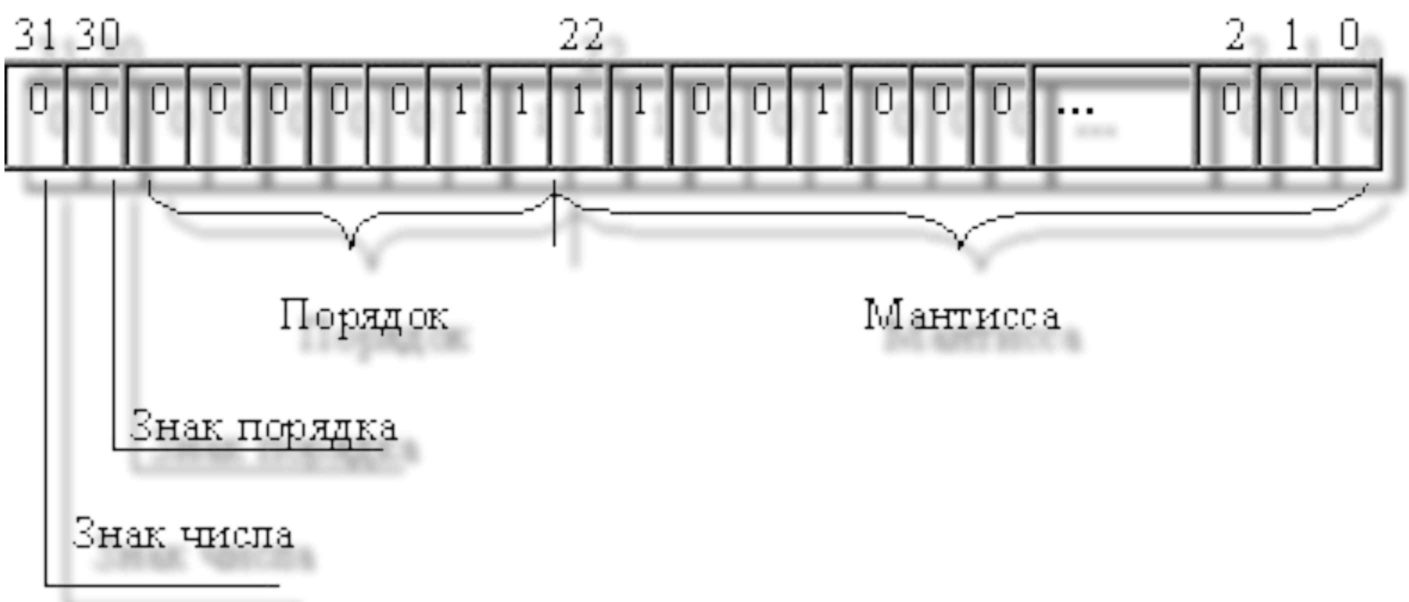
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ПАМЯТИ КОМПЬЮТЕРА



ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Любая информация в ЭВМ представляется в виде двоичных кодов. Отдельные элементы двоичного кода, принимающие значение 0 или 1, называют *разрядами* или битами. Память компьютера условно делиться на отсеки или ячейки, каждая из которых имеет свой номер. Нумерация начинается с нуля.

Минимальной адресуемой ячейкой памяти называется байт – 8 двоичных разрядов. порядковый номер байта называется его *адресом*.

Наибольшую последовательность битов, которую процессор может обрабатывать как единое целое, называют *машинным словом*.

Длина машинного слова может быть разной - 8 , 16 , 32 бит и т.д. Двоичные разряды в любой ячейке памяти нумеруются справа налево, начиная с нуля.

Существуют два основных формата представления чисел в памяти компьютера. Один из них используется для кодирования целых чисел, второй (так называемое представление числа *в формате с плавающей точкой*) используется для задания некоторого подмножества действительных чисел.

Для положительных и отрицательных чисел существует знаковый способ представления числа. Под знак отводится старший разряд ячейки:

0 - для положительных чисел,

1 - для отрицательных чисел.

