

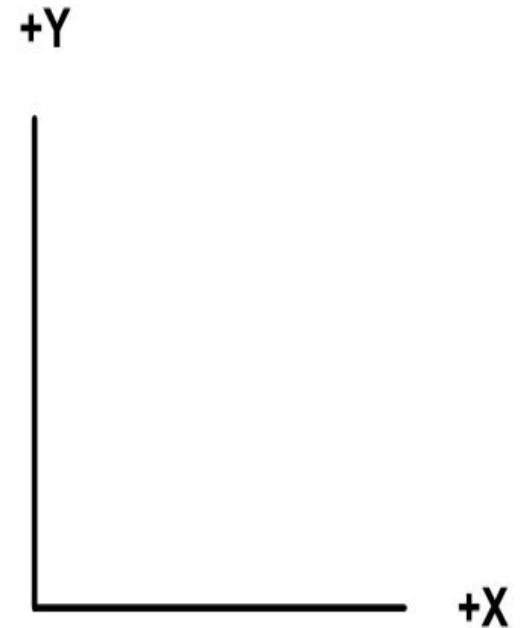
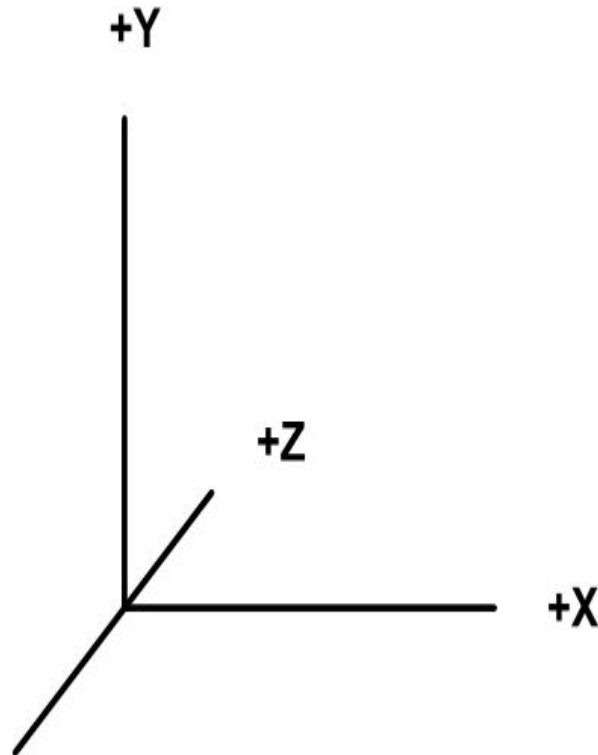
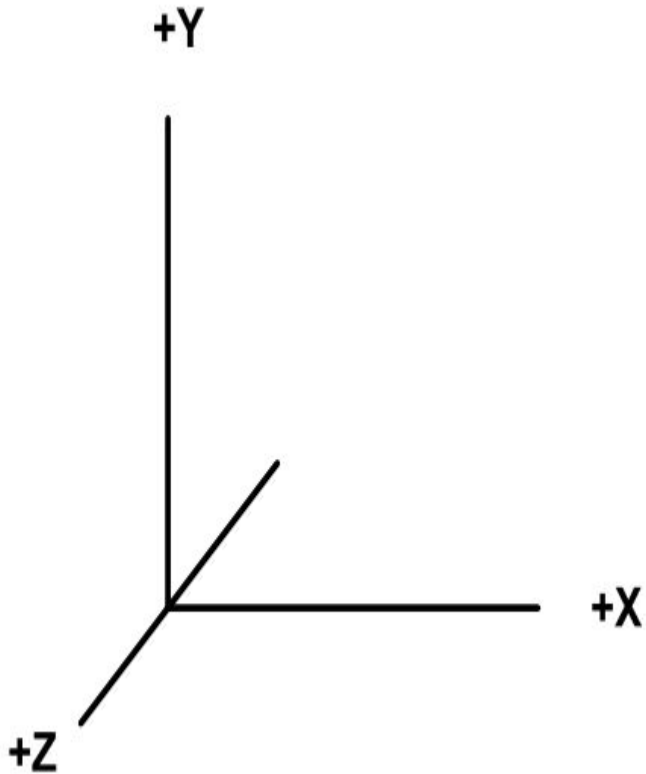
## 4. Преобразования проецирования

