ПОТОКИ В СЕТЯХ

Задача о максимальном потоке

Сеть – это ориентированный граф $G=(V,E)$, каждому ребру (v_i,v_j) которого поставлено в соответствие число $c(v_i,v_j)\geq 0$, называемое пропускной способностью, а также выделено две вершины v_0 - исток и v_{n-1} - сток, $n=|V|$.

Поток – это функция $f(v_i,v_j)$, $(v_i,v_j)\in E$ обладающая тремя свойствами:

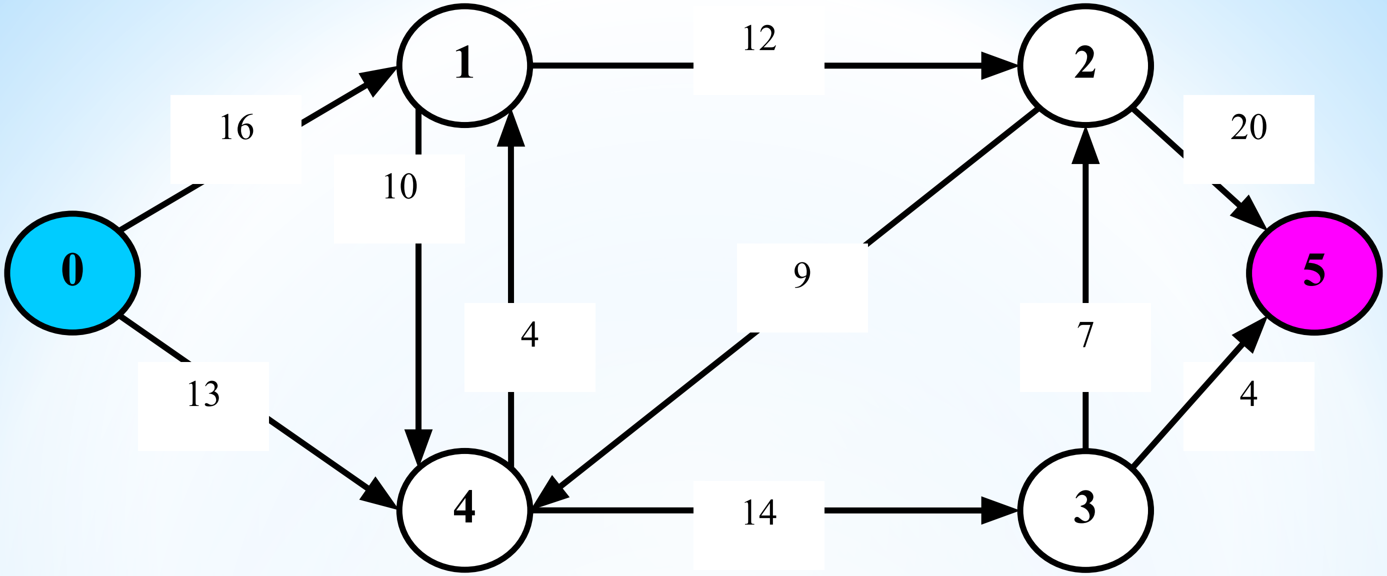
1. $f(v_i,v_j)\leq c(v_i,v_j)$;
2. $f(v_i,v_j)=-f(v_j,v_i)$ (кососимметричность);
3. $\sum\limits_{v\in V} f(u,v)=0,\ u\in V-\{v_0,v_{n-1}\}$

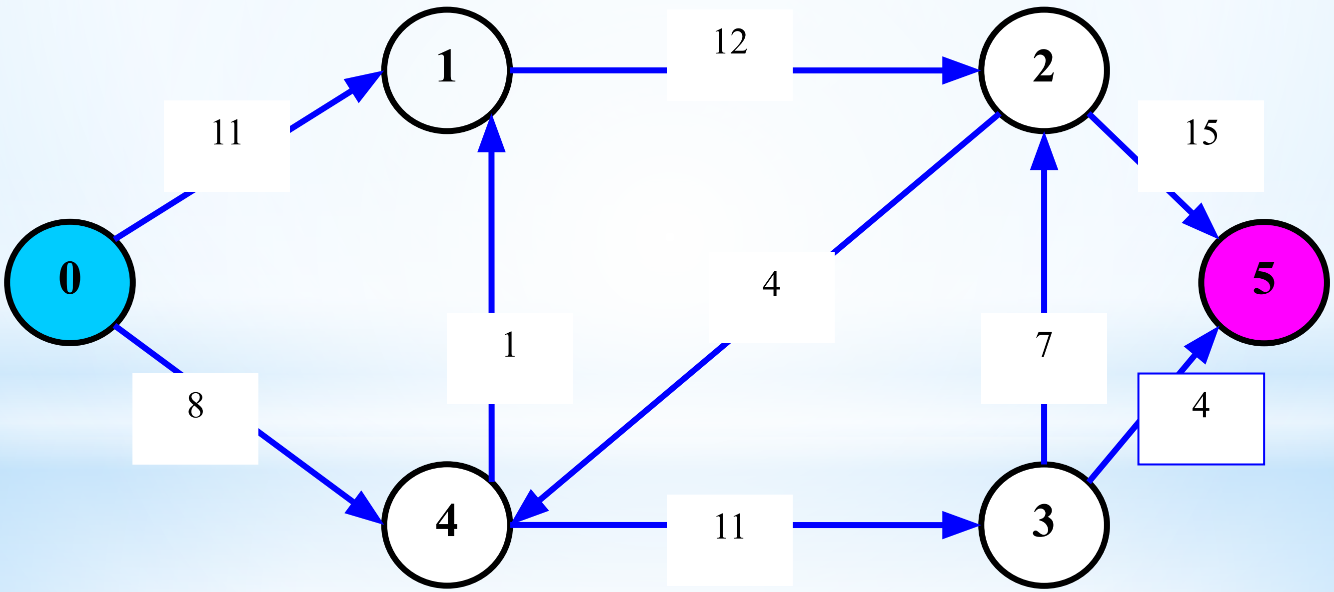
Величина потока f это $\left|f\right| = \sum\limits_{v \in V} f(v_0, v_j)$

Примем $\forall v_i \in V$, $f(v_i, v_j) \le 0$, $f(v_j, v_i) \ge 0$

$\sum\limits_{v_i \in V} f(v_i, v_j)$ - величина ***входящего потока для вершины*** v_j

$\sum\limits_{v_j \in V} f(v_i, v_j)$ - величина ***исходящего потока для вершины*** v_i



