

Лекция 3. Применение линейного программирования в математических моделях

Содержание лекции:

1. Принцип оптимальности в планировании и управлении
2. Задача линейного программирования
3. Симплексный метод
4. Экономические приложения линейного программирования
5. Программное обеспечение линейного программирования



Литература

- *Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — глава 2.*
- *Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.*
- *Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.*
- *Светлов Н.М., Светлова Г.Н. Построение и решение оптимизационных моделей средствами программ MS Excel и ХА: Методические указания для студентов экономического факультета / РГАУ – МСХА имени К.А. Тимирязева. М., 2005. http://svetlov.timacad.ru/umk1/xa_1.doc*



3.1. Принцип оптимальности в планировании и управлении

- Принцип оптимальности предполагает следующее:
 - ◆ наличие определённых ресурсов
 - ◆ наличие определённых технологических возможностей
 - ◆ цель хозяйственной деятельности
 - ◆ извлечение прибыли
 - ◆ удовлетворение потребностей
 - ◆ предотвращение угрозы
 - ◆ накопление знаний
 - ◆ и т.д.
- Суть принципа:
 - ◆ планировать хозяйственную деятельность таким образом, чтобы при имеющихся ресурсах и технологиях *не существовало* способа достичь цели в большей степени, чем это предусматривает план
- В полной мере этот принцип может быть реализован только с помощью экономико-математических моделей

3.2. Задача линейного программирования

$$\max (\min) c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_2,$$

\dots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_m,$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots n$$

Линейная
целевая
функция

Линейные
ограни-
чения

Условия
неотрицательности
переменных

♦ Это **развёрнутая** форма записи

3.2. Задача линейного программирования

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Линейная целевая функция

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1 \text{K } m$$

Линейные ограничения

$$x_j \geq 0, j = 1 \text{K } n; b_i \geq 0, i = 1 \text{K } m$$

Условия неотрицательности переменных

Любую ЗЛП можно записать в каноническом виде (ограничения – равенства, свободные члены неотрицательны, решается на максимум)

♦ Это **каноническая** форма записи

3.2. Задача линейного программирования

$$\max \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Линейная целевая
функция

Линейные
ограни-
чения

Условия
неотрицательности
переменных

- ◆ Это **матричная** форма записи
 - Она тождественна канонической форме

3.2. Задача линейного программирования

$$\max (\min) \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \{ \leq, =, \geq \} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Линейная
целевая
функция

Условия
неотрицательности
переменных

Линейные
ограни-
чения

- ◆ Это **стандартная** форма записи



3.2.

- ♦ Любой вектор x , удовлетворяющий ограничениям и условиям неотрицательности (безотносительно к целевой функции), называется допустимым решением
 - ♦ Если допустимых решений не существует, говорят, что система ограничений несовместна
- ♦ Областью допустимых решений (ОДР) называется множество, включающее *все допустимые решения* данной ЗЛП
- ♦ Допустимое решение x^* , доставляющее наибольшее значение целевой функции среди всех допустимых решений данной ЗЛП, называется оптимальным решением
 - ♦ часто его называют просто решением ЗЛП



3.2.

◆ ЗЛП может:

◆ не иметь ни одного оптимального решения

- допустимой области не существует – система ограничений не совместна

Компактная запись

$$z = \max(x_1 + x_2 | x_1 + 5x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

- допустимая область существует, но не ограничивает целевую функцию

$$z = \max(2x_1 + x_2 | 0.1x_1 + 0.1x_2 \geq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

