

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ПАМЯТИ КОМПЬЮТЕРА

Седых Ольга Николаевна
МОУ "Средняя общеобразовательная школа № 17
имени Кирилла и Мефодия"

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Любая информация в ЭВМ представляется в виде двоичных кодов. Отдельные элементы двоичного кода, принимающие значение 0 или 1, называют разрядами или битами. Память компьютера условно делится на отсеки или ячейки, каждая из которых имеет свой номер. Нумерация начинается с нуля.

Минимальной адресуемой ячейкой памяти называется байт – 8 двоичных разрядов. порядковый номер байта называется его адресом.

Наибольшую последовательность битов, которую процессор может обрабатывать как единое целое, называют машинным словом.

Длина машинного слова может быть разной - 8 , 16 , 32 бит и т.д. Двоичные разряды в любой ячейке памяти нумеруются справа налево, начиная с нуля.

Существуют два основных формата представления чисел в памяти компьютера. Один из них используется для кодирования целых чисел, второй (так называемое представление числа *в формате с плавающей точкой*) используется для задания некоторого подмножества действительных чисел.

Для положительных и отрицательных чисел существует знаковый способ представления числа. Под знак отводится старший разряд ячейки:

0 - для положительных чисел,

1 - для отрицательных чисел.

Для упрощения реализации арифметических операций в компьютере целые числа представляются специальными кодами - прямым, обратным и дополнительным.

Для положительного числа прямой, обратный и дополнительный коды выглядят одинаково.

Прямой код двоичного числа — это само двоичное число, причем значение знакового разряда для положительных чисел равно 0, а для отрицательных чисел -1 .

Обратный код отрицательного числа получается из прямого кода путем замены нулей единицами, а единиц нулями, исключая знаковый разряд.

Дополнительный код отрицательного числа образуется как результат суммирования обратного кода с единицей младшего разряда. Перенос в знаковый разряд при этом теряется.

Примечание. Дополнительный код основан на понятии дополнения числа - величины, которую надо добавить к числу, чтобы получить переход единицы в старшем разряде.

Дополнением k -разрядного целого числа Z в системе счисления с основанием q называется величина:

$$D = q^k - Z.$$

Пример 1. Определить прямой, обратный и дополнительный коды следующих двоичных чисел:

а) 100100; б) -100011; в) -100100.

Решение

Будем считать, что число размещается в двух байтах. Старший бит – знак разряда. Незначащие нули добавляются слева от числа. Результат представим в виде таблицы:

Число	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
100100	0000000000100100	0000000000100100	0000000000100100
-100011	1000000000100011	1111111111011100	1111111111011101
-100100	1000000000100100	1111111111011011	1111111111011100

Пример 2. Как будет представлено в памяти компьютера целое число 12345_{10} ?

Решение

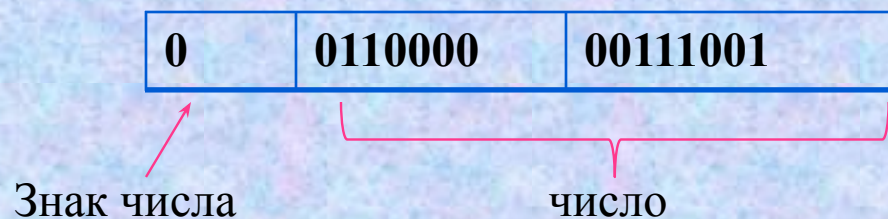
Для размещения числа возьмем два байта.

Поскольку число положительное, то в старшем (15-м) бите будет 0.

Переведем число в двоичную систему счисления:

$$12345_{10} = 11000000111001_2.$$

Результат:



Задания для самостоятельного выполнения

1. Запишите прямые коды десятичных чисел в однобайтовом формате:

- а) 64 б) 58 в) 72 г) -96

2. Запишите двоичные числа в дополнительном коде:

- а) 1010 б) -1001 в) -11 г) -11011

3. Переведите в прямой код числа, записанные в дополнительном коде, и найдите их десятичные эквиваленты:

- а) 00000100 б) 11111001

4. Представьте целые числа в 16-разрядной ЭВМ:

- а) 25 б) -25 в) 801 г) -610

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ДВОИЧНАЯ АРИФМЕТИКА В ЭВМ

Особенности двоичной системы счисления позволяют создавать специфические алгоритмы вычитания и умножения двоичных чисел, наиболее подходящие для аппаратной реализации.

