

Преобразование логических выражений

Составила: Антонова Е.П.
По задачку-практикуму под ред.
Семакина И.Г.
2008г.

Нормальный вид формулы

- Табличный способ определения истинности сложного выражения имеет ограниченное применение, так как при увеличении числа логических переменных приходится перебирать слишком много вариантов. В таких случаях используют способ приведения формул к **нормальной форме**.
- *Формула имеет нормальную форму, если в ней отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, при этом знаки отрицания находятся только при переменных.*

Основные формулы преобразования логических выражений:

1. $\neg \neg A \equiv A.$

2. $\neg (A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B.$

3. $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B.$

4. $\neg (A \rightarrow B) \equiv A \& \neg B.$

5. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B.$

6. $A \leftrightarrow B \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B) \equiv (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B).$

7. $A \& (A \vee B) \equiv A.$

8. $A \vee A \& B \equiv A.$

9. $\neg A \& (A \vee B) \equiv \neg A \& B.$

Основные формулы преобразования логических выражений (продолжение)

10. $A \vee \neg A \ \& \ B \equiv A \vee B.$

11. Законы коммутативности:

$$A \ \& \ B \equiv B \ \& \ A;$$

$$A \ \vee \ B \equiv B \ \vee \ A.$$

12. Законы ассоциативности:

$$(A \ \vee \ B) \ \vee \ C \equiv A \ \vee \ (B \ \vee \ C);$$

$$(A \ \& \ B) \ \& \ C \equiv A \ \& \ (B \ \& \ C).$$

13. Законы идемпотентности:

$$A \ \vee \ A \equiv A;$$

$$A \ \& \ A \equiv A.$$

14. Законы дистрибутивности:

$$A \ \& \ (B \ \vee \ C) \equiv (A \ \& \ B) \ \vee \ (A \ \& \ C);$$

$$A \ \vee \ (B \ \& \ C) \equiv (A \ \vee \ B) \ \& \ (A \ \vee \ C).$$

15. $A \ \vee \ 1 \equiv 1, \ A \ \& \ 1 \equiv A, \ \neg A \ \vee \ A \equiv 1.$

16. $A \ \& \ 0 \equiv 0, \ A \ \& \ \neg A \equiv 0.$

Пример 1: Упростить логическую формулу:

$$\overline{(A \vee B) \rightarrow (B \vee C)}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \overline{(A \vee B) \rightarrow (B \vee C)} &= \{4\} \overline{(A \vee B) \& \overline{(B \vee C)}} = \\ \{1\} \overline{(A \vee B) \& (B \vee C)} &= \{14\} \overline{(A \vee B) \& B \vee (A \vee B) \& C} = \\ \{11 \text{ и } 14\} \overline{A \& B \vee B \vee A \& C \vee B \& C} &= \\ \{15 \text{ и } 14\} \overline{B \& (A \vee 1) \vee C \& (A \vee B)} &= \overline{B \vee A \& C \vee B \& C} = \\ \{11 \text{ и } 12\} \overline{B(1 \vee C) \vee A \& C} &= \{15\} \overline{B \vee A \& C}. \end{aligned}$$

В скобках указан номер формулы, по которой было преобразование

Пример 2

Переведите к виду логической формулы высказывание: «Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда, когда нет ветра».

Решение. Определим следующие простые высказывания:

- П — «пасмурная погода»;
- Д — «идет дождь»;
- В — «дует ветер».
- Тогда соответствующее логическое выражение запишется в виде:

$$\overline{П \rightarrow (Д \leftrightarrow \overline{В})}.$$

Пример 3

Кто из учеников А, В, С и D играет, а кто - не играет в шахматы, если известно следующее:

- а) если А или В играет, то С не играет;
- б) если В не играет, то играют С и D;
- в) С играет?

Решение. Определим следующие простые высказывания:

А — «ученик А играет в шахматы»;

В — «ученик В играет в шахматы»;

С — «ученик С играет в шахматы»;

D — «ученик D играет в шахматы».

Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:

Решение:

а) $(A \vee B) \rightarrow \neg C$;

б) $\neg B \rightarrow C \ \& \ D$;

в) C .

Запишем произведение указанных сложных высказываний:

$$((A \vee B) \rightarrow \neg C) \ \& \ (\neg B \rightarrow C \ \& \ D) \ \& \ C.$$

Упростим эту формулу:

$$(A \vee B) \rightarrow \neg C =$$

Ответ: в шахматы играют ученики C и D, а ученики A и B — не играют.

Задача 1

Упростите выражение, используя минимум законов логических операций:

$$1) \overline{x} \vee \overline{x \vee y} \vee \overline{y \wedge x \wedge y};$$

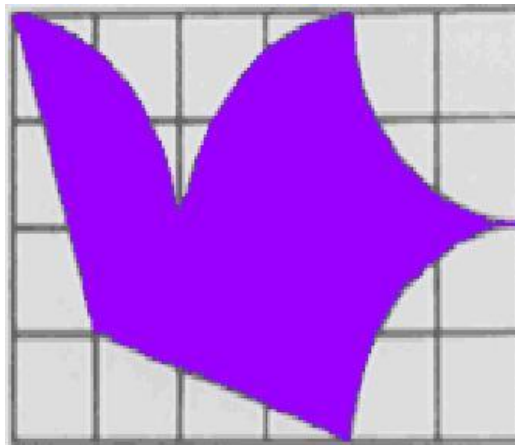
$$2) \overline{x \vee y \vee \overline{x \wedge y}} \wedge \overline{y \vee x}.$$

Задача 2

Определите значение формул:

1) $((C \vee B) \rightarrow B) \& (A \& B) \rightarrow B;$

2) $((C \vee B) \rightarrow B) \& (A \vee B) \rightarrow B.$



Задача 3

Определите, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:

- 1) если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал;
- 2) если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

Задача 4

Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший ребят, высказал предположения:

- 1) Аня пойдет в кино только тогда, когда пойдут Вика и Сергей;
- 2) Аня и Сергей пойдут в кино вместе или же оба останутся дома;
- 3) чтобы Сергей пошел в кино, необходимо, чтобы пошла Вика.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два.

Кто из ребят пошел в кино? Решить задачу с помощью логических операций.

ЕГЭ 2010г.

- Какое логическое выражение равносильно выражению

$$\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge C?$$

- 1) $\neg A \vee B \vee \neg C$
- 2) $A \wedge B \wedge C$
- 3) $(A \vee B) \wedge C$
- 4) $(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C$

решение

- Целью выполнения данного задания является осуществление проверки умений строить и преобразовывать логические выражения.
- Воспользовавшись законом де Моргана и двойного отрицания, преобразуем исходное логическое выражение:
- $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge C = \neg\neg A \wedge \neg\neg B \wedge C = A \wedge B \wedge C.$
- *Номер ответа: 2.*