◆ иметь одно оптимальное решение

$$z = \max(x_1 + x_2 | 0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

$$x_1 = 50, x_2 = 0; z = 50$$

◆ иметь бесконечно много оптимальных решений

$$z = \max(x_1 + x_2 | 0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

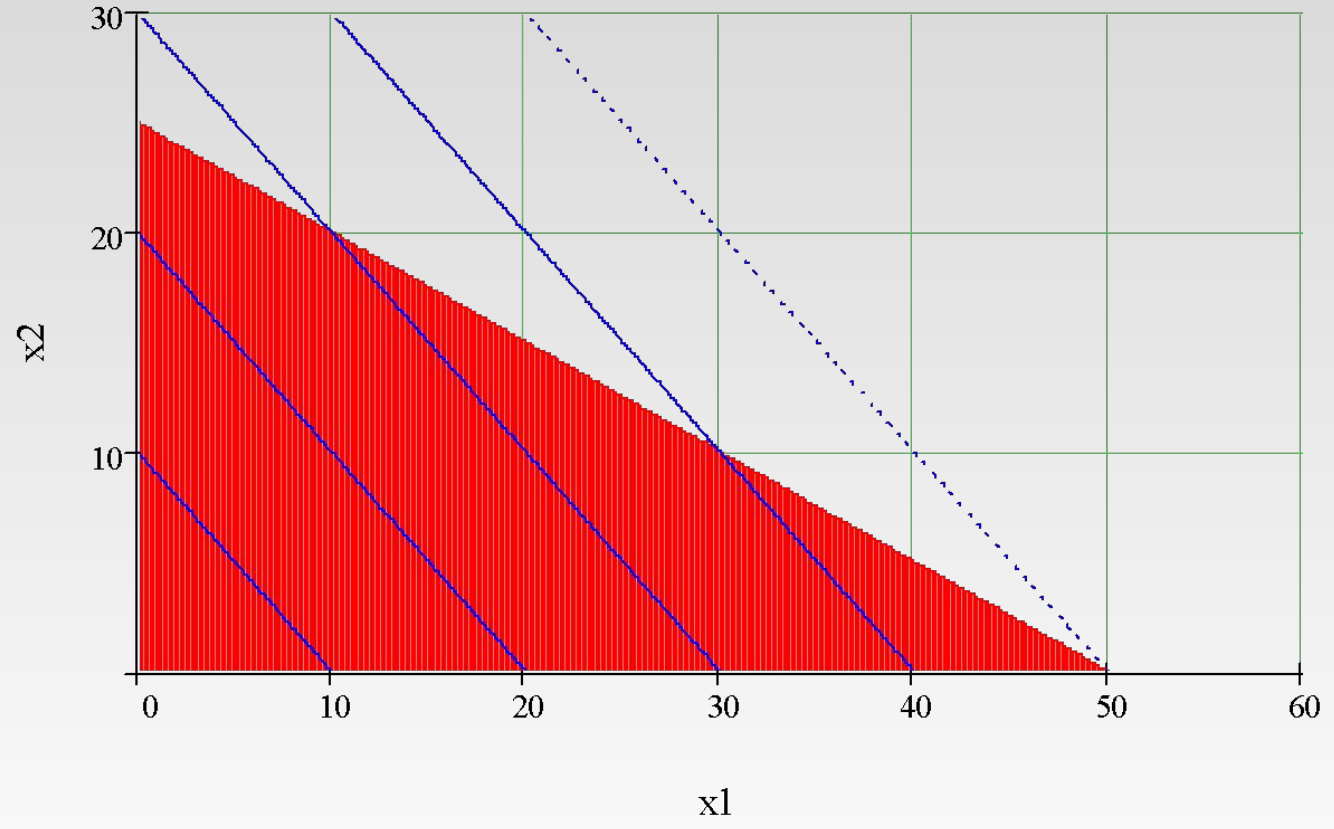
$$x_1 = 50, x_2 = 0; z = 50 \dots x_1 = 0, x_2 = 50; z = 50$$



3.2.