Целочисленная двоичная арифметика используется при изучении программирования, в процессе освоения операторов цикла, оператора выбора, стандартных процедур `val` и `str`, операций над целыми числами `div` и `mod`, операций над строковыми величинами.

Сложение чисел производится в дополнительных кодах поразрядно. При выполнении арифметических операций число может выйти за указанные границы. Произойдет переполнение разрядной сетки, поэтому при работе с большими целыми числами под них выделяется больше места, например 4 байта.

Чтобы избежать ситуации переполнения, в языках программирования предусмотрено строгое описание типа переменной, которым определяется набор возможных ее значений.

Вычитание целых чисел эквивалентно сложению с отрицательным числом. Отрицательное число может быть представлено в прямом коде. Однако использование прямого кода усложняет структуру команд процессора. При выполнении сложения чисел с разными знаками требуется выбрать из них большее по модулю, затем вычесть из него меньшее, выяснить знак большего и присвоить этот знак остатку. По этой причине в компьютерах используется представление отрицательного числа в *дополнительном* коде. Таким образом, операция вычитания выполняется как сложение с дополнительным кодом вычитаемого.

Операции умножения и деления выполняются в прямом коде с использованием итерационных алгоритмов (ряда повторяющихся шагов).

Умножение двоичных чисел сводится к двум операциям: сложения и сдвига.

Операция деления для целых чисел однозначно не определена, поскольку в общем случае приводит к появлению нецелых (вещественных) чисел. Существуют различные методы и алгоритмы реализации этой операции в разных процессорах.

Пример 1. Выполнить операцию вычитания $25 - 34$.

Учтем, что $25 - 34 = 25 + (-34)$.

Переведем числа 25 и 34 в двоичную систему счисления:

$$25_{10} = 11001_2 \text{ и } 34_{10} = 100010_2.$$

Запишем прямые, обратные и дополнительные коды, воспользовавшись 8-разрядной сеткой:

Число	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
25	00011001	00011001	00011001
-34	10100010	11011101	11011110

После сложения дополнительных кодов получим код 11110111. Единица в старшем бите полученного кода означает, что число отрицательное. Следовательно, результат надо перевести в обратный, а затем в прямой код:

$$11110111 \rightarrow 10001000 \rightarrow 10001001.$$

Полученный результат интерпретируется как десятичное число: $-1001_2 = -9_{10}$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

В отличие от целых чисел, которые представляются в памяти машины абсолютно точно, значения вещественных чисел являются приближенными. В некоторых областях вычислений требуются очень большие или малые действительные числа. Для получения большей точности применяют запись чисел с плавающей точкой.

В общем случае в формате с плавающей точкой число представляется в виде произведения двух сомножителей:

$$R = m \cdot P^n$$

где m - мантисса числа;

P - основание системы счисления;

n - порядок, указывающий, на какое количество позиций и в каком направлении должна сместиться точка, отделяющая дробную часть в мантиссе.

Например, число 5,14 может быть записано $0,514 \cdot 10^1$ или $51,4 \cdot 10^{-1}$ и т.д. Запятая (десятичная точка) перемещается, или «плавает», вправо и влево в зависимости от порядка числа.

При работе с числами в языках программирования и вычислительных системах используется экспоненциальная форма записи:

$$R = m \cdot E \pm n,$$

где E - десятичное основание системы.

Например, $3,1467890000E + 2 = 314,6789$

Нормализованная мантисса меньше единицы и первая значащая цифра не ноль.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Сравните числа:

а) $318,4785 \cdot 10^9$ и $3,184785 \cdot 10^{11}$;

б) $218,4785 \cdot 10^{-3}$ и $1847,85 \cdot 10^{-4}$;

2. Запишите числа в естественной форме:

а) $0,1100000 \cdot 2^{100}$;

б) $0,1001111 \cdot 2^{-111}$;

3. Выполните действия:

а) $0,101010 \cdot 2^{11} + 0,110011 \cdot 2^{100}$;

б) $0,100011 \cdot 2^{100} - 0,100001 \cdot 2^{100}$;

в) $0,110011 \cdot 2^{-10} * 0,100001 \cdot 2^1$;

г) $0,101001 \cdot 2^{10} / 0,100000 \cdot 2^{10}$.

РАЗМЕЩЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ

Метод представления вещественных чисел в памяти компьютера предполагает хранение двух чисел: мантиисы и порядка. Чем больше разрядов отводится под запись мантиисы, тем выше точность представления числа. Чем больше разрядов занимает порядок, тем шире диапазон чисел, представимых в машине при заданном формате.

