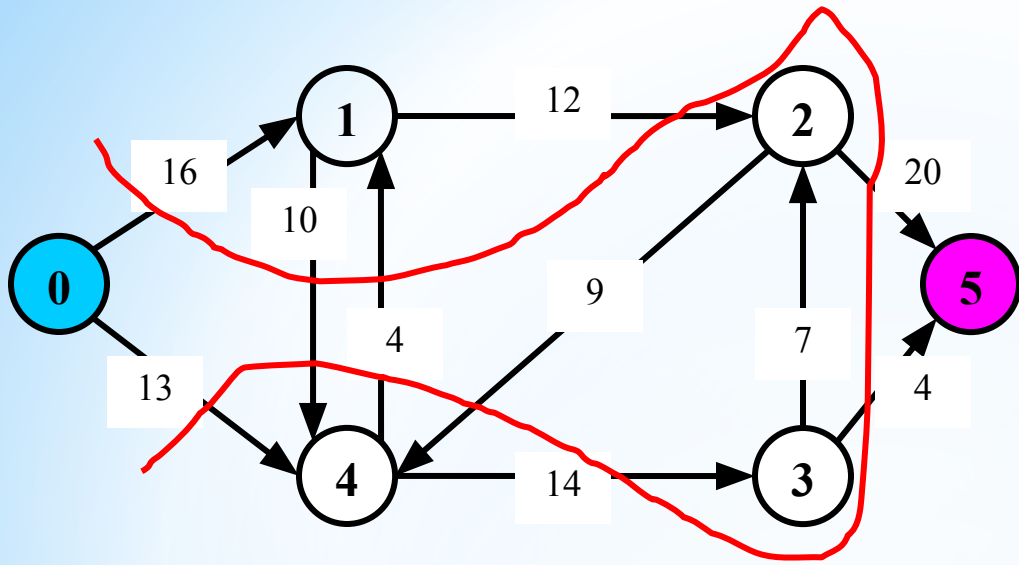
**40**

{0,3}



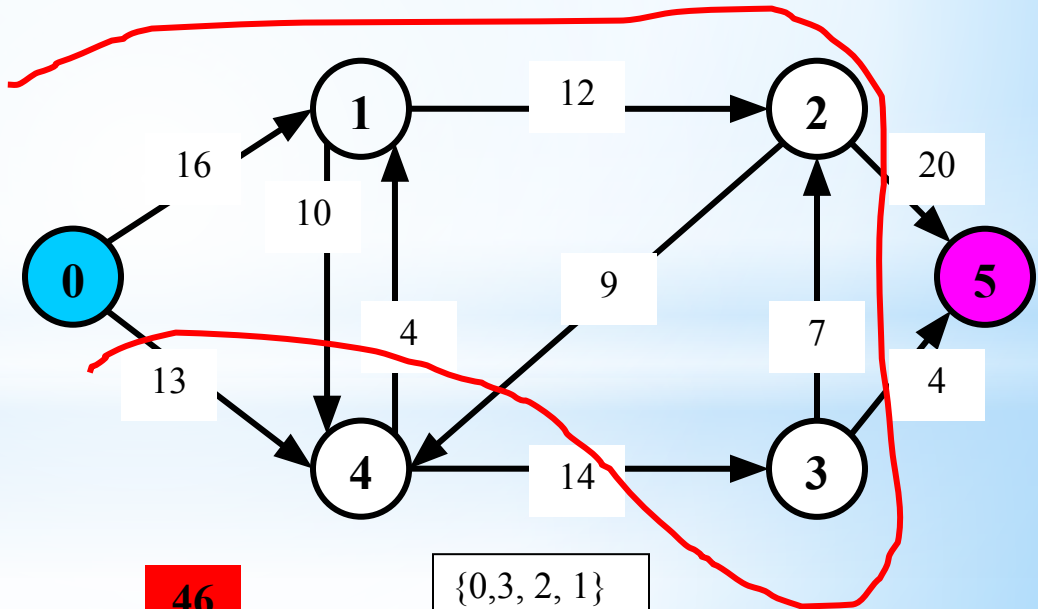
**29**

{0,3,1}



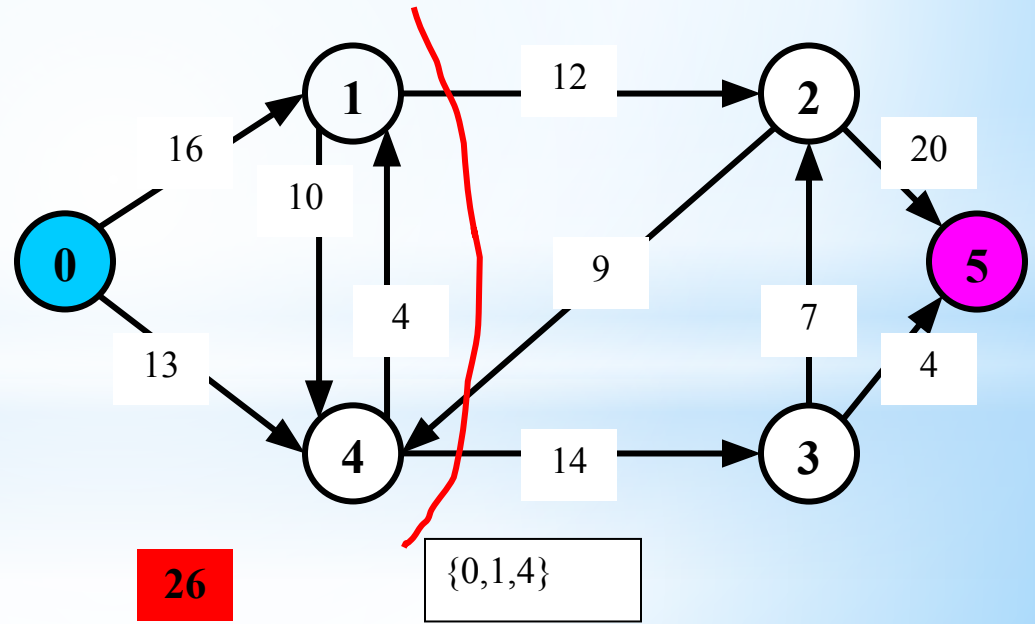
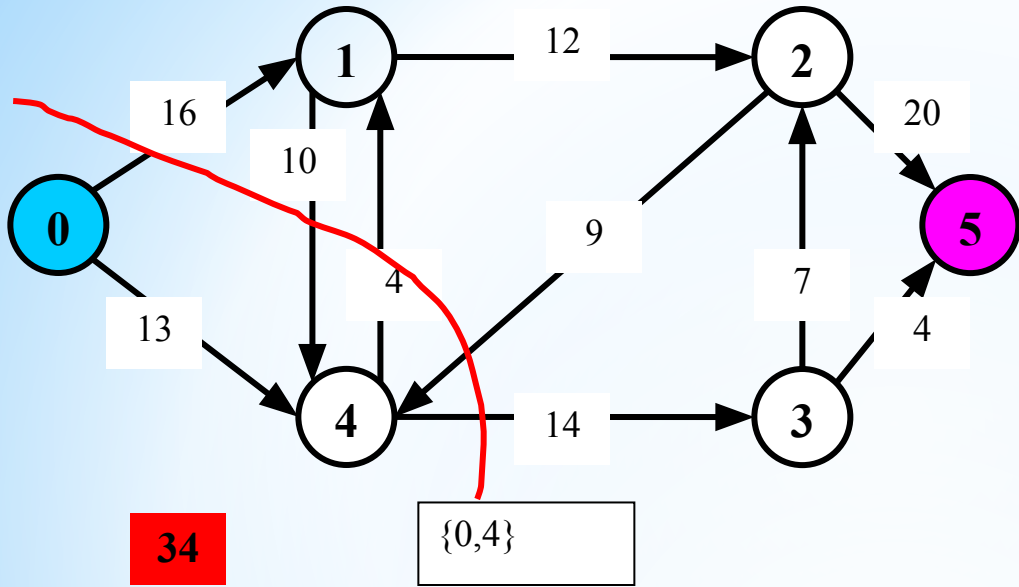
**53**