$$z = \max(x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

$x_1 = 50, x_2 = 0; z = 50$

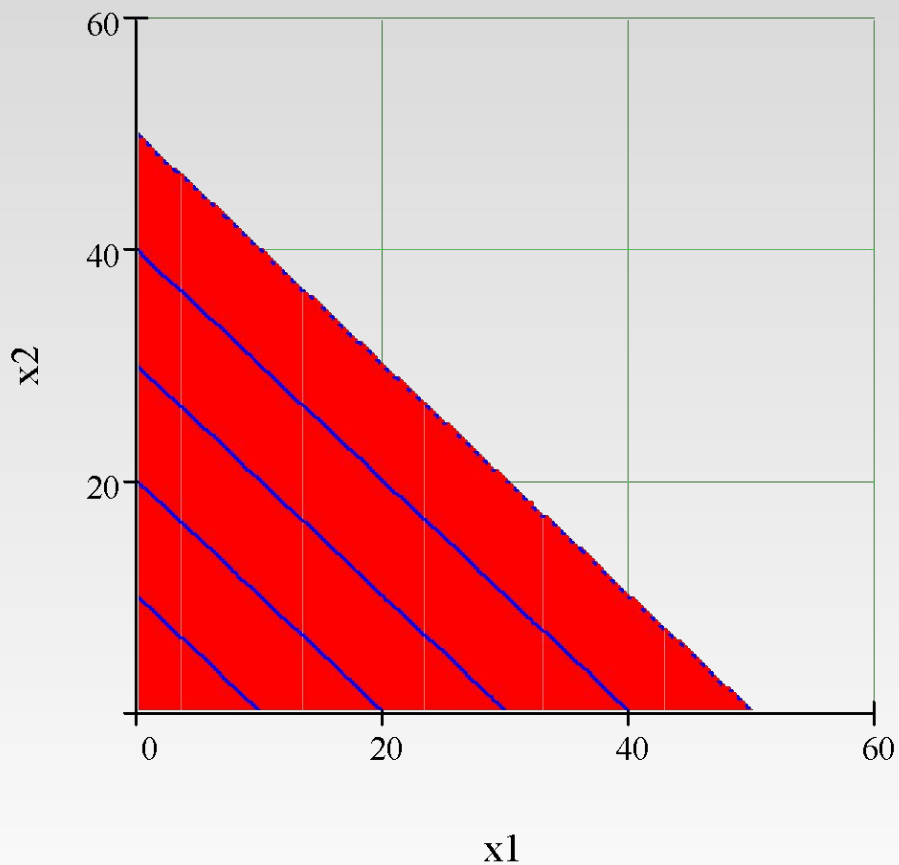




3.2.

$$z = \max(x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

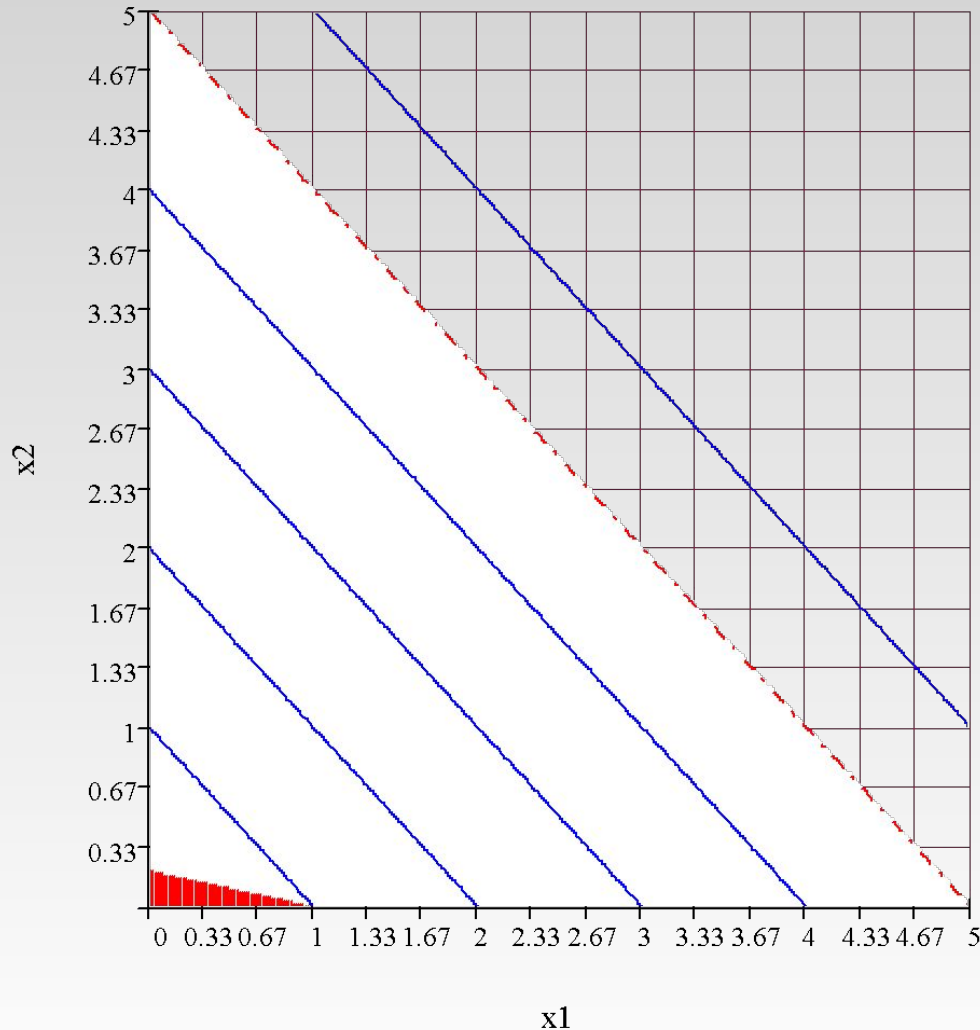
$x_1=50, x_2=0; z = 50 \dots x_1=0, x_2=50; z = 50$