# Системы координат

Правосторонняя

Левосторонняя

Оконная



# Преобразования координат

Мировые координаты

Модельно-видовое преобразование

Модельно- видовая матрица

Видовые координаты

Преобразование проекции и нормализация

Матрица проекции

Нормализованные координаты

Преобразование к области вывода

Параметры области вывода (glViewport)

Оконные координаты

# Формирование изображения камерой

1. Установить штатив и направить камеру на сцену (видовое преобразование).
2. Подготовить сцену в нужной композиции (модельное преобразование).
3. Подобрать объектив или отрегулировать масштабирование (преобразование проекции).
4. Определить размер изображения (преобразование в порт просмотра).

# Системы координат OpenGL

1. Правосторонняя: модельно-видовые преобразования.
2. Левосторонняя: установка параметров проецирования.
3. Оконная: преобразование в порт просмотра.

# Проекции



# Плоские геометрические проекции объектов

Плоские геометрические проекции объектов образуются пересечением прямых, называемых проекторами, с плоскостью, называемой центром проекции.

Проекторы – это прямые, проходящие через произвольную точку, называемую центром проекции, и каждую точку объекта.

# Перспективные и параллельные проекции

Перспективная проекция: центр проекции расположен в конечной точке трехмерного пространства.

Параллельная проекция: центр проекции расположен в бесконечности (проекторы параллельны).



# Ортогографические проекции

Ортогографические проекции – это проекции на одну из координатных плоскостей  $x = 0$ ,  $y = 0$  или  $z = 0$ .

$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# АксонOMETрические проекции

АксонOMETрические проекции – это проекции на плоскость, не являющуюся одной из координатных плоскостей  $x = 0$ ,  $y = 0$  или  $z = 0$ .

Триметрическая проекция строится произвольными поворотами вокруг произвольных координатных осей в произвольном порядке с последующим проецированием на плоскость  $z = 0$ .

Диметрическая проекция – это триметрическая проекция с двумя одинаковыми коэффициентами искажения и произвольным третьим коэффициентом.

Изометрическая проекция – это триметрическая проекция, в которой все три коэффициента искажения равны

# Триметрическая проекция

$$T = P_z R_x(\theta) R_y(\varphi)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & -\sin \theta \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x^* & x_y^* & x_z^* & 0 \\ y_x^* & y_y^* & y_z^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_x = \sqrt{x_x^{*2} + y_x^{*2}}, f_y = \sqrt{x_y^{*2} + y_y^{*2}}, f_z = \sqrt{x_z^{*2} + y_z^{*2}}$$

# Диметрическая проекция

$$T = P_z R_x(\theta) R_y(\varphi)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & -\sin \theta \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x^* & x_y^* & x_z^* & 0 \\ y_x^* & y_y^* & y_z^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_x = \sqrt{x_x^{*2} + y_x^{*2}}, f_y = \sqrt{x_y^{*2} + y_y^{*2}}, f_z = \sqrt{x_z^{*2} + y_z^{*2}}$$

$$f_x^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = f_y^2 = \cos^2 \theta$$

$$f_z^2 = \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$$

$$\theta = \arcsin(\pm f_z / \sqrt{2}), \varphi = \arcsin(\pm f_x / \sqrt{2 - f_z^2})$$

# Изометрическая проекция

$$T = P_z R_x(\theta) R_y(\varphi)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & -\sin \theta \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x^* & x_y^* & x_z^* & 0 \\ y_x^* & y_y^* & y_z^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_x = \sqrt{x_x^{*2} + y_x^{*2}}, f_y = \sqrt{x_y^{*2} + y_y^{*2}}, f_z = \sqrt{x_z^{*2} + y_z^{*2}}$$

$$f_x^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = f_y^2 = \cos^2 \theta = f_z^2 = \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$$

$$\theta = \arcsin(\pm\sqrt{1/3}) = \pm 35.26^\square, \varphi = \arcsin(\pm 1/2) = \pm 45^\square$$

# Косоугольные проекции

Косоугольная проекция – это проекция, которая формируется параллельными проекторами, расположенными под косым углом к плоскости проекции.