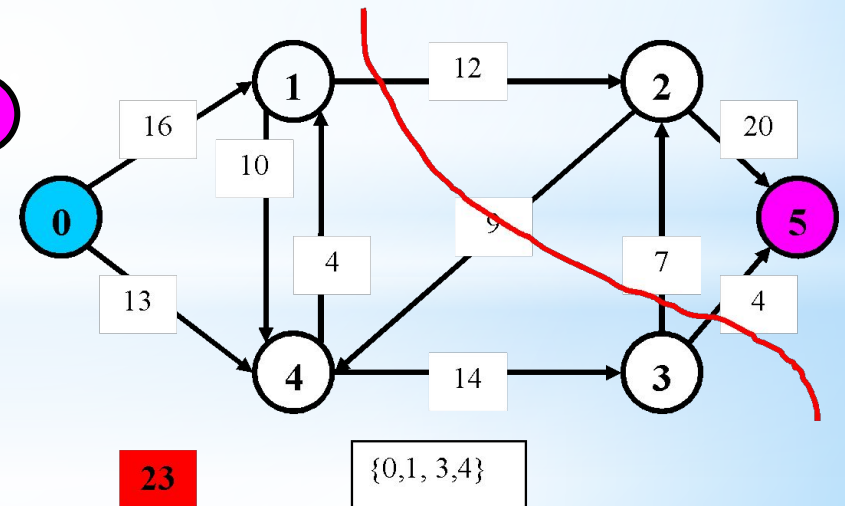
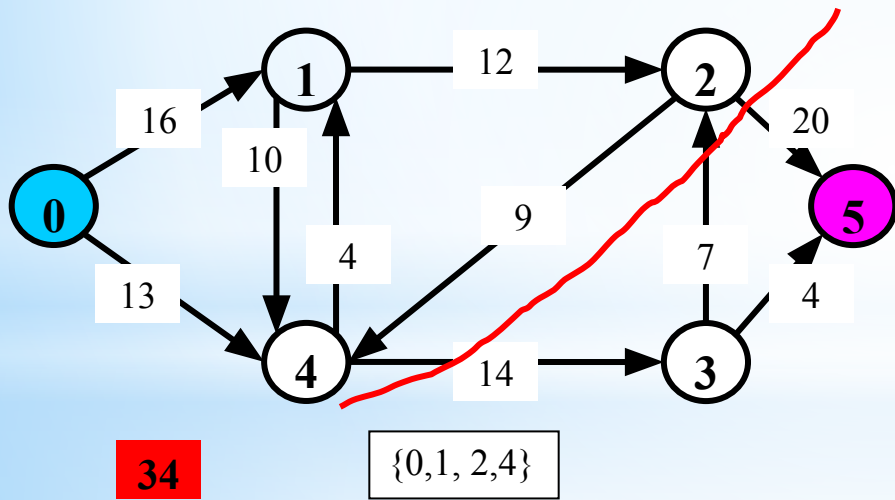
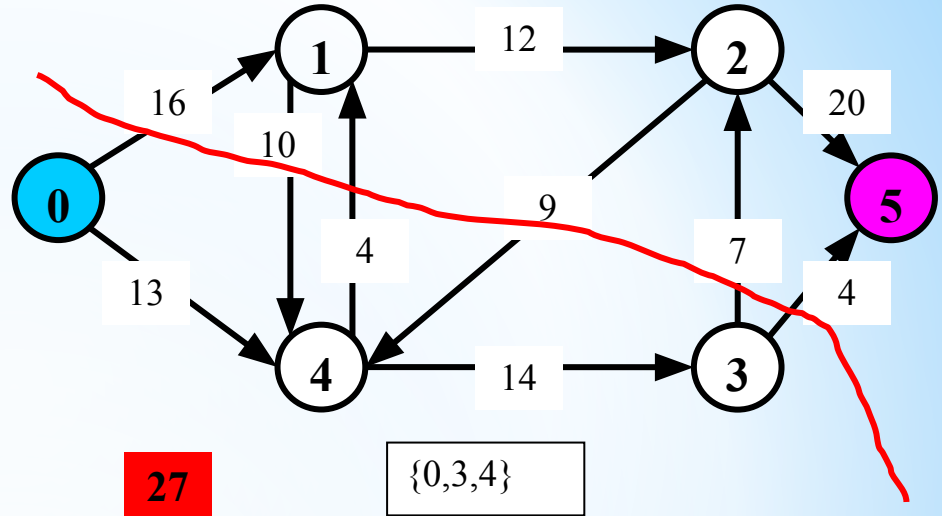
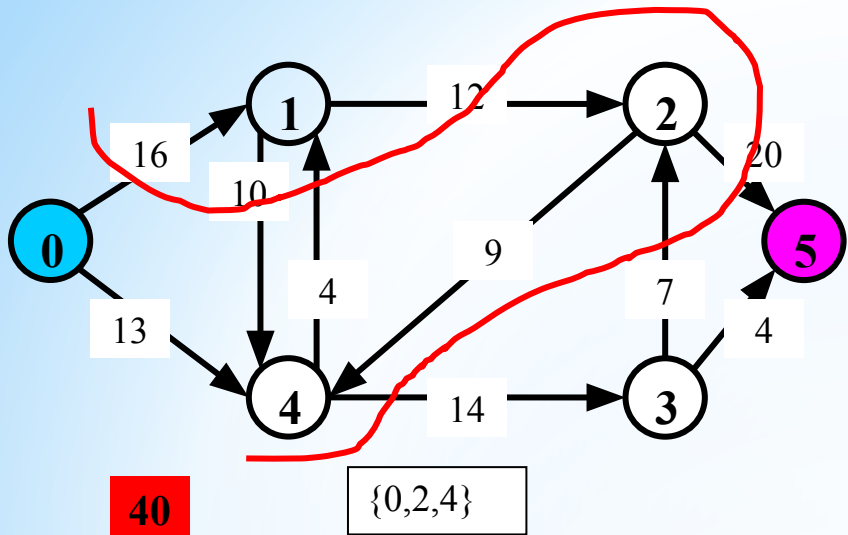
{0,3, 2}