Для упрощения реализации арифметических операций в компьютере целые числа представляются специальными кодами - прямым, обратным и дополнительным.

Для положительного числа прямой, обратный и дополнительный коды выглядят одинаково.

Прямой код двоичного числа — это само двоичное число, причем значение знакового разряда для положительных чисел равно 0, а для отрицательных чисел -1 .

Обратный код отрицательного числа получается из прямого кода путем замены нулей единицами, а единиц нулями, исключая знаковый разряд.

Дополнительный код отрицательного числа образуется как результат суммирования обратного кода с единицей младшего разряда. Перенос в знаковый разряд при этом теряется.

Примечание. Дополнительный код основан на понятии дополнения числа - величины, которую надо добавить к числу, чтобы получить переход единицы в старшем разряде.

Дополнением k-разрядного целого числа Z в системе счисления с основанием q называется величина:

$$D = q^k - Z.$$

Пример 1. Определить прямой, обратный и дополнительный коды следующих двоичных чисел:
а)100100; б) -100011; в) -100100.
Решение
Будем считать, что число размещается в двух байтах. Старший бит – знак разряда. Незначащие нули добавляются слева от числа. Результат представим в виде таблицы:

Число	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
100100	0000000000100100	0000000000100100	0000000000100100
-100011	1000000000100011	1111111111011100	1111111111011101
-100100	1000000000100100	1111111111011011	1111111111011100

Пример 2. Как будет представлено в памяти компьютера целое число 12345_{10} ?

Решение

Для размещения числа возьмем два байта.

Поскольку число положительное, то в старшем (15-м) бите будет 0.

Переведем число в двоичную систему счисления:

$12345_{10} = 11000000111001_2$.

Результат:

0	0110000	00111001

Знак числа

число

Задания для самостоятельного выполнения

1.Запишите прямые коды десятичных чисел в однобайтовом формате:
а) 64 б) 58 в) 72 г) -96

2. Запишите двоичные числа в дополнительном коде:
а) 1010 б) -1001 в) -11 г) -11011

3. Переведите в прямой код числа, записанные в дополнительном коде, и найдите их десятичные эквиваленты:
а) 00000100 б) 11111001

4. Представьте целые числа в 16-разрядной ЭВМ:
а) 25 б) -25 в) 801 г) -610

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ДВОИЧНАЯ АРИФМЕТИКА В ЭВМ

Особенности двоичной системы счисления позволяют создавать специфические алгоритмы вычитания и умножения двоичных чисел, наиболее подходящие для аппаратной реализации.

Целочисленная двоичная арифметика используется при изучении программирования, в процессе освоения операторов цикла, оператора выбора, стандартных процедур val и str, операций над целыми числами div и mod, операций над строковыми величинами.

Сложение чисел производится в дополнительных кодах поразрядно. При выполнении арифметических операций число может выйти за указанные границы. Произойдет *переполнение разрядной сетки*, поэтому при работе с большими целыми числами под них выделяется больше места, например 4 байта.

Чтобы избежать ситуации переполнения, в языках программирования предусмотрено строгое описание *типа переменной*, которым определяется набор возможных ее значений.

Вычитание целых чисел эквивалентно сложению с отрицательным числом. Отрицательное число может быть представлено в прямом коде. Однако использование прямого кода усложняет структуру команд процессора. При выполнении сложения чисел с разными знаками требуется выбрать из них большее по модулю, затем вычесть из него меньшее, выяснить знак большего и присвоить этот знак остатку. По этой причине в компьютерах используется представление отрицательного числа в *дополнительном* коде. Таким образом, операция вычитания выполняется как сложение с дополнительным кодом вычитаемого.

Операции *умножения* и *деления* выполняются в прямом коде с использованием итерационных алгоритмов (ряда повторяющихся шагов).

Умножение двоичных чисел сводится к двум операциям: сложения и сдвига.