3.2.

$$z = \max(x_1 + x_2 \mid x_1 + 5x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

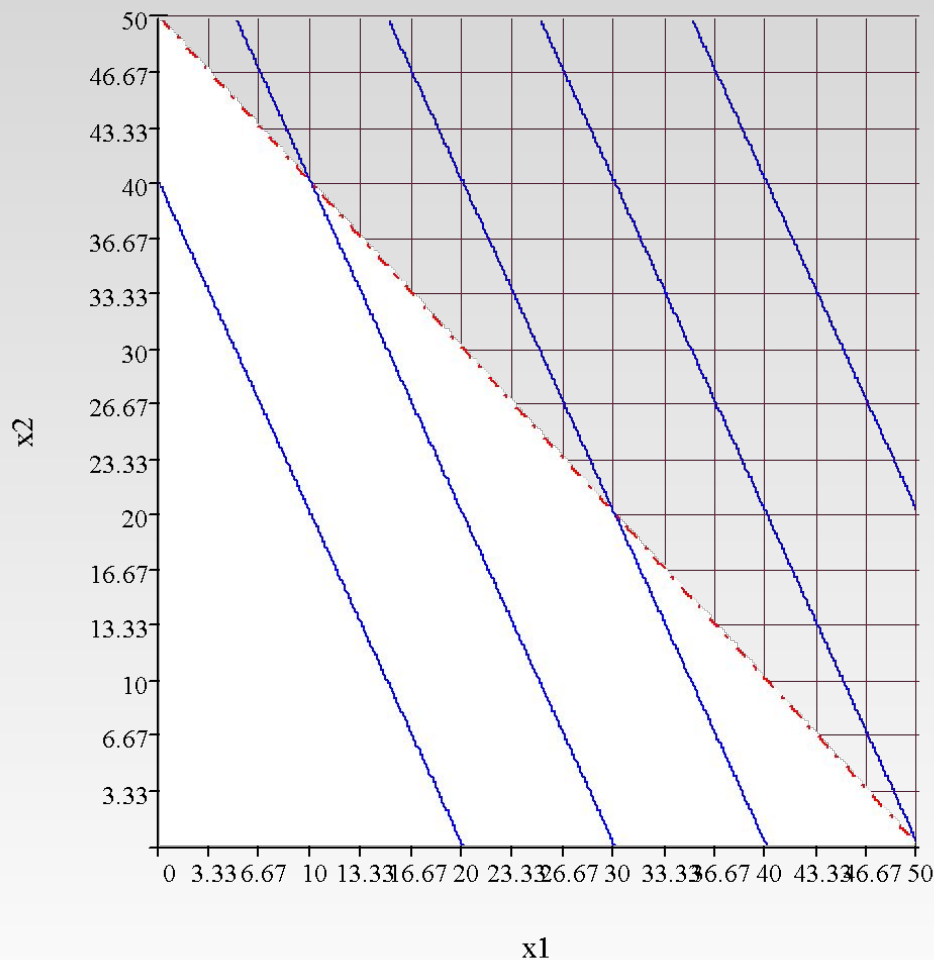


Несовместность системы ограничений



3.2.