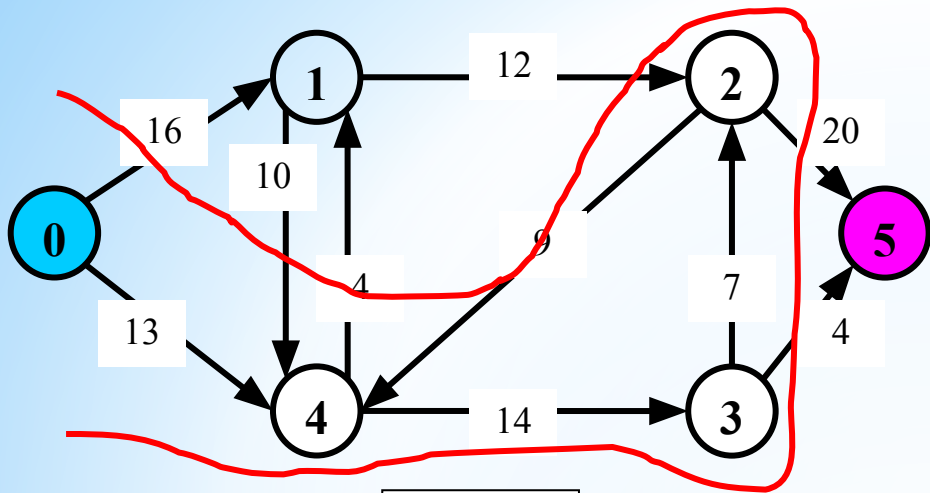


**46**

{0,3, 2, 1}

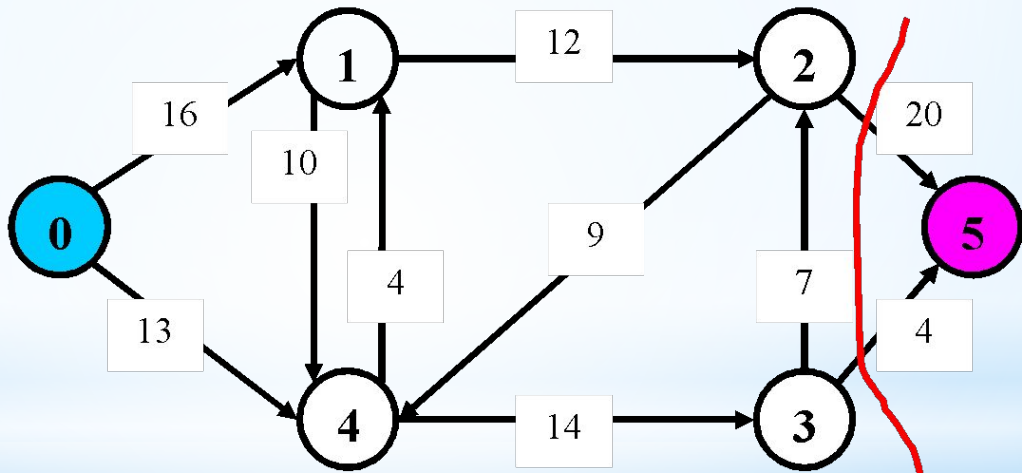






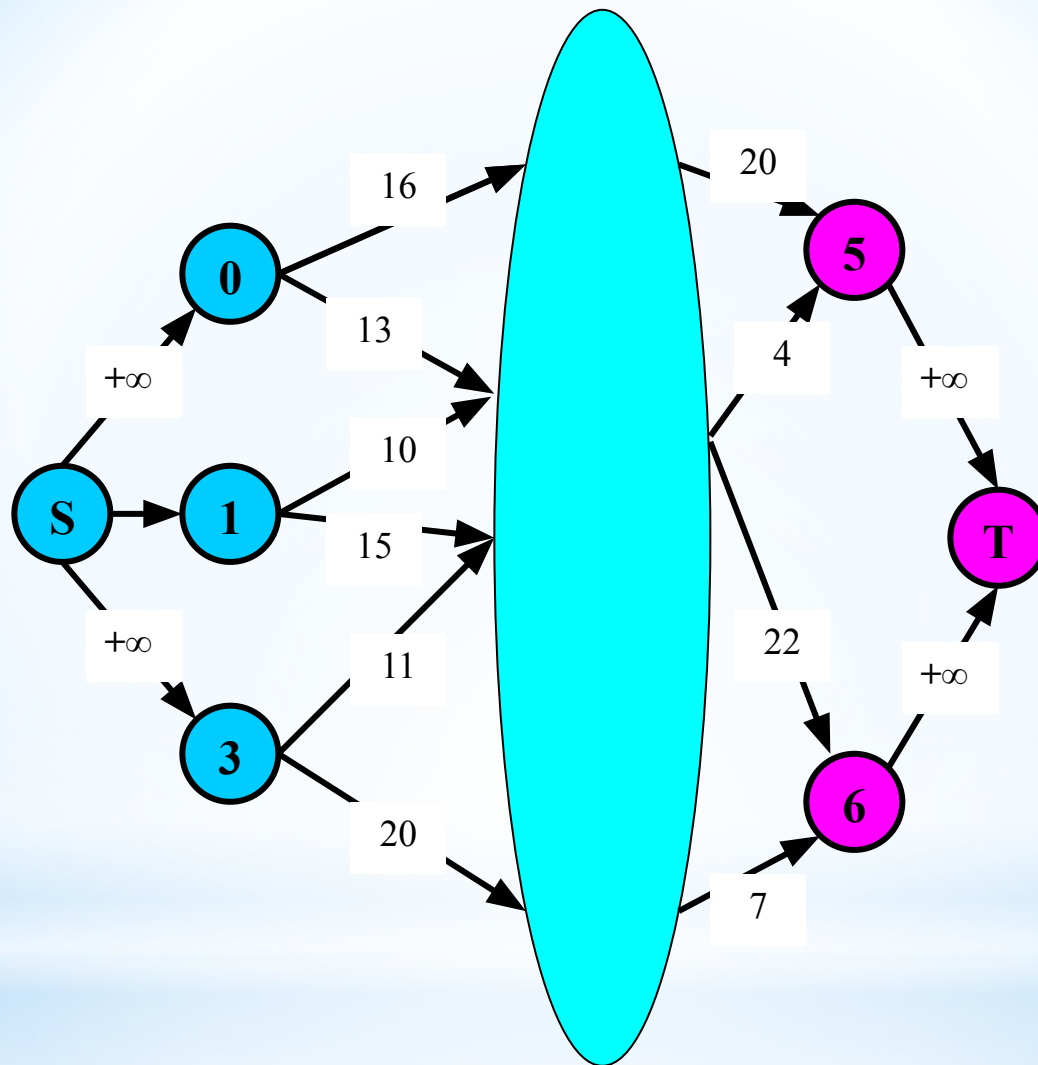
**40**

{0,2,3,4}



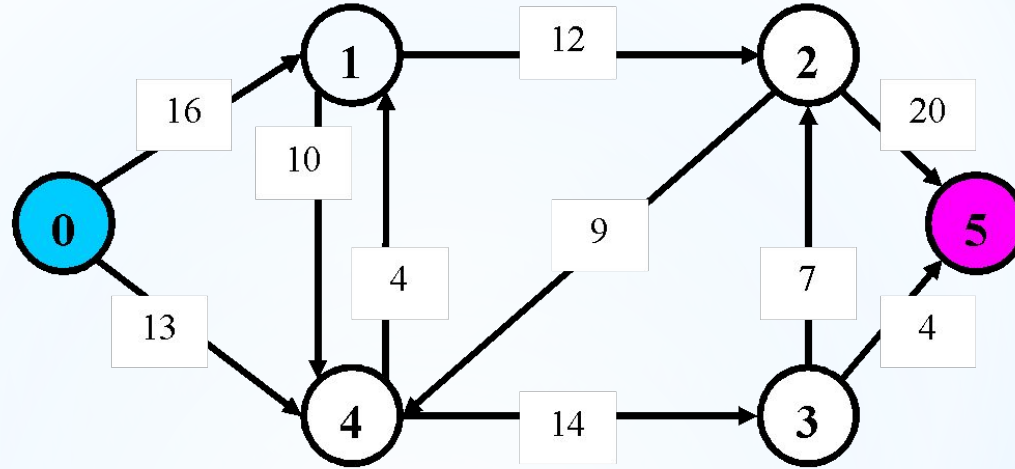
**24**

{0,1,2,3,4}

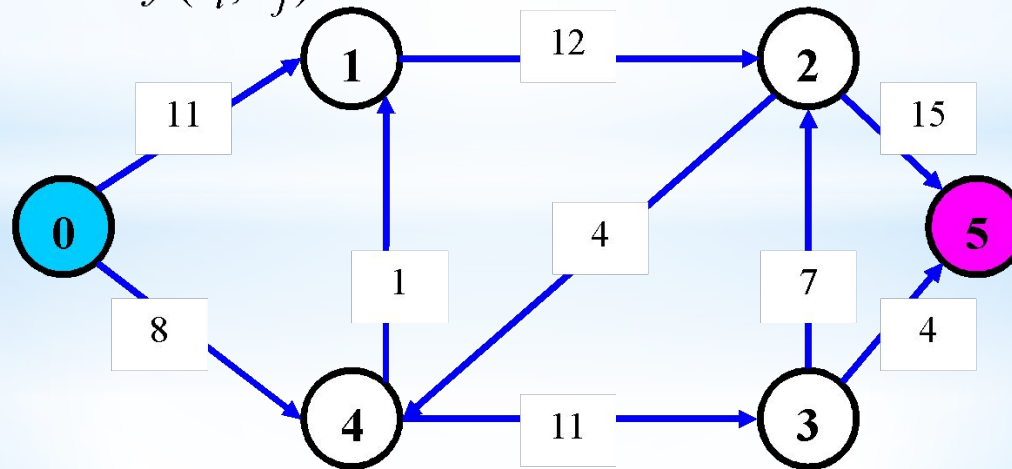


## Понятие остаточной сети

Сеть  $G = (V, E)$ ,  $c(v_i, v_j)$  - пропускная способность дуги