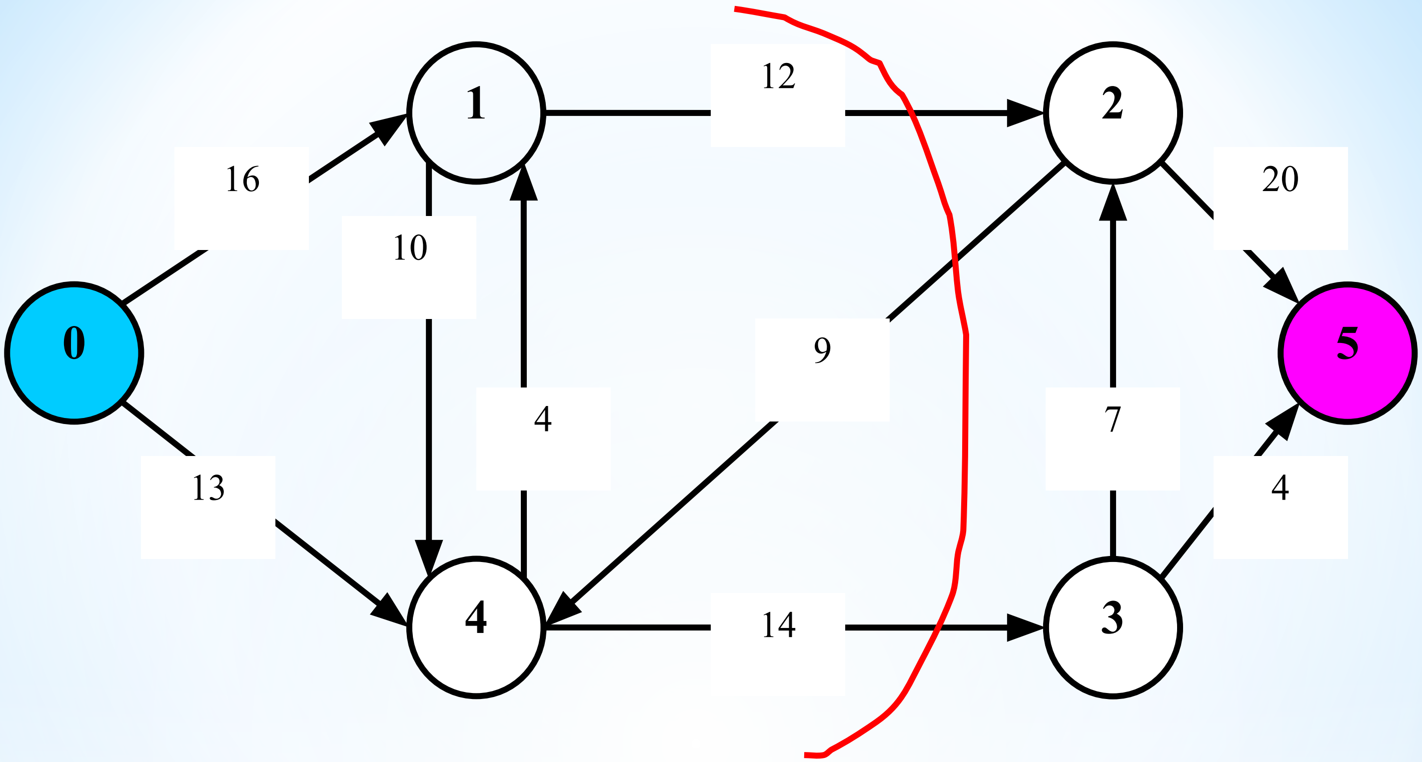


$$\left|f\right| = \sum_{v \in V} f(v_0, v_j) = 11 + 8 = 19$$

Разрез (S,T) ***сети*** $G=(V,E)$ называется разбиение множества V на две части S и T такое, что $v_0 \in S$, $v_{n-1} \in T$, $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$.

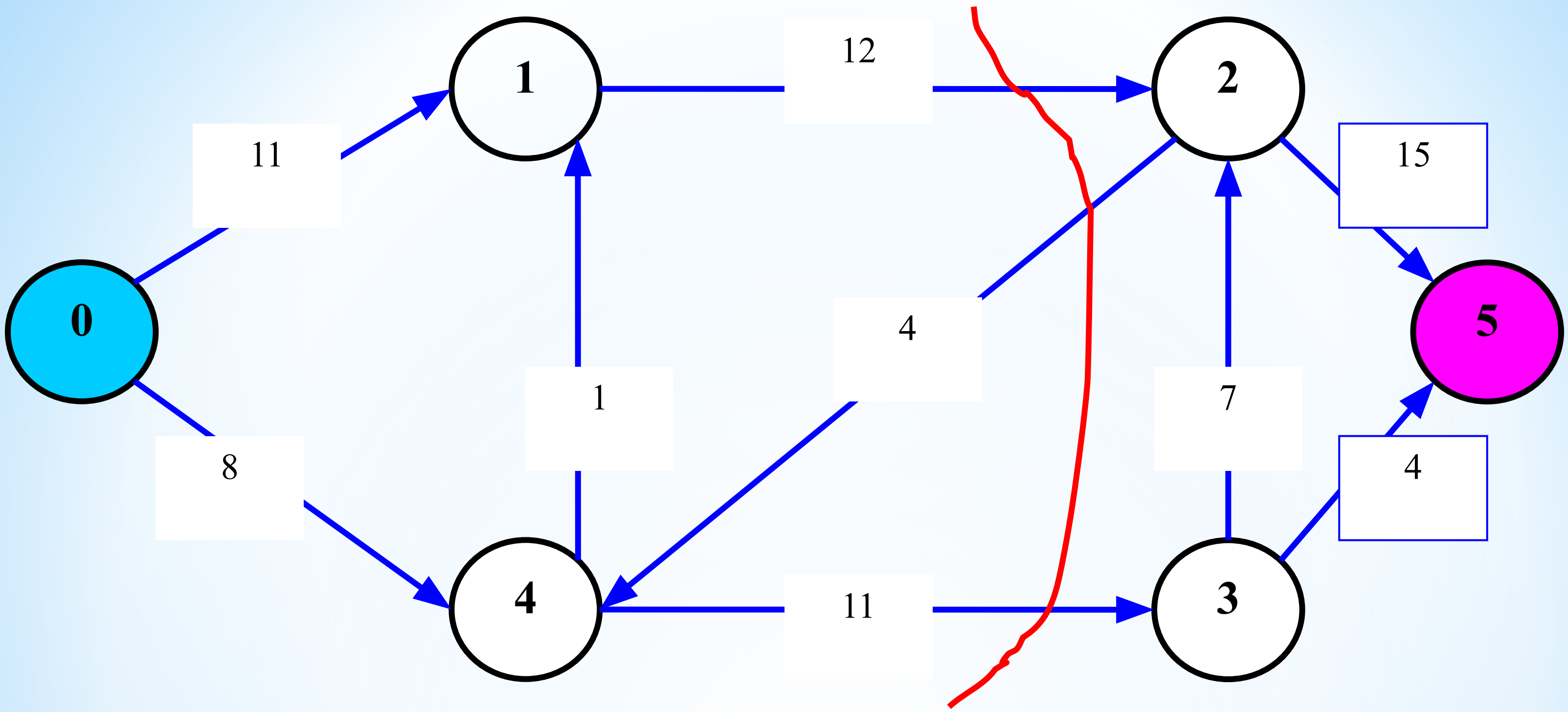
Пропускная способность разреза $c(S,T)$ – это сумма пропускных способностей дуг соединяющих вершины в S и T.

Минимальный разрез сети – это разрез с минимальной пропускной способностью.



Разрез $(\{0,1,4\},\{2,3,5\})$,

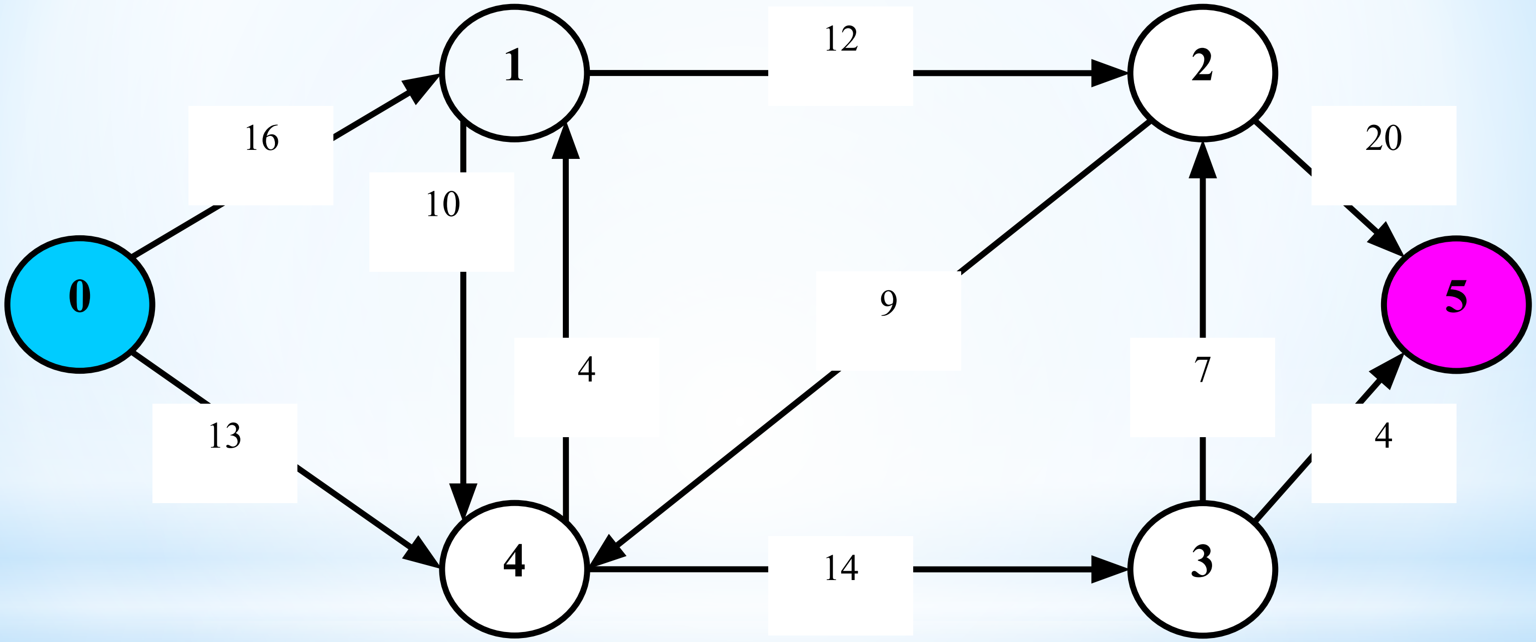
$$c(\{0,1,4\},\{2,3,5\}) = c(1,2) + c(4,3) = 12 + 14 = 26$$