Проекция кавалье получается когда угол между проекторами и плоскостью проекции составляет  $45^\circ$ .

Проекция кабине получается когда угол между проекторами и плоскостью проекции составляет  $\arctg(1/2)$ .

# Проекции кавалье и кабине

$$T_{\text{кавалье}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.433 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\text{кабине}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.866 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Перспективные проекции

Перспективная проекция получается в результате перспективного преобразования.

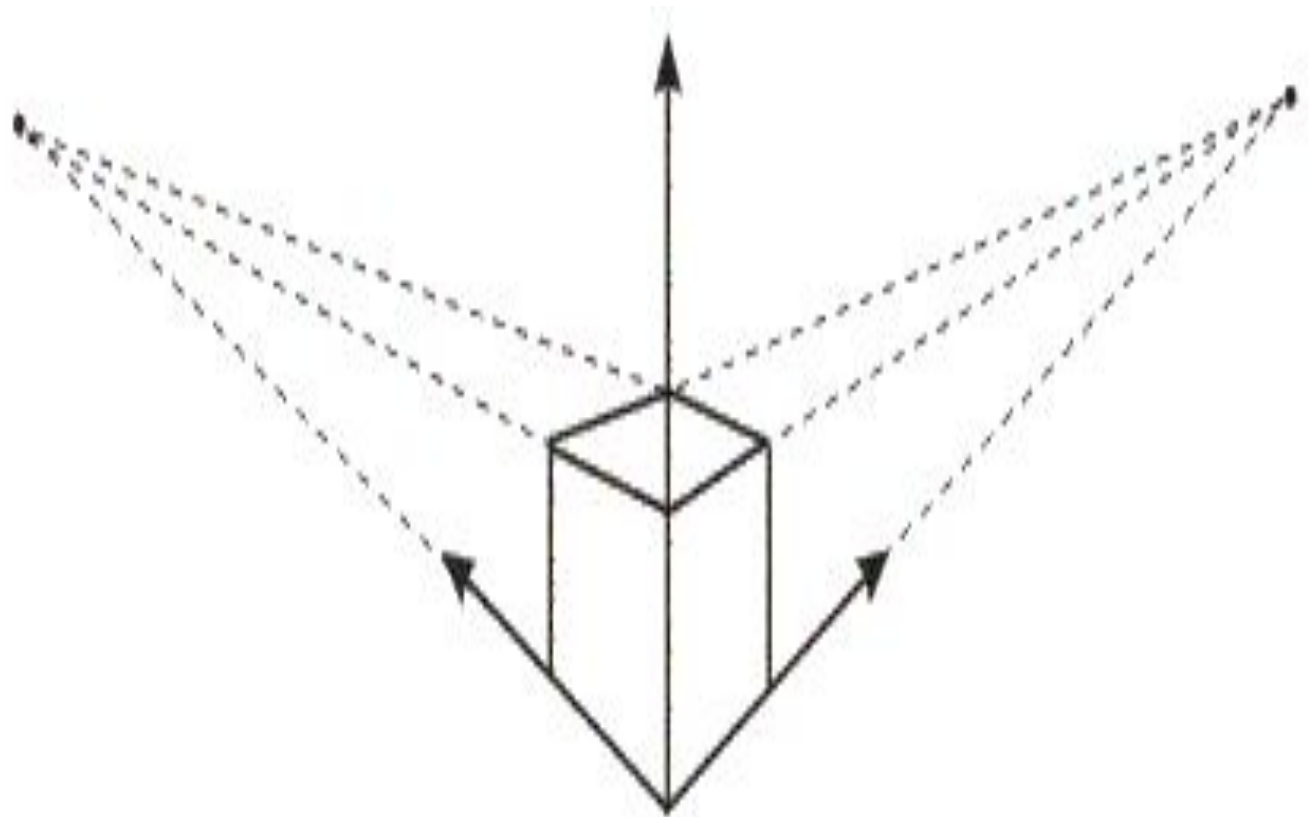
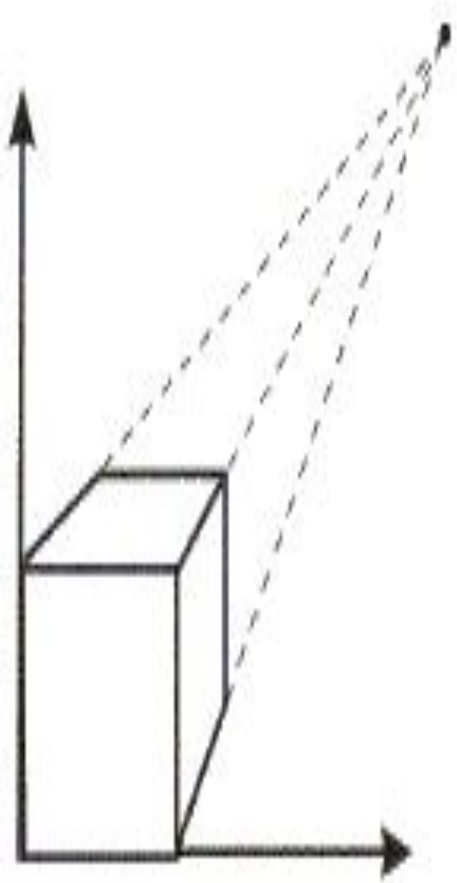
При перспективном преобразовании параллельные прямые сходятся, размер объекта уменьшается с увеличением расстояния до центра проекции и происходит неоднородное искажение линий объекта, зависящее от ориентации и расстояния от объекта до центра проекции.