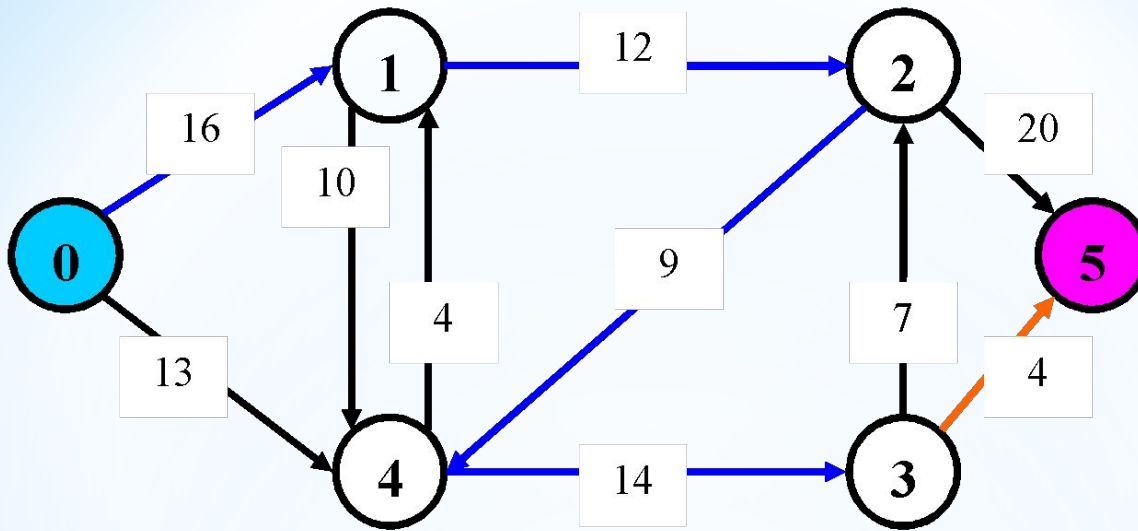
Поток  $f(v_i, v_j)$



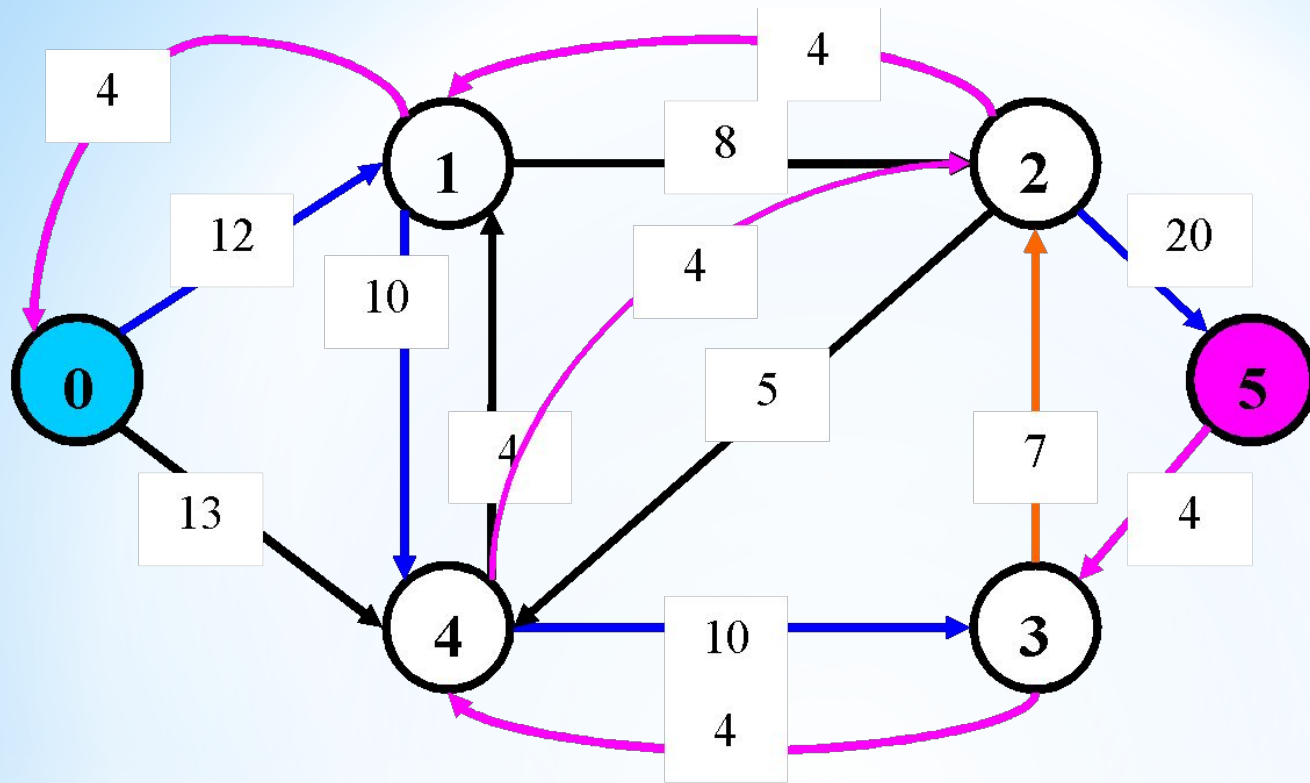


# АЛГОРИТМ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

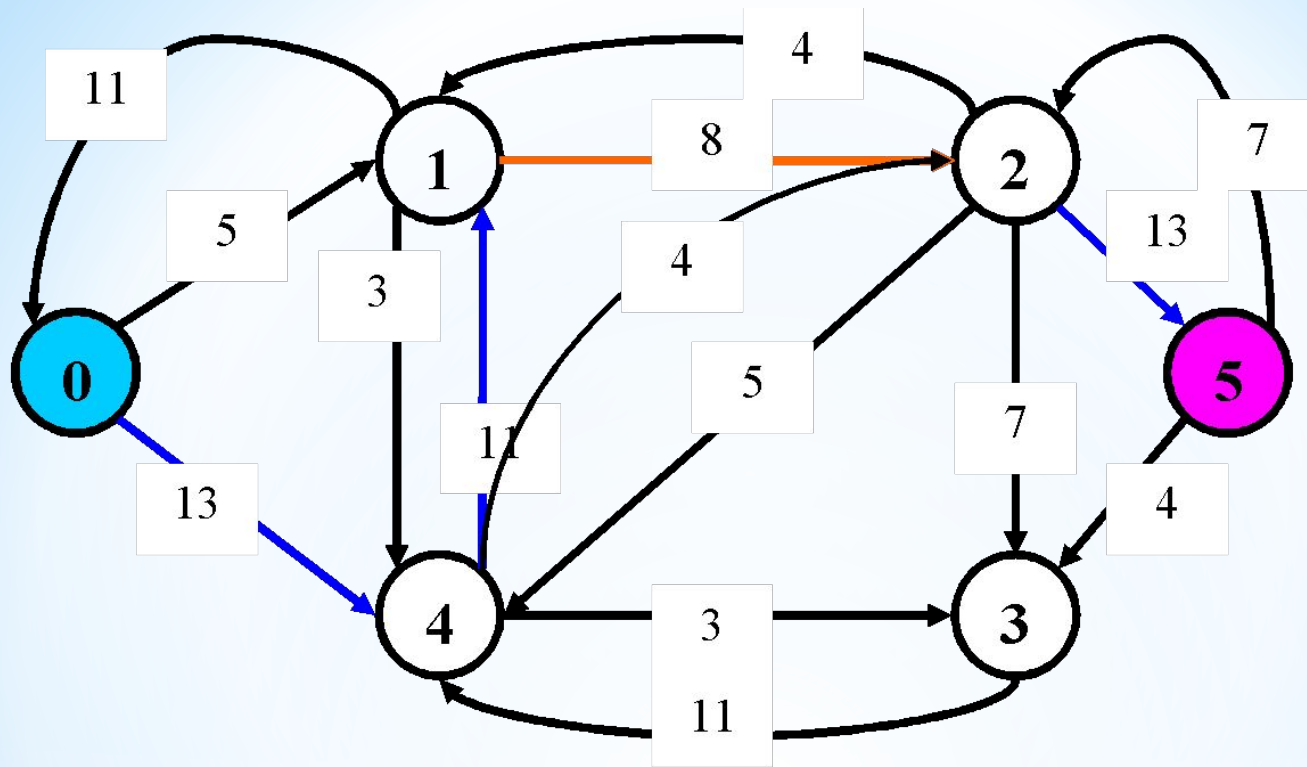
1. Обнуляем все потоки. Остаточная сеть изначально совпадает с исходной сетью.
2. В остаточной сети находим любой путь из источника в сток. Если такого пути нет, останавливаемся.
3. Пускаем через найденный путь (он называется увеличивающим путём или увеличивающей цепью) максимально возможный поток:
  - На найденном пути в остаточной сети ищем ребро с минимальной пропускной способностью  $c_{\min}$ .
  - Для каждого ребра на найденном пути увеличиваем поток на  $c_{\min}$ , а в противоположном ему - уменьшаем на  $c_{\min}$ .
  - Модифицируем остаточную сеть. Для всех рёбер на найденном пути, а также для противоположных им рёбер, вычисляем новую пропускную способность. Если она стала ненулевой, добавляем ребро к остаточной сети, а если обнулилась, стираем его.
4. Возвращаемся на шаг 2.