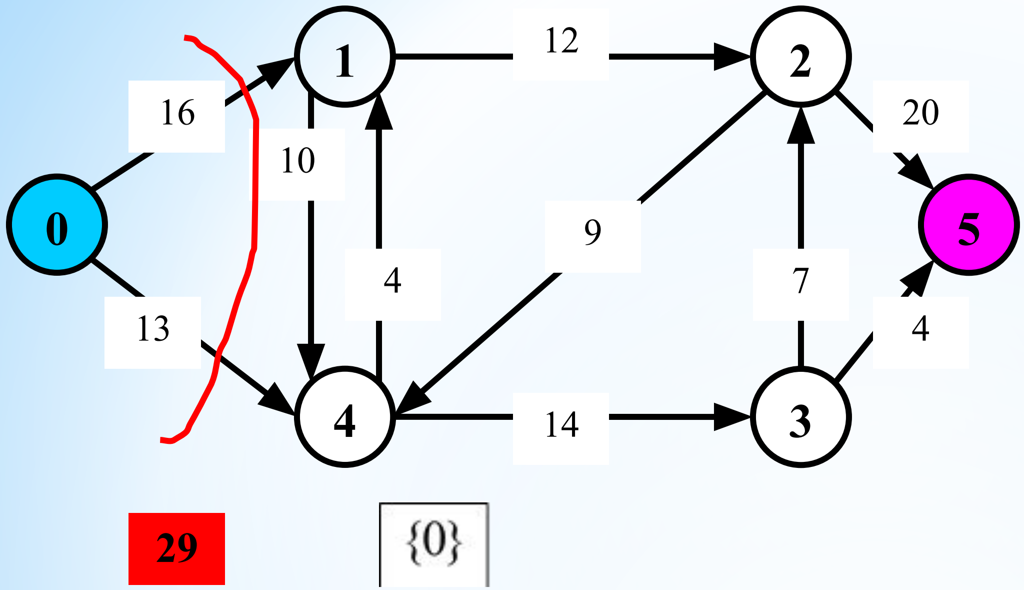


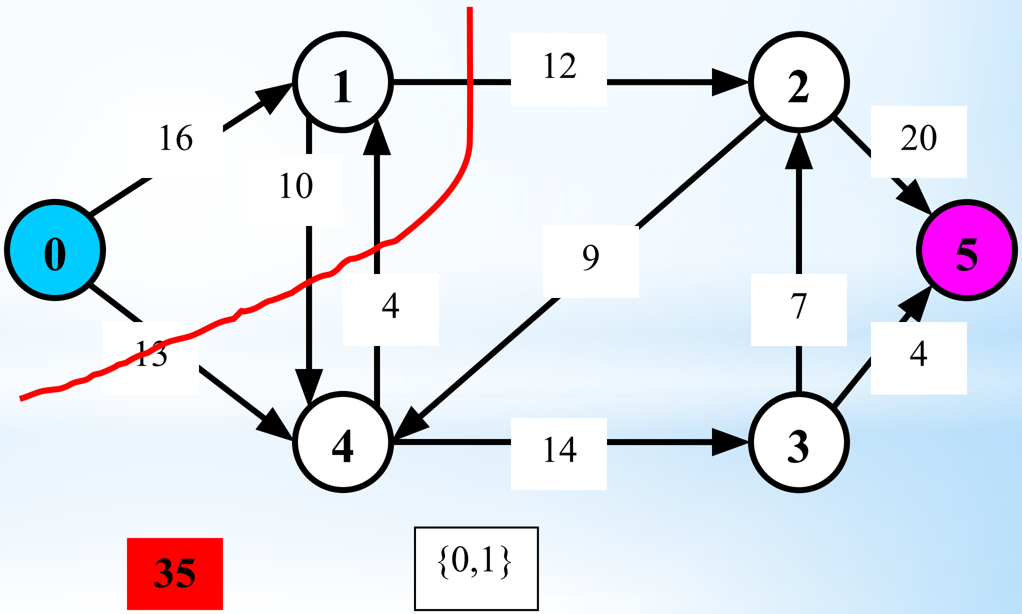
Поток через разрез $(\{0,1,4\},\{2,3,5\})$

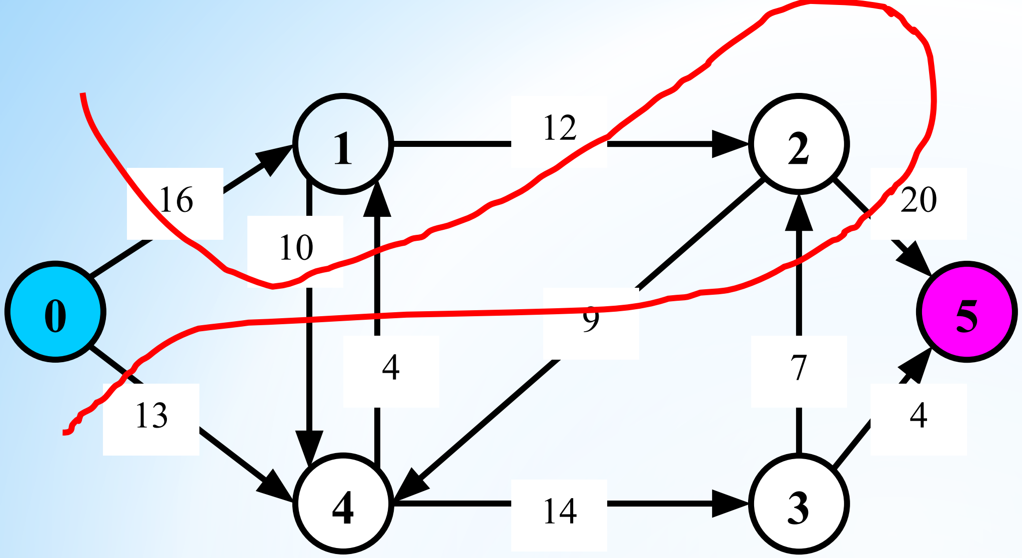
$$f(1,2)+f(4,3)+f(2,4)=12+11+(-4)=19$$

Теорема Форда-Фалкерсона: ***В любой сети максимальная величина потока из истока s в сток t равна минимальной пропускной способности разреза отделяющего s от t.***