Правила кодирования мантиисы и порядка отличаются для различных типов машин.

Рассмотрим для начала один из вариантов представления вещественных чисел.

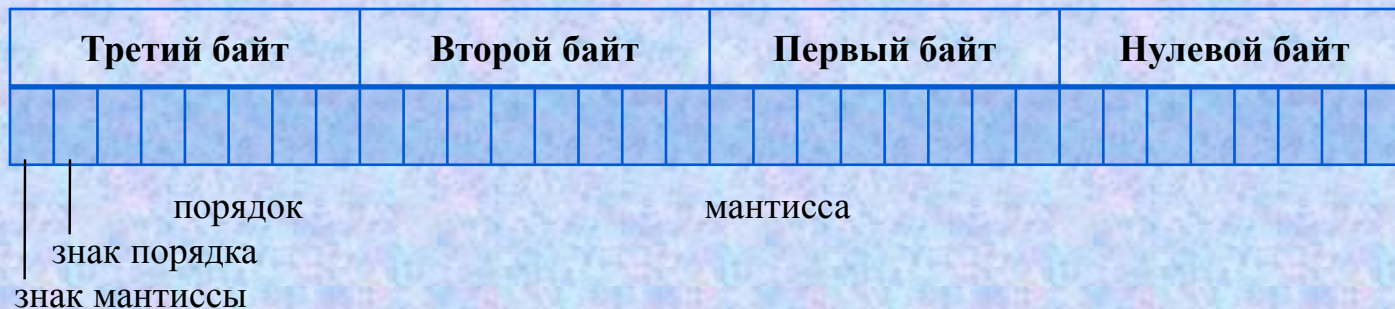
Для размещения вещественного числа могут использоваться четыре байта (32 бита) - короткий формат, 8 байтов длинный формат, 16 байтов - формат повышенной точности. В любом случае старший байт остается постоянным, а изменяется область, отведенная под мантиису. Старший байт включает в себя:

один бит (старший) - знак числа;

один бит - знак порядка;

шесть битов - порядок числа.

В таком представлении максимальный порядок числа равен $111111_2 = 63_{10}$. Следовательно, 10^{63} - максимальное число, которое можно закодировать таким образом:



Пример 1. Как будет представлено в памяти компьютера число $-123,45_{10}$?

Решение

Представим число в 4 байтах.

Нормализованный вид: $-0,12345 \cdot 10^3$.

Число отрицательное, поэтому старшим (31-й) бит равен 1.

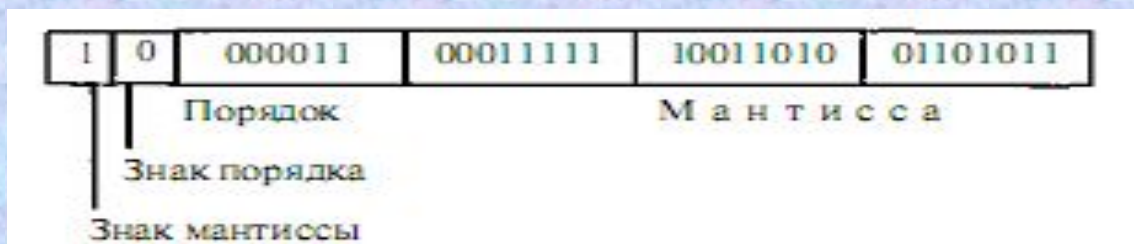
Порядок равен 3, он положительный, значит, 30-й бит равен 0.

Число 3 в двоичной системе счисления имеет вид 11. Чтобы записать его в оставшихся 6 битах старшего байта, необходимо добавить незначащие нули.

Таким образом, старший байт имеет вид: 10000011 .

Найдем двоичное представление мантиссы 0,12345 по алгоритму перевода дробной части, 24 раза умножив ее на 2.