Перспективная проекция любой совокупности параллельных прямых, которые не параллельны проекционной плоскости, будет сходить в точке схода. Если совокупность прямых параллельна одной из главных координатных осей, то их точка схода называется главной точкой схода.

Перспективные проекции классифицируются в зависимости от числа главных точек схода, которыми они обладают, т.е. от числа координатных осей, которые пересекают проекционную плоскость.



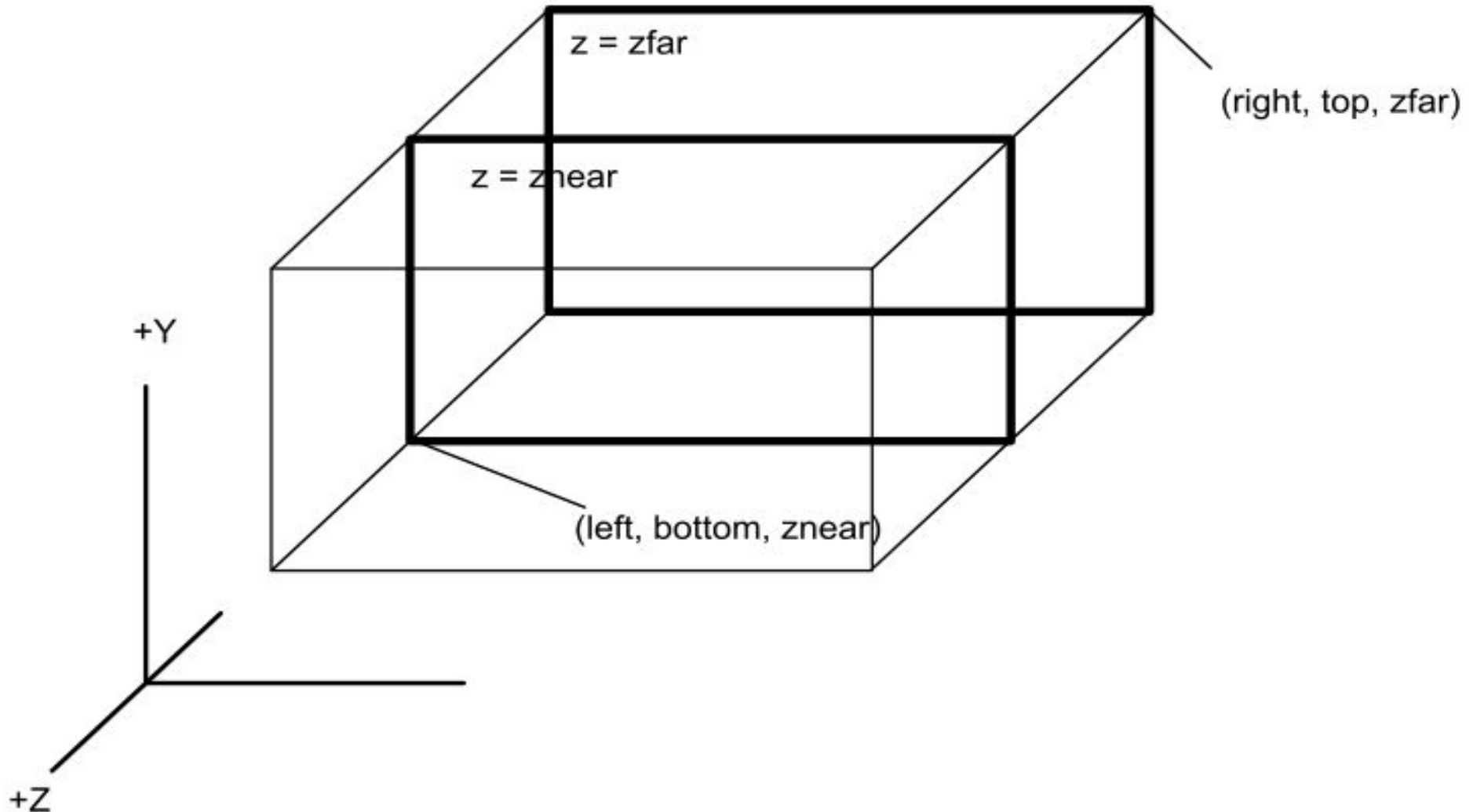
# Примеры перспективных проекций



# Общая форма однородных координат

$$A = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix}$$

# Ортогографическое проецирование в OpenGL



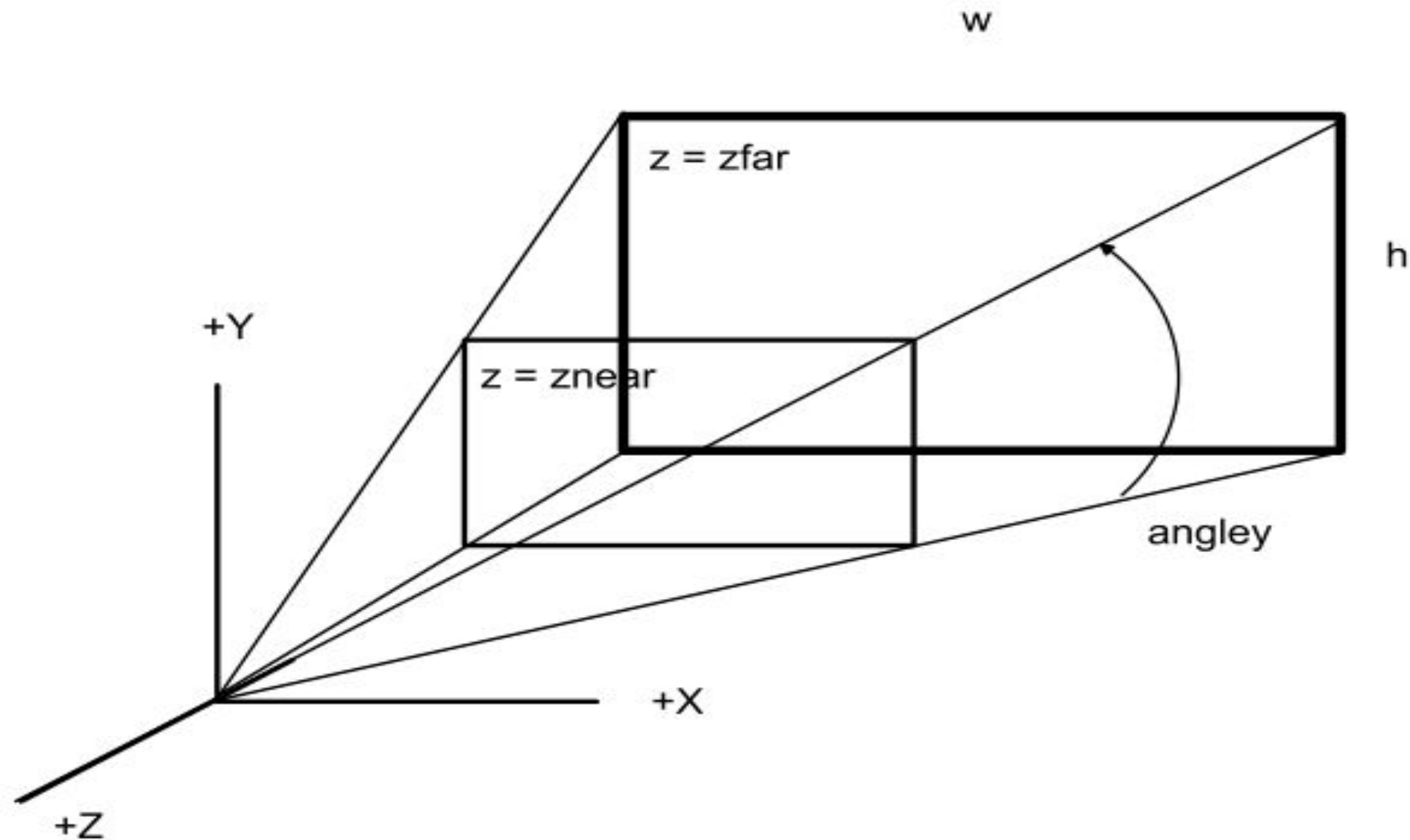
# Функции ортографического преобразования

```