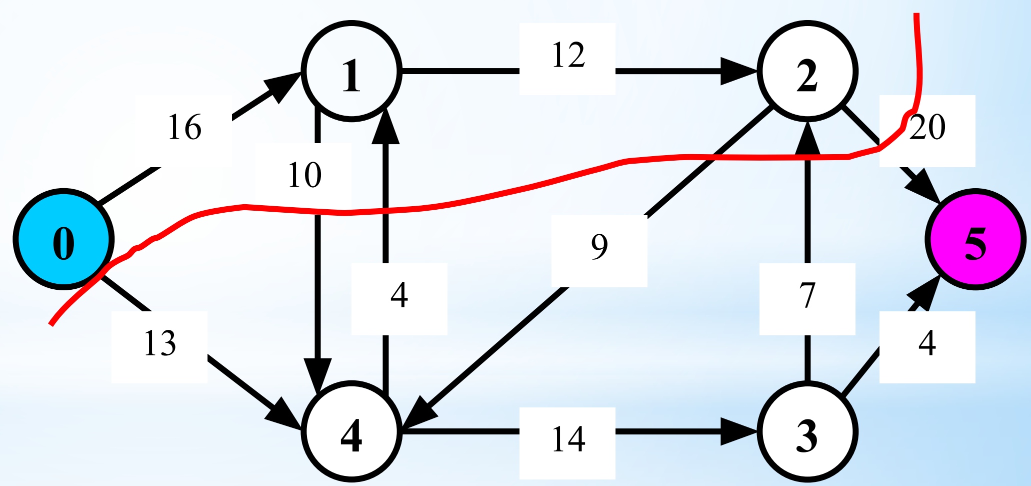

0
1
2
3
4
5
16
13
10
4
12
9
14
7
20
4
29
{0}


0
1
2
3
4
5
16
13
10
4
12
9
14
7
20
4
35
{0,1}



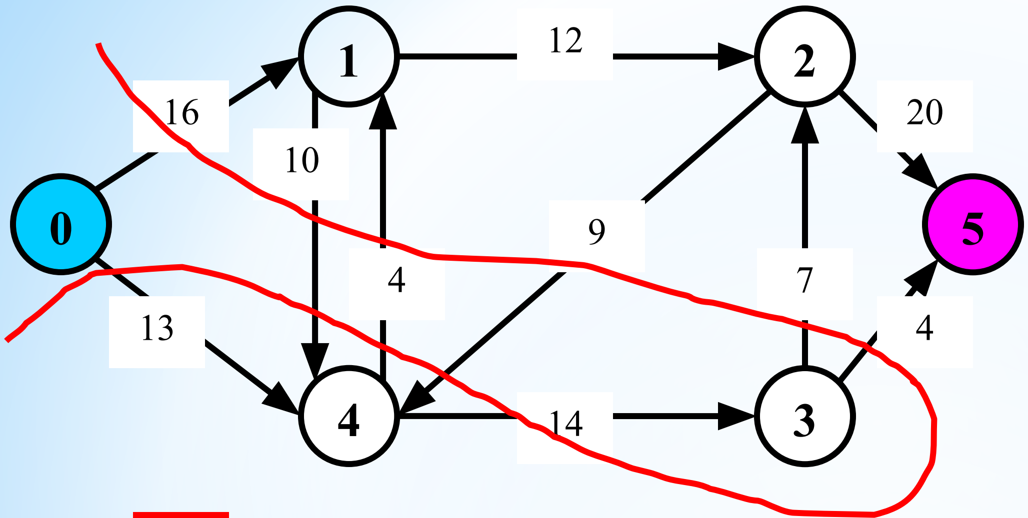
58

{0,2}



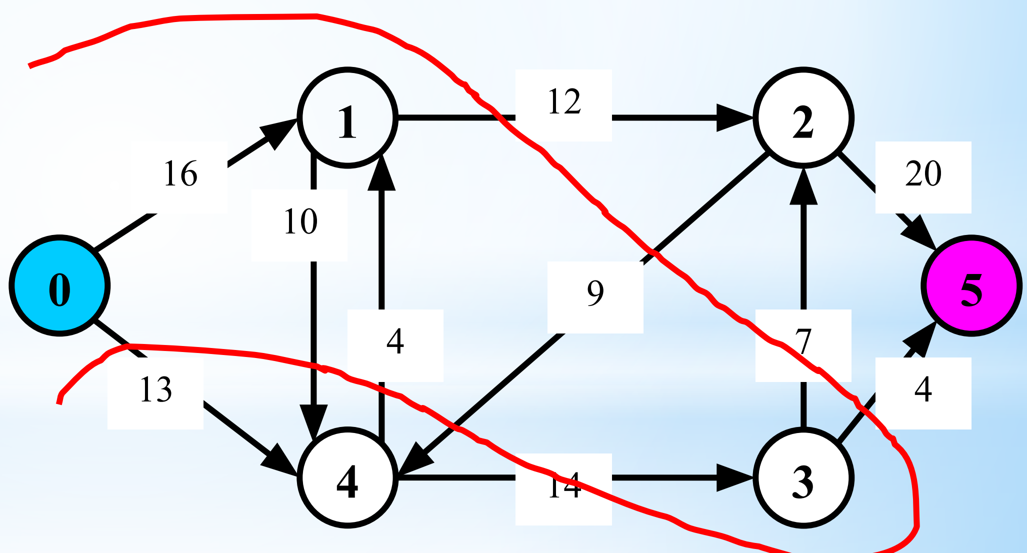
52

{0,1,2}



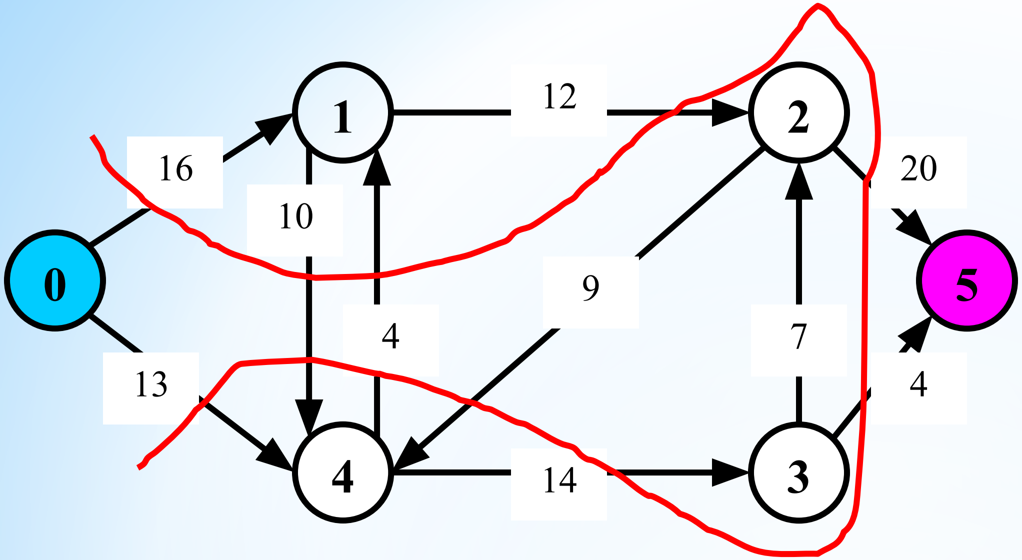
40

{0,3}



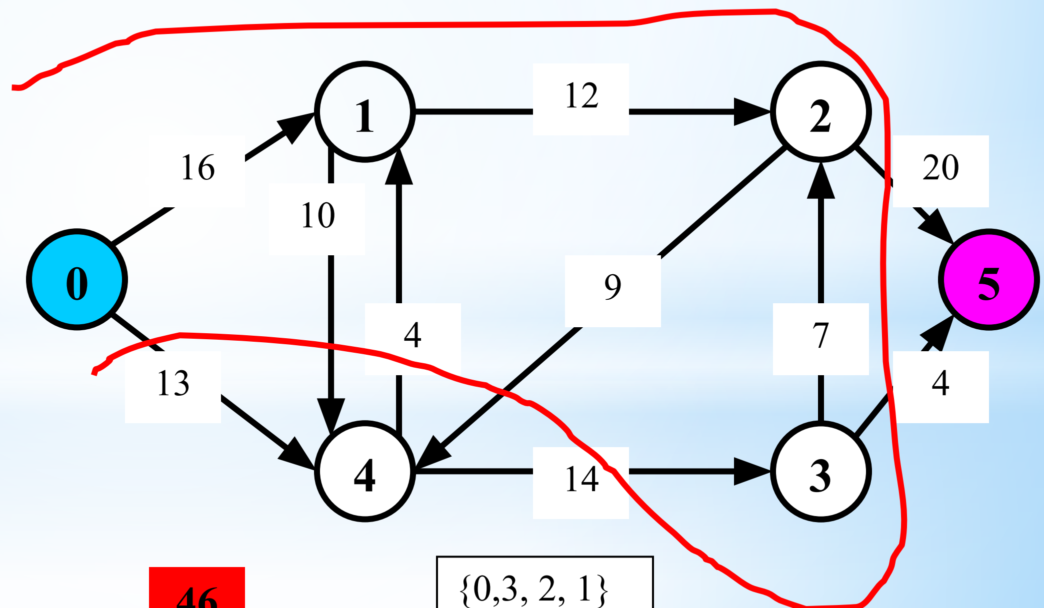