Операция *деления* для целых чисел однозначно не определена, поскольку в общем случае приводит к появлению нецелых (вещественных) чисел. Существуют различные методы и алгоритмы реализации этой операции в разных процессорах.

Пример 1. Выполнить операцию вычитания 25 -34 .

Учтем, что 25-34 = 25+ (-34) .

Переведем числа 25 и 34 в двоичную систему счисления:

$25_{10} = 11001_2$ и $34_{10} = 100010_2$.

Запишем прямые, обратные и дополнительные коды, восп

Число	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
25	00011001	00011001	00011001
-34	10100010	11011101	11011110

После сложения дополнительных кодов получим код 11110111. Единица в старшем бите полученного кода означает, что число отрицательное. Следовательно, результат надо перевести в обратный, а затем в прямой код:

11110111 -> 10001000 -> 10001001 .

Полученный результат интерпретируется как десятичное число:$-1001_2 = -9_{10}$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

В отличие от целых чисел, которые представляются в памяти машины абсолютно точно, значения вещественных чисел являются *приближенными*. В некоторых областях вычислений требуются очень большие или малые действительные числа. Для получения большей точности применяют *запись чисел с плавающей точкой*.

В общем случае в формате с плавающей точкой число представляется в виде произведения двух сомножителей: $R=m*P^n$

где *m -мантисса* числа;

P - основание системы счисления;

n - порядок, указывающий, на какое количество позиций и в каком направлении должна сместиться точка, отделяющая дробную часть в мантиссе.

Например, число 5,14 может быть записано $0{,}514 \cdot 10^1$ или $51{,}4 \cdot 10^{-1}$ и т.д. Запятая (десятичная точка) перемещается, или «плавает», вправо и влево в зависимости от порядка числа.

При работе с числами в языках программирования и вычислительных системах используется *экспоненциальная* форма записи:

$$R = m \cdot E \pm n,$$

где E - десятичное основание системы.

Например, 3,1467890000E + 2 = 314,6789

Нормализованная мантисса меньше единицы и первая значащая цифра не ноль.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Сравните числа:

а) $318{,}4785 \cdot 10^{9}$ и $3{,}184785 \cdot 10^{11}$;

б) $218{,}4785 \cdot 10^{-3}$ и $1847{,}85 \cdot 10^{-4}$;

2. Запишите числа в естественной форме:

а) $0{,}1100000 \cdot 2^{100}$;

б) $0{,}1001111 \cdot 2^{-111}$;

3. Выполните действия:

а) $0{,}101010 \cdot 2^{11} + 0{,}110011 \cdot 2^{100}$;

б) $0{,}100011 \cdot 2^{100} – 0{,}100001 \cdot 2^{100}$;

в) $0{,}110011 \cdot 2^{-10} * 0{,}100001 \cdot 2^{1}$;

г) $0{,}101001 \cdot 2^{10} / 0{,}100000 \cdot 2^{10}$.

РАЗМЕЩЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ

Метод представления вещественных чисел в памяти компьютера предполагает хранение двух чисел: мантиссы и порядка. Чем больше разрядов отводится под запись мантиссы, тем выше точность представления числа. Чем больше разрядов занимает порядок, тем шире диапазон чисел, представимых в машине при заданном формате.

Правила кодирования мантиссы и порядка отличаются для различных типов машин.

Рассмотрим для начала один из вариантов представления вещественных чисел.