void glOrtho(GLdouble l, GLdouble r, GLdouble b,  
             GLdouble t, GLdouble n, GLdouble f);
```

```
void gluOrtho2D(GLdouble l, GLdouble r,  
               GLdouble b, GLdouble t);
```

```
// glOrtho(l, r, b, t, -1.0, 1.0);
```

# Перспективное проецирование в OpenGL



# Матрица перспективного проецирования

$$F_{e1} = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & f \cdot n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad A_1 = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & f \cdot n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} nx_e \\ ny_e \\ fz_e + fn \\ -z_e \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} \frac{nx_e}{-z_e} \\ \frac{ny_e}{-z_e} \\ \frac{fz_e + fn}{-z_e} \\ 1 \end{vmatrix}$$

# Функции перспективного преобразования

```
void glFrustum(GLdouble l, GLdouble r,  
              GLdouble b, GLdouble t, GLdouble n,  
              GLdouble f);
```

```
void gluPerspective(GLdouble angle, GLdouble  
                  aspect, GLdouble n, GLdouble f);
```

```
 $t = n * \text{tg}(\pi / 180 * \text{angle} / 2);$ 
```

```
 $b = -t;$ 
```

```
 $r = t * \text{aspect};$ 
```

```
 $l = -r;$ 
```

# Пример программы

```
...  
void setShape(float vAng, float asp, float nearD, float  
    farD)  
{  
    glMatrixMode(GL_PROJECTION);  
    glLoadIdentity();  
    gluPerspective(vAng, asp, nearD, farD);  
}  
...  
setShape(30.0f, 64.0f/48.0f, 0.5f, 50.0f);  
...
```



# Пример программы