29

{0,3, 1}



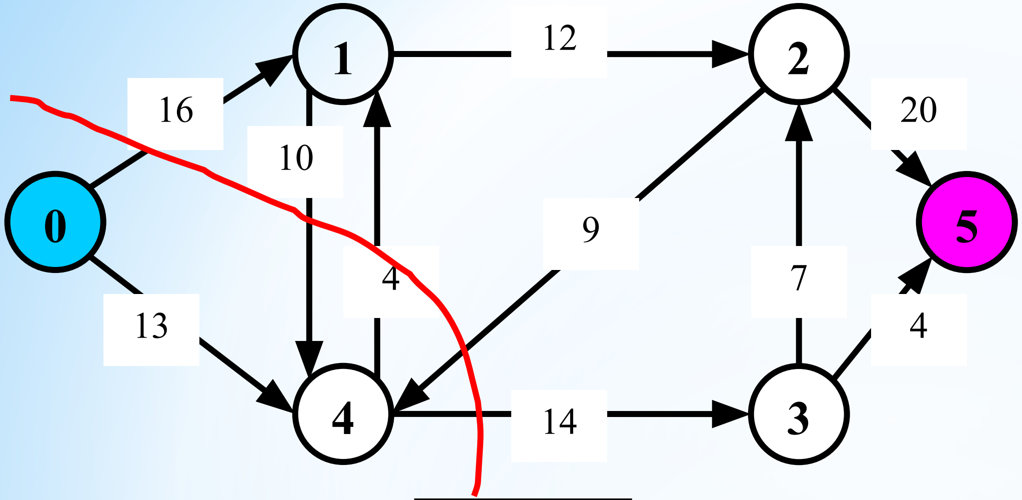
53

{0,3, 2}



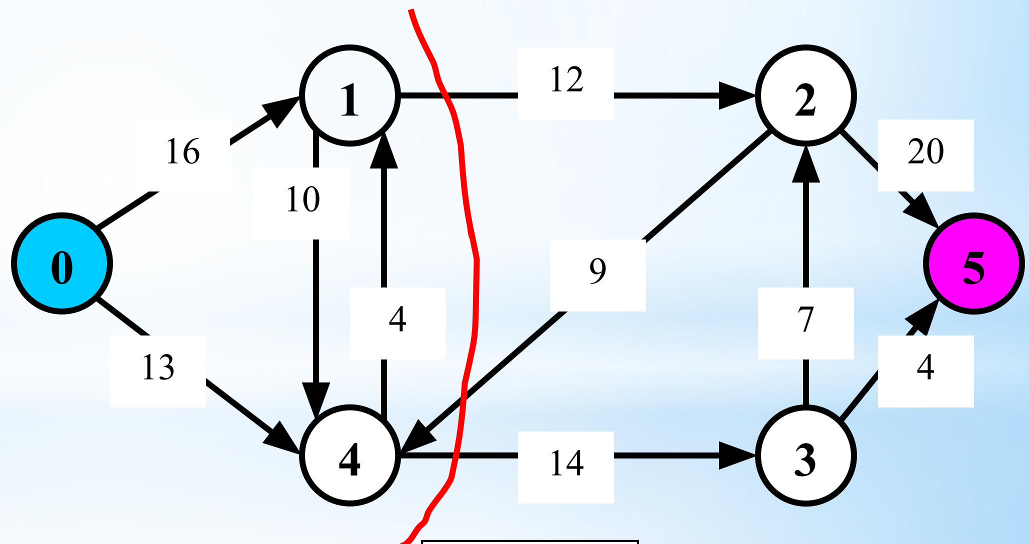
46

{0,3, 2, 1}



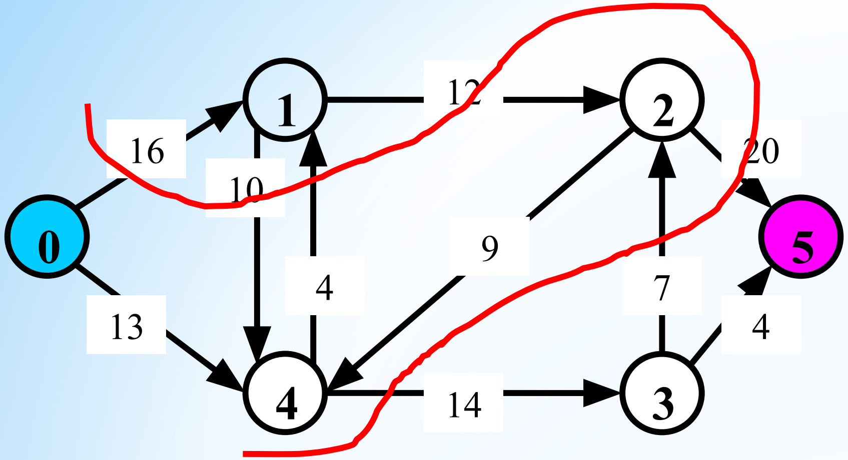
34

{0,4}



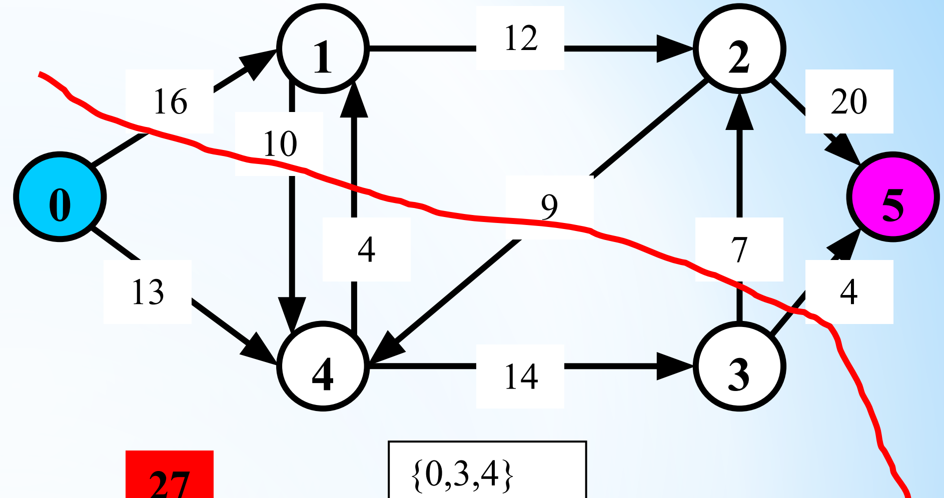
26

{0,1,4}



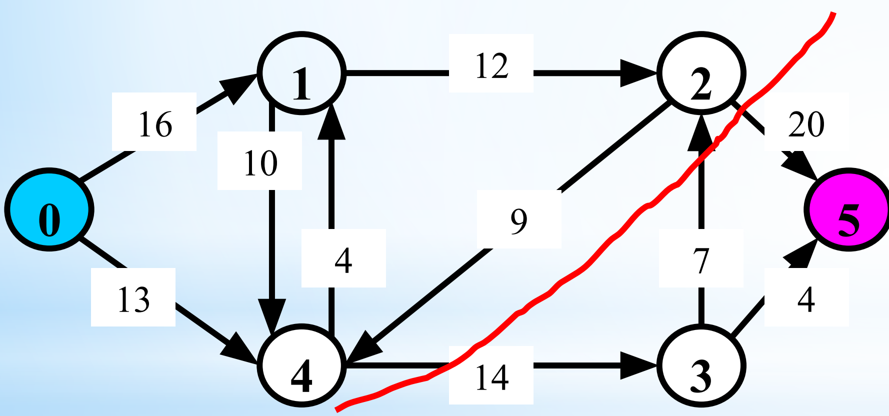
40

{0,2,4}



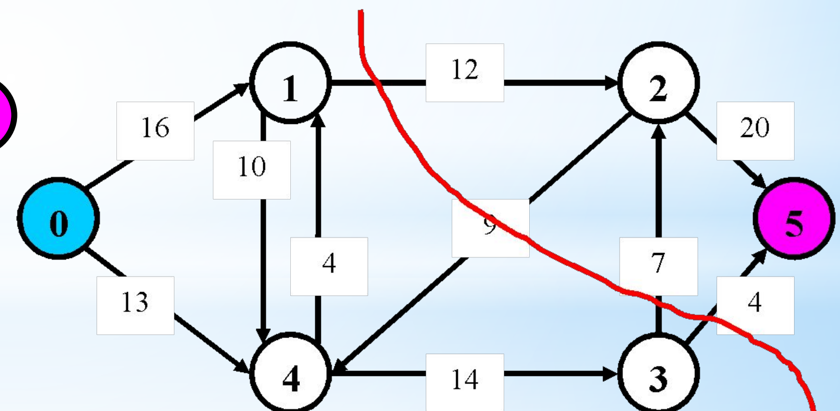
27