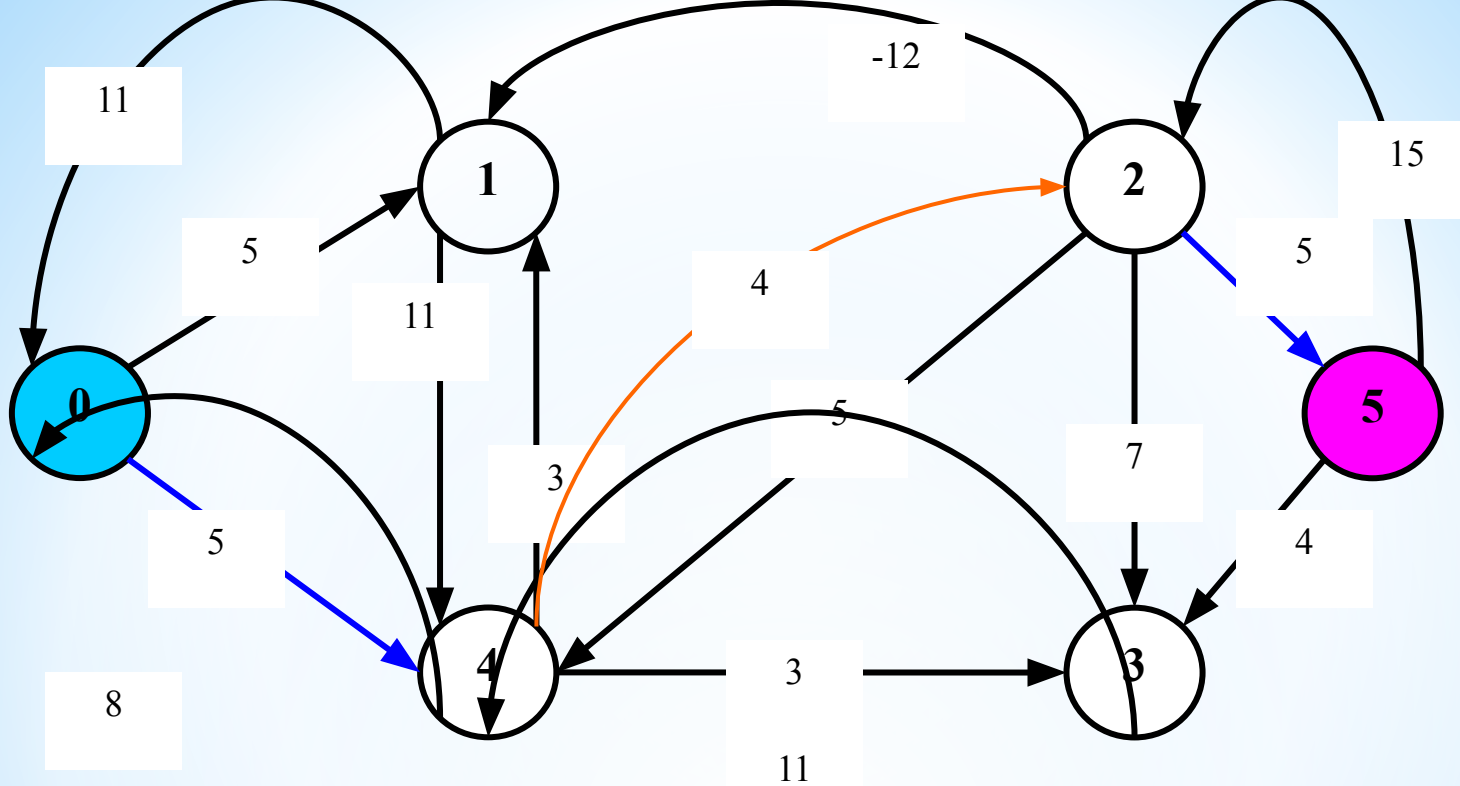
	0	1	2	3	4	5
0	0	4	0	0	0	0
1	-4	0	4	0	0	0
2	0	-4	0	0	4	0
3	0	0	0	0	-4	4
4	0	0	-4	4	0	0
5	0	0	0	-4	0	0