Результат:



Пример 2. Раскодировать содержимое четырех байтов памяти: а) как два целых числа; б) как одно вещественное:

01000101	10000001	10000000	10000000
----------	----------	----------	----------

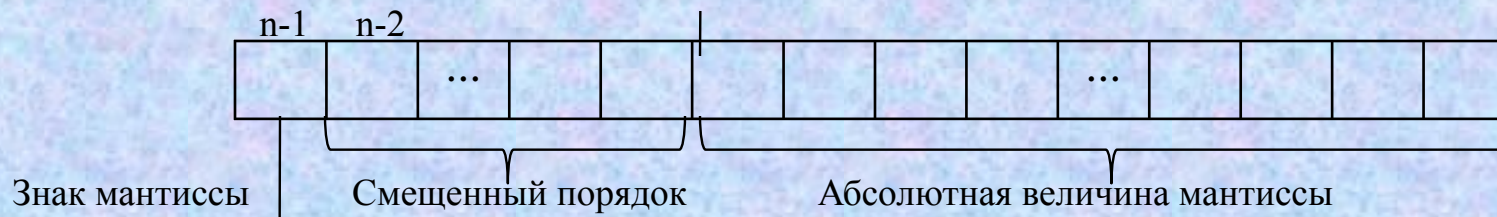
Решение

а) 17793; -128;

б) приблизительно $0,5058593 \cdot 10^{-3}$ (порядок записан в дополнительном коде).

Положительные и отрицательные значения порядка существенно усложняют обработку вещественных чисел. Поэтому во многих современных компьютерах используют не прямое значение порядка, а смещенное. Его называют характеристикой числа. Для разных типов ЭВМ существуют разные варианты смещения порядка. Рассмотрим один из вариантов.

Запись вещественного числа имеет структуру следующего вида:



Здесь порядок n -разрядного нормализованного числа задается в смещенной форме: если для задания порядка выделено k разрядов, то к истинному значению порядка прибавляют смещение, равное 2^{k-1} .

Например, порядок, принимающий значения в диапазоне от -64 до $+63$, представляется смещенным порядком, значения которого меняются от 0 до 127 .

Прокомментируем этот случай. В семи двоичных разрядах помещаются двоичные числа от 0000000 до 1111111 . В десятичной системе счисления это числа от 0 до 127 . Всего 128 значений, которые разделяются поровну между положительными и отрицательными значениями порядка в диапазоне от -63 до 63 .

Связь между смещенным порядком S и математическим P в данном случае выражается формулой:

$$S = P + 64_{10} = P + 100\ 0000_2.$$

Пример 3. Записать внутреннее представление числа 250,1875 в форме с плавающей точкой в 4-х байтовом машинном слове.

Решение:

1. Переведем число в двоичную систему счисления с 24 значащими цифрами (3 байта под мантиссу):

$$250.1875_{10} = 11111010,0011000000000000_2.$$

2. Запишем в форме нормализованного двоичного числа с плавающей точкой: $0,111110100011000000000000 \cdot 10^{1000}_2$. Здесь мантисса, основание системы счисления ($2_{10} = 10_2$) и порядок ($8_{10} = 1000_2$) записаны в двоичной системе.

3. Вычислим характеристику: $S_2 = 1000 + 1000000 = 1001000$.

4. Запишем представление числа в 4-байтовой ячейке памяти с учетом знака числа:

0	1001000	11111010	00110000	00000000
---	---------	----------	----------	----------

Шестнадцатеричная форма: 48FA3000.

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ

Выполнение арифметических действий над числами с плавающей запятой гораздо сложнее целочисленной арифметики. Для некоторых процессоров (в частности Intel) операции над вещественными числами вынесены в отдельный узел, который называют математическим сопроцессором.

Сложение чисел с плавающей запятой выполняется в соответствии со следующим алгоритмом.

- 1. Представить числа A и B в нормализованном виде, записав отдельно значения мантисс и порядков.**
- 2. Выровнять порядки по числу с большим порядком.**
- 3. Выровнять число цифр в мантиссах по числу, порядок которого не изменился.**
- 4. Сложить числа.**
- 5. Нормализовать сумму, оставив число цифр в мантиссе таким, как у числа, порядок которого не изменялся.**

Пример. Найти сумму чисел $A = 9,6098$ и $B = 98,009$ по правилу сложения чисел с плавающей запятой.

Решение:

Результат представим в виде таблицы:

Шаг	Число	Нормализованное число	Порядок	Мантисса	Число цифр в мантиссе
1	$A=9,6098$	$0,96098 \cdot 10^1$	1	96098	5
	$B=98,009$	$0,98009 \cdot 10^2$	2	98009	5
2	A	$0,096098 \cdot 10^2$	2	096098	6
3	A	$0,09609 \cdot 10^2$	2	09609	5
4	$A+B$	$1,07618 \cdot 10^2$	2	-	-
5	$A+B$	$0,101761 \cdot 10^3$	3	10761	5