{0,3,4}



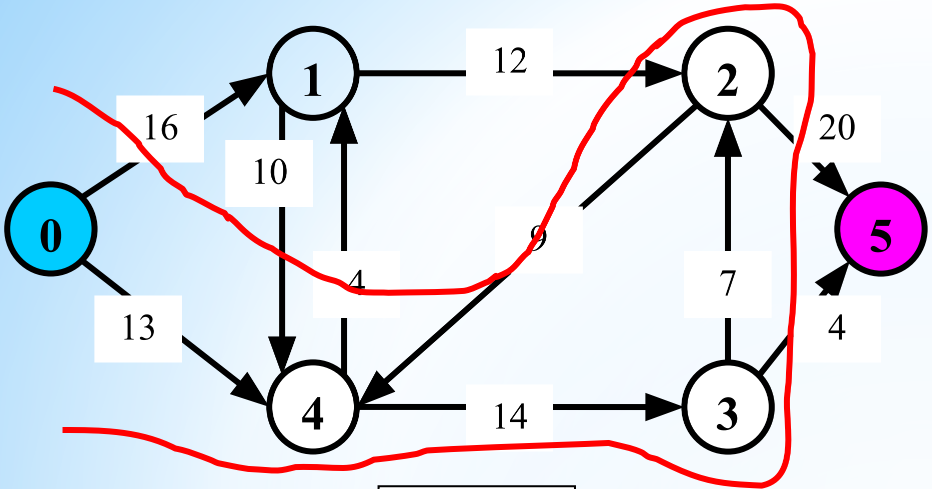
34

{0,1, 2,4}



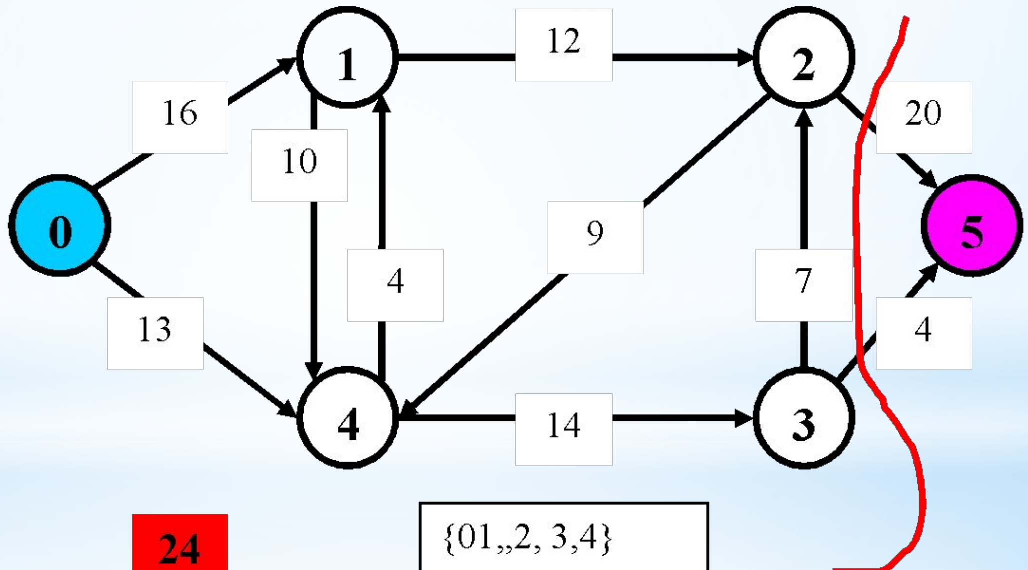
23

{0,1, 3,4}



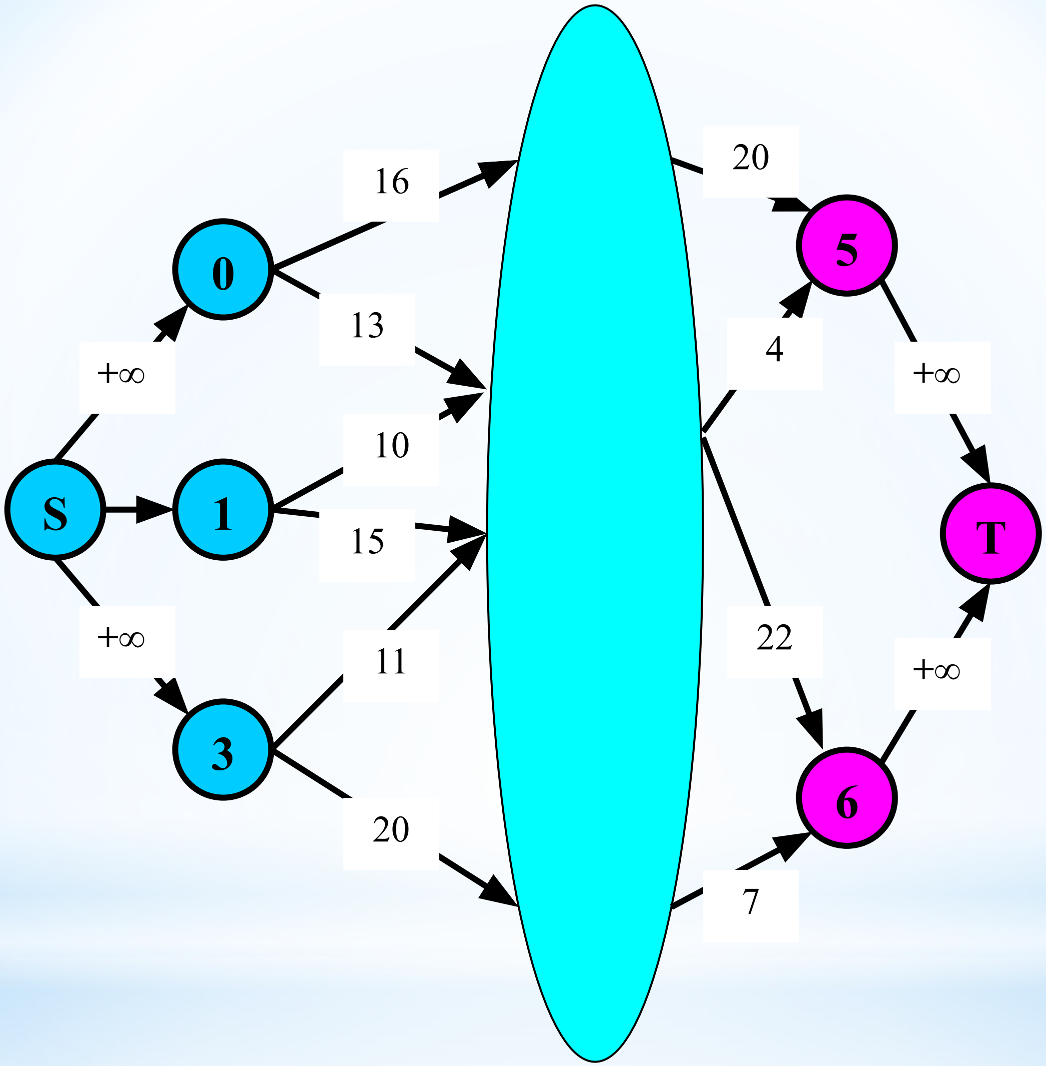
40

{0,2, 3,4}



24

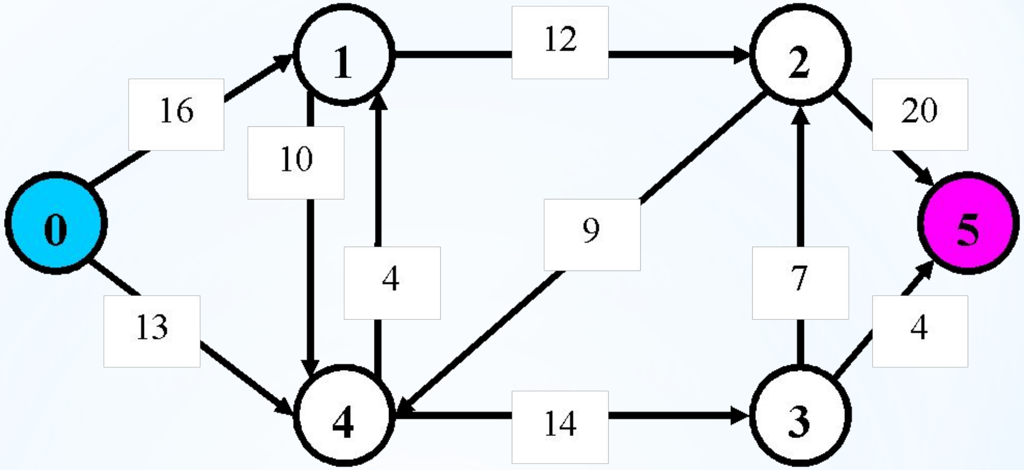
{01,,2, 3,4}



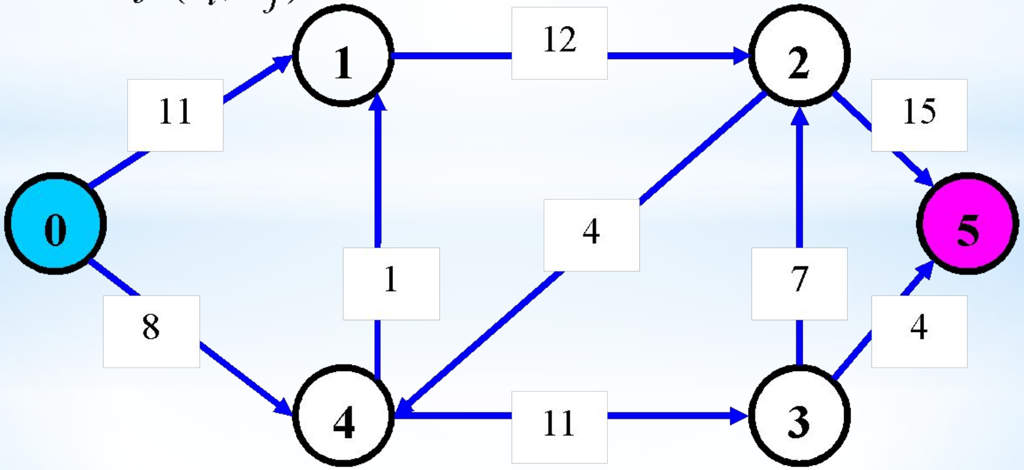
S
0
1
3
5
6
T
+∞
+∞
16
13
10
15
11
20
20
4
22
7
+∞
+∞