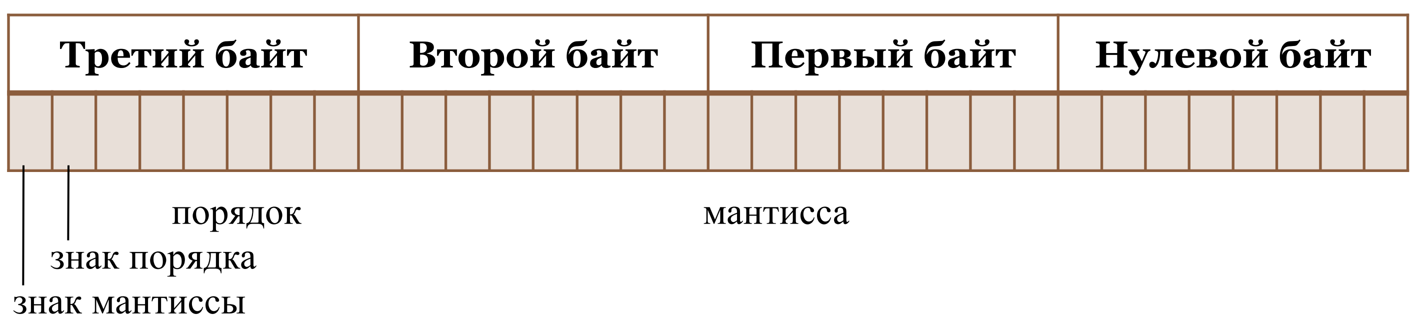
Для размещения вещественного числа могут использоваться четыре байта (32 бита) - короткий формат, 8 байтов длинный формат, 16 байтов - формат повышенной точности. В любом случае старший байт остается постоянным, а изменяется область, отведенная под мантиссу. Старший байт включает в себя:

один бит (старший) - знак числа;

один бит - знак порядка;

шесть битов - порядок числа.

В таком представлении максимальный порядок числа равен $111111_2 = 63_{10}$. Следовательно, 10^{63} - максимальное число, которое можно закодировать таким образом:



Пример 1. Как будет представлено в памяти компьютера число —$123{,}45_{10}$?

Решение

Представим число в 4 байтах.

Нормализованный вид: $-0{,}12345 \cdot 10^3$.

Число отрицательное, поэтому старшим (31-й) бит равен 1.

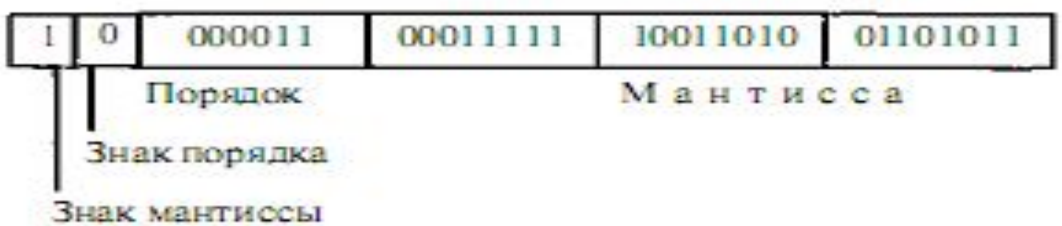
Порядок равен 3, он положительный, значит, 30-й бит равен 0.

Число 3 в двоичной системе счисления имеет вид 11. Чтобы записать его в оставшихся 6 битах старшего байта, необходимо добавить незначащие нули.

Таким образом, старший байт имеет вид: 10000011 .

Найдем двоичное представление мантиссы 0,12345 по алгоритму перевода дробной части, 24 раза умножив ее на 2.

Результат:



Пример 2. Раскодировать содержимое четырех байтов памяти: а) как два целых числа; б) как одно вещественное:

01000101	10000001	10000000	10000000

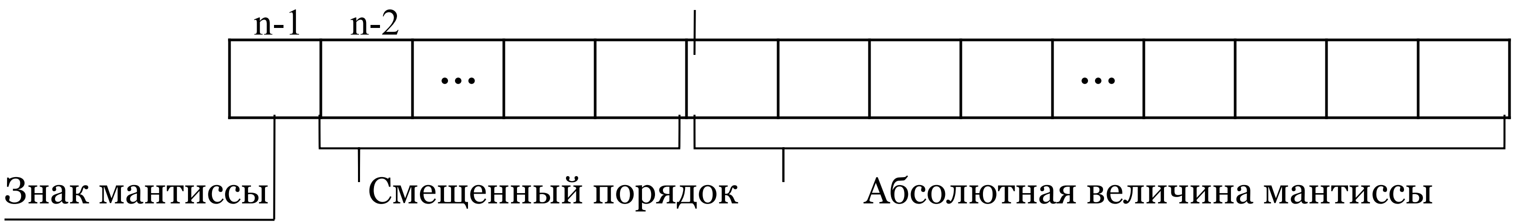
Решение

а) 17793;-128;

б) приблизительно $0{,}5058593 \cdot 10^{-3}$ (порядок записан в дополнительном коде).