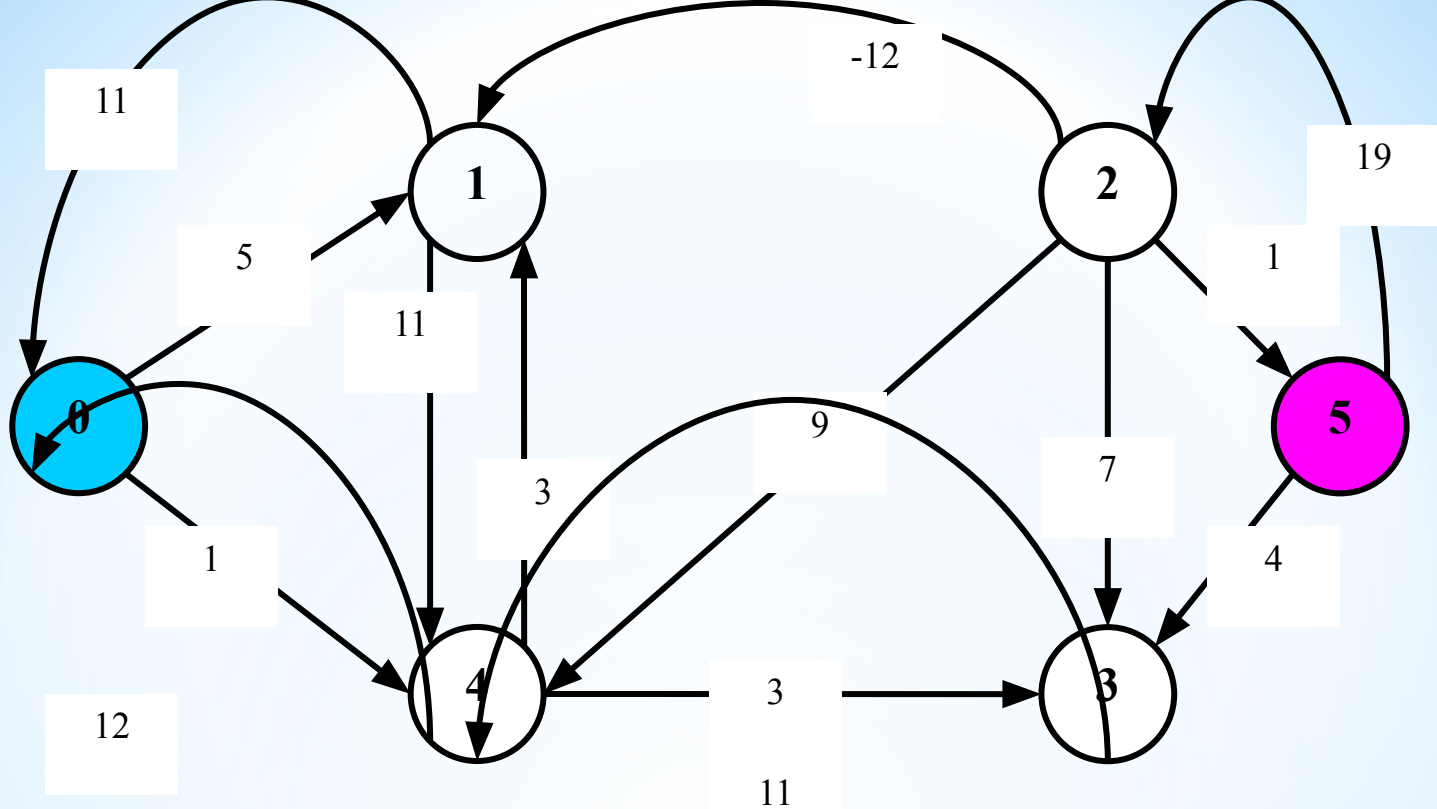
	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	0	0
1	-11	0	4	0	7	0
2	0	-4	0	-7	4	7
3	0	0	7	0	-11	4
4	0	-7	-4	11	0	0
5	0	0	-7	-4	0	0



	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	8	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	4	15
3	0	0	7	0	-11	4
4	-8	1	-4	11	0	0
5	0	0	-15	-4	0	0



	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	12	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	0	19
3	0	0	7	0	-11	4
4	-12	1	-0	11	0	0
5	0	0	-19	-4	0	0



	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	12	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	0	19
3	0	0	7	0	-11	4
4	-12	1	-0	11	0	0
5	0	0	-19	-4	0	0

	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	12	0
1	-11	0	12	0	-1	0
2	0	-12	0	-7	0	19
3	0	0	7	0	-11	4
4	-12	1	-0	11	0	0
5	0	0	-19	-4	0	0