Понятие остаточной сети

Сеть $G = (V, E)$, $c(v_i, v_j)$ - пропускная способность дуги



Поток $f(v_i, v_j)$



АЛГОРИТМ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

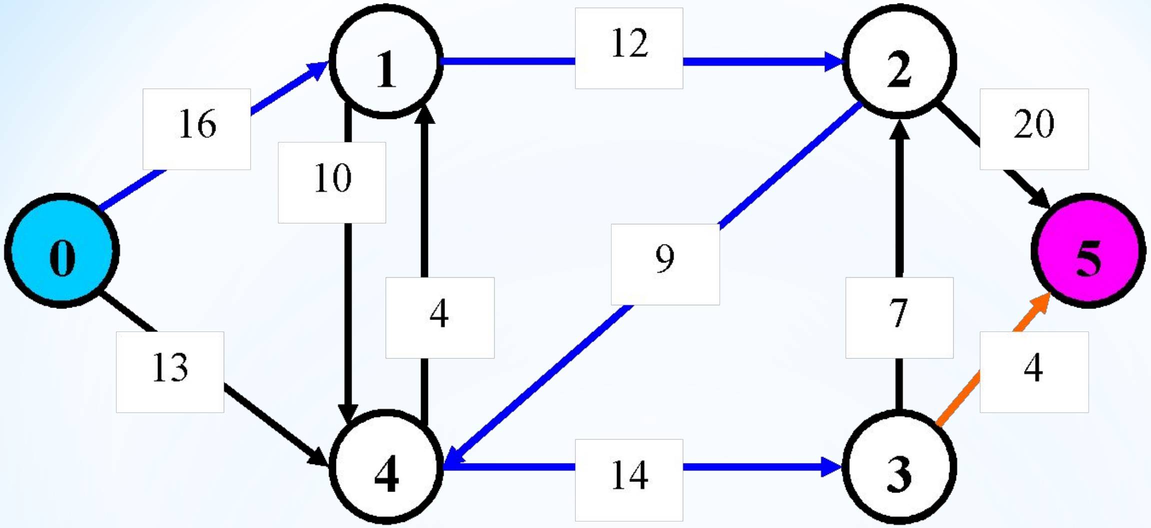
1. Обнуляем все потоки. Остаточная сеть изначально совпадает с исходной сетью.
2. В остаточной сети находим любой путь из источника в сток. Если такого пути нет, останавливаемся.
3. Пускаем через найденный путь (он называется увеличивающим путём или увеличивающей цепью) максимально возможный поток:

– На найденном пути в остаточной сети ищем ребро с минимальной пропускной способностью c_{min}.

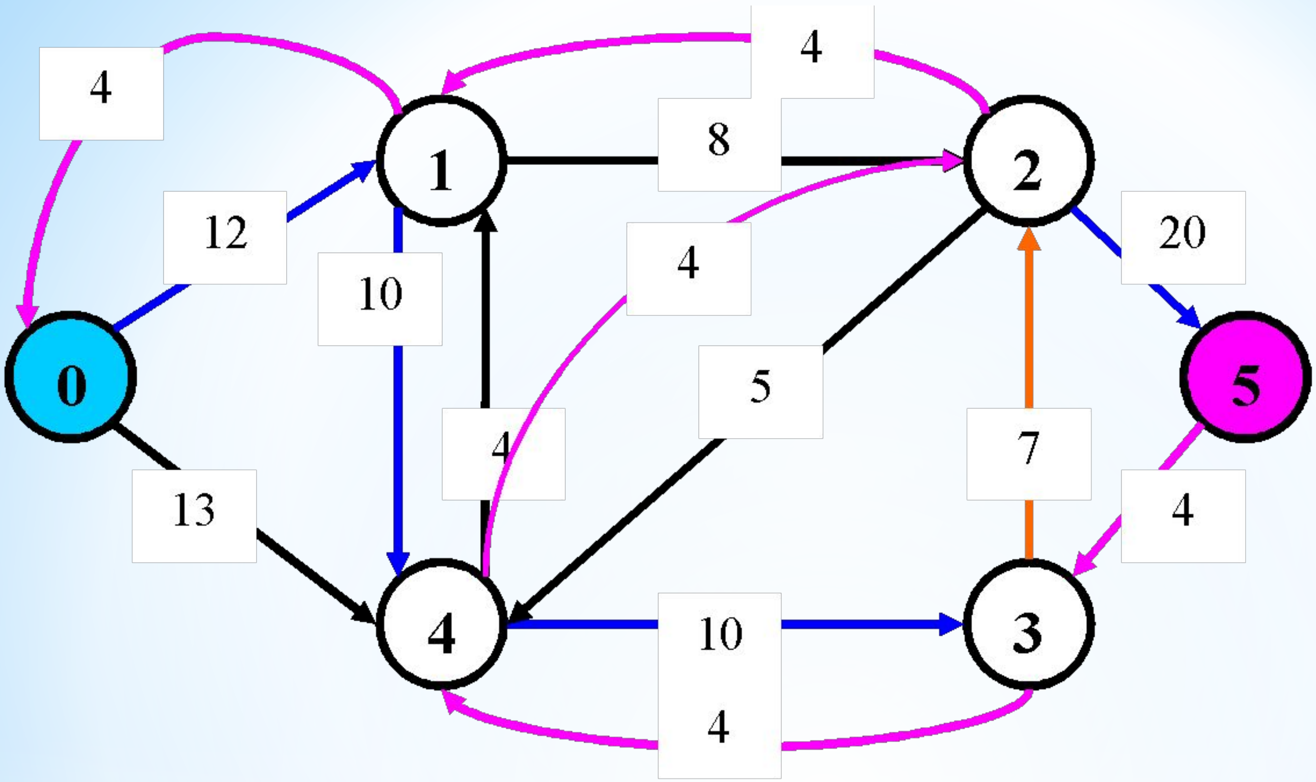
– Для каждого ребра на найденном пути увеличиваем поток на cmin, а в противоположном ему - уменьшаем на c_{min}.

– Модифицируем остаточную сеть. Для всех рёбер на найденном пути, а также для противоположных им рёбер, вычисляем новую пропускную способность. Если она стала ненулевой, добавляем ребро к остаточной сети, а если обнулилась, стираем его.

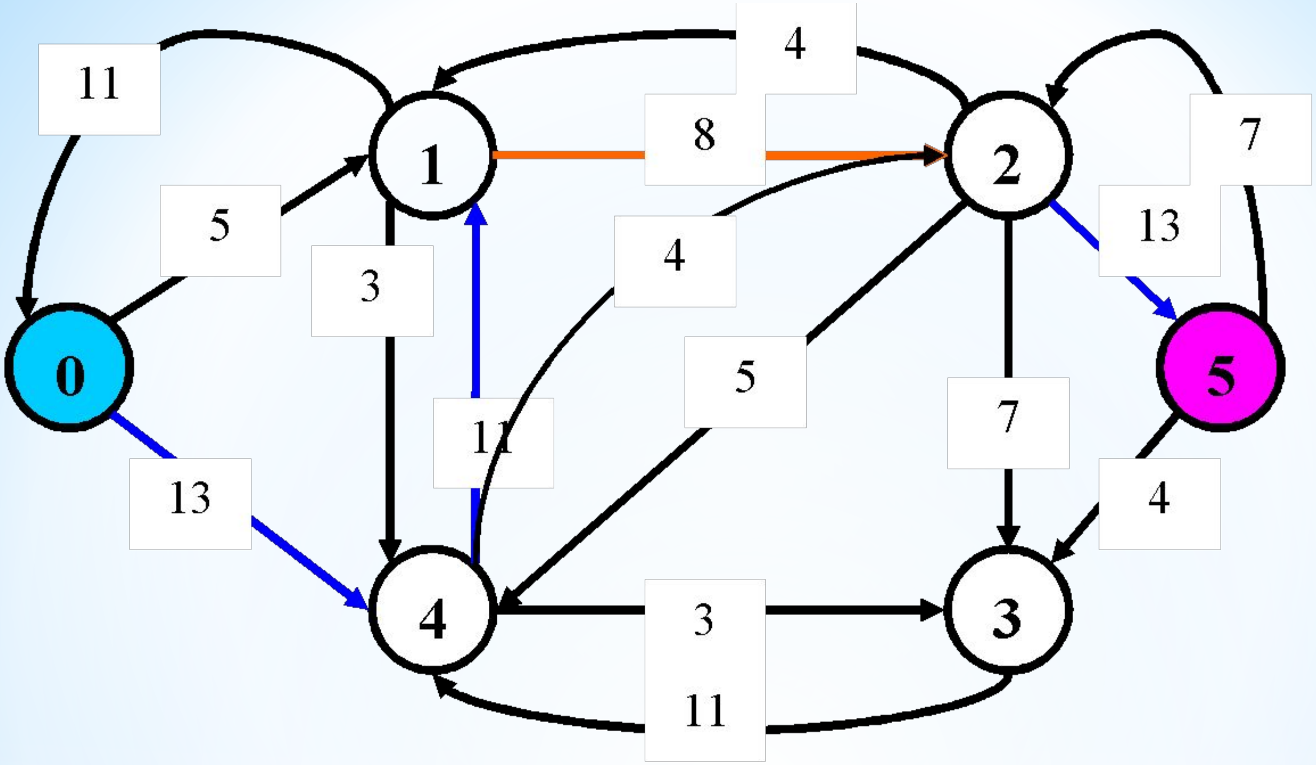
4. Возвращаемся на шаг 2.