Положительные и отрицательные значения порядка существенно усложняют обработку вещественных чисел. Поэтому во многих современных компьютерах используют не прямое значение порядка, а смещенное. Его называют характеристикой числа. Для разных типов ЭВМ существуют разные варианты смещения порядка. Рассмотрим один из вариантов.

Запись вещественного числа имеет структуру следующего вида:



Здесь порядок n-разрядного нормализованного числа задается в смещенной форме: если для задания порядка выделено k разрядов, то к истинному значению порядка прибавляют смещение, равное 2^{k-1}.

Например, порядок, принимающий значения в диапазоне от -64 до +63, представляется смещенным порядком, значения которого меняются от 0 до 127.

Прокомментируем этот случай. В семи двоичных разрядах помещаются двоичные числа от 0000000 до 1111111. В десятичной системе счисления это числа от 0 до 127. Всего 128 значений, которые разделяются поровну между положительными и отрицательными значениями порядка в диапазоне от -63 до 63.

Связь между смещенным порядком S и математическим P в данном случае выражается формулой: $\mathbf{S = P + 64_{10} = P + 100\,0000_2}$.

Пример 3. Записать внутреннее представление числа 250,1875 в форме с плавающей точкой в 4-х байтовом машинном слове.

Решение:

1. Переведем число в двоичную систему счисления с 24 значащими цифрами (3 байта под мантиссу):

$250.1875_{10} = 11111010{,}0011000000000000_2$.

2. Запишем в форме нормализованного двоичного числа с плавающей точкой: $0{,}111110100011000000000000 \cdot 10^{1000}{}_2$. Здесь мантисса, основание системы счисления ($2_{10} = 10_2$) и порядок ($8_{10} = 1000_2$) записаны в двоичной системе.

3. Вычислим характеристику: $S_2 = 1000 + 1000000 = 1001000$.

4. Запишем представление числа в 4-байтовой ячейке памяти с учетом знака числа:

0	1001000	11111010	00110000	00000000

Шестнадцатеричная форма: 48FA3000.

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ

Выполнение арифметических действий над числами с плавающей запятой гораздо сложнее целочисленной арифметики. Для некоторых процессоров (в частности Intel) операции над вещественными числами вынесены в отдельный узел, который называют математическим сопроцессором.

Сложение чисел с плавающей запятой выполняется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Представить числа A и B в нормализованном виде, записав отдельно значения мантисс и порядков.

2. Выровнять порядки по числу с большим порядком.

3. Выровнять число цифр в мантиссах по числу, порядок которого не изменился.

4. Сложить числа.

5. Нормализовать сумму, оставив число цифр в мантиссе таким, как у числа, порядок которого не изменялся.

Пример. Найти сумму чисел А = 9,6098 и В = 98,009 по правилу сложения чисел с плавающей запятой.

Решение:

Результат представим в виде таблицы:

Шаг	Число	Нормализованное число	Порядок	Мантисса	Число цифр в мантиссе
1	A=9,6098	$0{,}96098 \cdot 10^1$	1	96098	5
	B=98,009	$0{,}98009 \cdot 10^2$	2	98009	5
2	A	$0{,}096098 \cdot 10^2$	2	096098	6
3	A	$0{,}09609 \cdot 10^2$	2	09609	5
4	A+B	$1{,}07618 \cdot 10^2$	2	-	-
5	A+B	$0{,}101761 \cdot 10^3$	3	10761	5