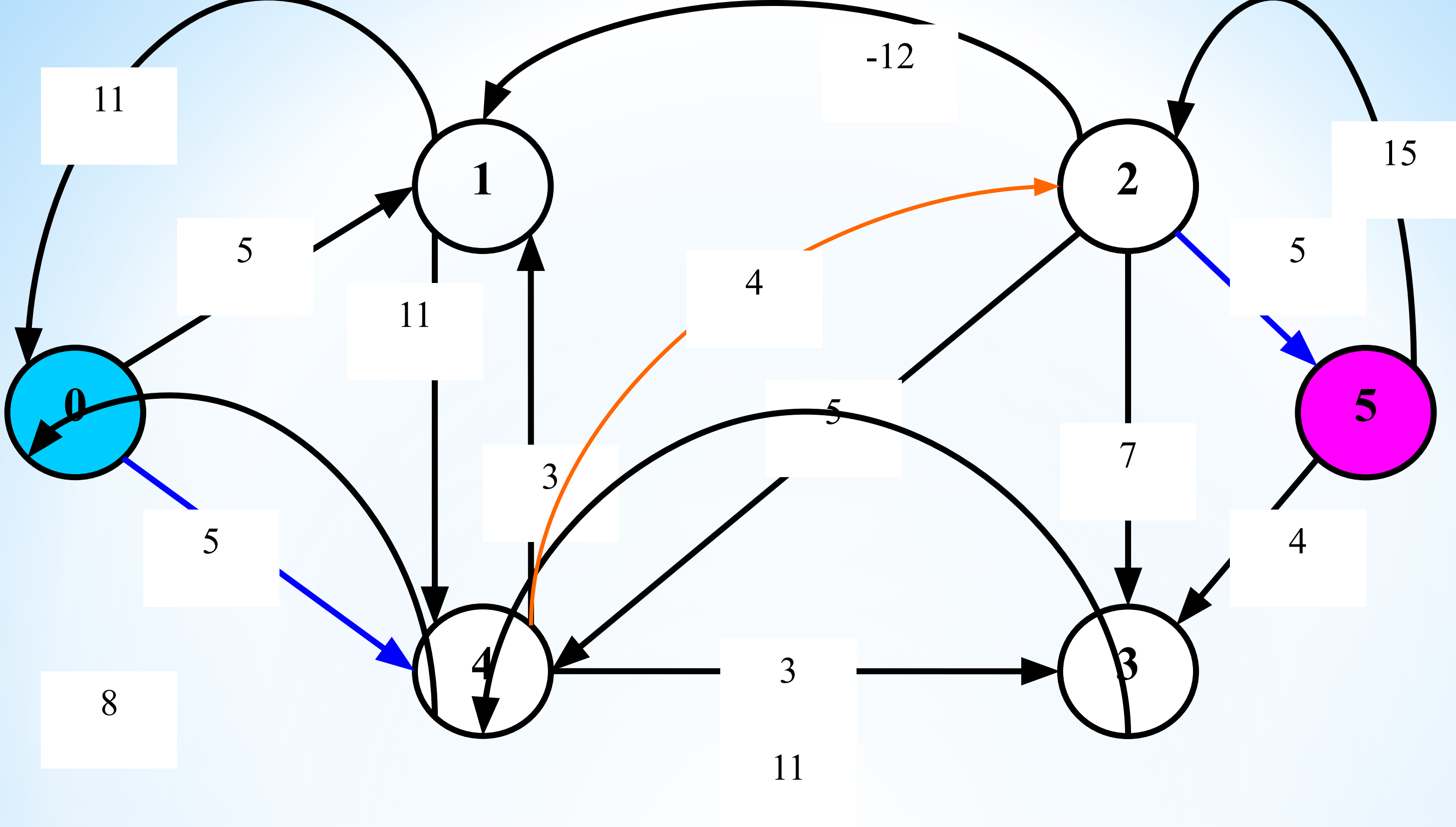
	0	1	2	3	4	5
0	0	4	0	0	0	0
1	-4	0	4	0	0	0
2	0	-4	0	0	4	0
3	0	0	0	0	-4	4
4	0	0	-4	4	0	0
5	0	0	0	-4	0	0



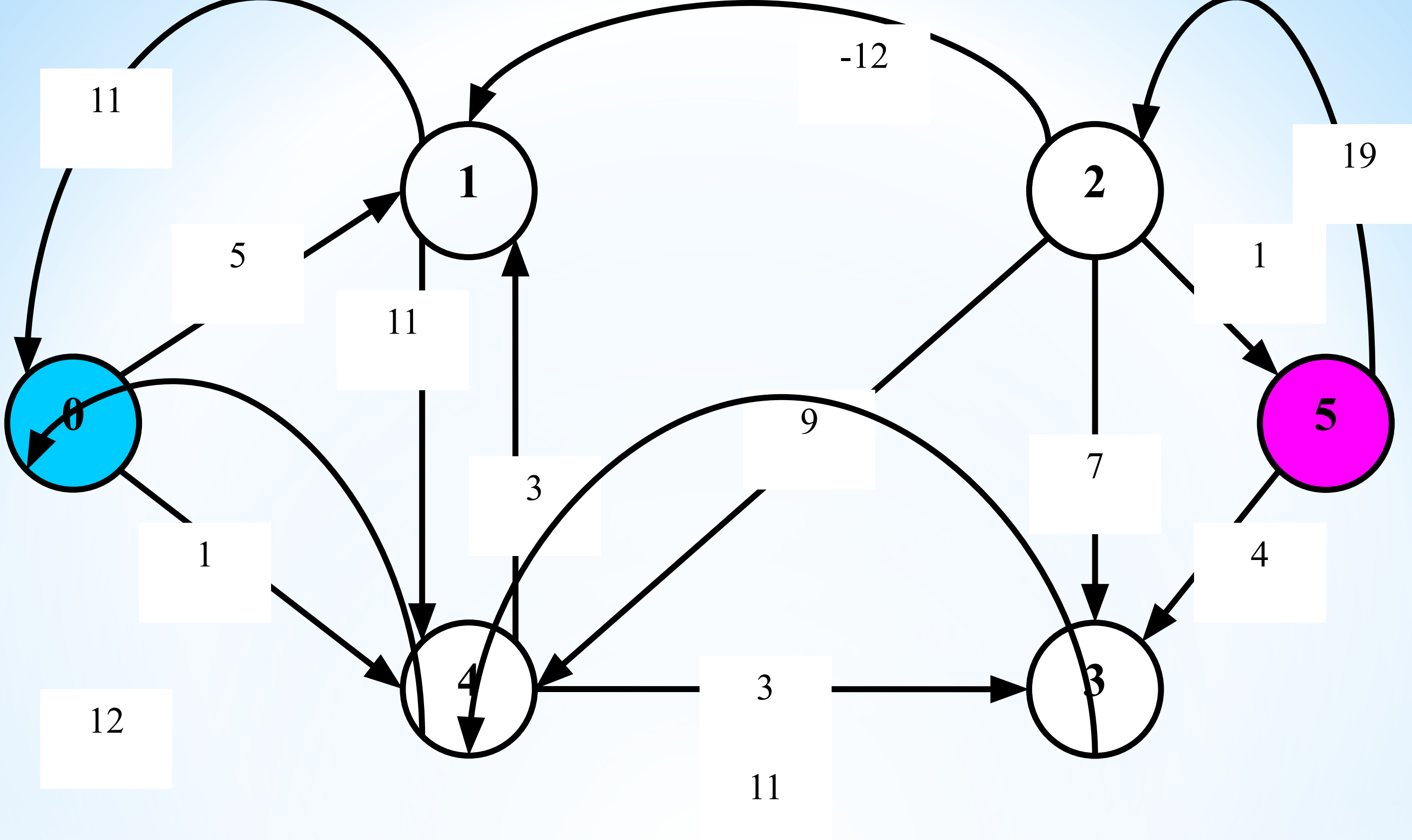
	0	1	2	3	4	5
0	0	11	0	0	0	0
1	-11	0	4	0	7	0
2	0	-4	0	-7	4	7
3	0	0	7	0	-11	4
4	0	-7	-4	11	0	0
5	0	0	-7	-4	0	0



	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**11**	**0**	**0**	**8**	**0**
1	**-11**	**0**	**12**	**0**	**-1**	**0**
2	**0**	**-12**	**0**	**-7**	**4**	**15**
3	**0**	**0**	**7**	**0**	**-11**	**4**
4	**-8**	**1**	**-4**	**11**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**-15**	**-4**	**0**	**0**



	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**11**	**0**	**0**	**12**	**0**
1	**-11**	**0**	**12**	**0**	**-1**	**0**
2	**0**	**-12**	**0**	**-7**	**0**	**19**
3	**0**	**0**	**7**	**0**	**-11**	**4**
4	**-12**	**1**	**-0**	**11**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**-19**	**-4**	**0**	**0**



	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**11**	**0**	**0**	**12**	**0**
1	**-11**	**0**	**12**	**0**	**-1**	**0**
2	**0**	**-12**	**0**	**-7**	**0**	**19**
3	**0**	**0**	**7**	**0**	**-11**	**4**
4	**-12**	**1**	**-0**	**11**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**-19**	**-4**	**0**	**0**

	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**11**	**0**	**0**	**12**	**0**
1	**-11**	**0**	**12**	**0**	**-1**	**0**
2	**0**	**-12**	**0**	**-7**	**0**	**19**
3	**0**	**0**	**7**	**0**	**-11**	**4**
4	**-12**	**1**	**-0**	**11**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**-19**	**-4**	**0**	**0**