$$z = \max(2x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.1x_2 \geq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$



Неограниченность
целевой функции

3.3. Симплексный метод

- Исходные условия применения симплексного метода
 1. ЗЛП записана в канонической форме
 2. Её ограничения линейно независимы
 3. Известно *опорное решение*, в котором:
 - ♦ имеется не более m ненулевых переменных
 - задача содержит n переменных и m ограничений
 - ♦ все ограничения выполняются
 4. m переменных, называемых базисными (среди которых все ненулевые) выражены через:
 - ♦ $n-m$ переменных, называемых свободными (каждая равна нулю)
 - ♦ свободный член ограничения
 5. Результат этой процедуры записан в начальную (первую, исходную) симплексную таблицу



3.3.

$$z = \max(x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 5, x_1 - 2x_2 \leq 75, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

$$x_1 = 50, x_2 = 0; z = 50$$

Каноническая форма:

$$\begin{aligned} \max & x_1 + x_2 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$ $i = 1$	$j = 4$ $i = 2$	b
$C_j, C_i \Rightarrow$	1	1	0	0	0
$i = 1$	0.1	0.2	1	0	5
$i = 2$	1	-2	0	1	75

3.3.

- ◆ Разрешающий столбец:
 - ◆ столбец с наибольшим положительным c_j
 - если положительного c_j нет, достигнут оптимум
- ◆ Разрешающая строка:
 - ◆ для всех положительных a_{ij} в **выбранном столбце** считаем b_i/a_{ij}
 - если положительных нет, ц.ф. не ограничена
 - ◆ **выбираем строку** где это значение минимально

В таблице выделены жирным шрифтом

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$ $i = 1$	$j = 4$ $i = 2$	b
$c_j, c_j \Rightarrow$	1	1	0	0	0
$i = 1$	0.1	0.2	1	0	5
$i = 2$	1	-2	0	1	75

3.3.

- Выполняем *обыкновенные жордановы исключения* во всей таблице:
- для строк $i \neq i'$: $a_{ij_{\text{нов}}} = a_{ij} - a_{i'j} a_{ij'} / a_{i'j'}$, где i' и j' – координаты выбранных (разрешающих) строки и столбца
- для строки $i = i'$: $a_{ij_{\text{нов}}} = a_{ij} / a_{i'j'}$

	$j = 1$ $i = 1$ (50)	$j = 2$ (0)	$j = 3$ (0)	$j = 4$ $i = 2$ (25)	b
$C_j, C_i \Rightarrow$	0	-1	-10	0	-50
$i = 1$	1	2	10	0	50
$i = 2$	0	-4	-10	1	25

Положительных C_j больше нет – достигнут **ОПТИМУМ** (в больших задачах для этого требуются тысячи итераций)



- Опорное решение может быть получено по следующей процедуре:

3.3.

1. Выбираем произвольный набор базисных переменных и выражаем их через свободные
2. Если строк с отрицательными свободными членами нет – опорное решение получено; иначе – п.3.
3. Одну из таких строк выбираем в качестве вспомогательной целевой функции и проводим по ней процедуру решения **на МИНИМУМ**, используя алгоритм симплекс-метода
 - ♦ Если в качестве разрешающей выбирается строка с отрицательным свободным членом, то разрешающий элемент тоже должен быть отрицательным
 - для **всех** a_{ij} в выбранном столбце считаем b_i/a_{ij}
 - наименьшее **положительное** значение этого отношения указывает разрешающую строку
 - если положительных нет, выбираем другую строку с отрицательным свободным членом в качестве вспомогательной целевой функции
 - если таковых не находится, опорных решений не существует (целевая функция не ограничена множеством допустимых решений)
4. Если оптимум достигнут при отрицательном свободном члене – система ограничений несовместна; иначе – п.5
5. Как только достигнуто положительное значение свободного члена, переходим к п.2.



3.3.

В некоторых случаях алгоритм симплексного метода может зацикливаться.

Пути преодоления этой проблемы описаны в рекомендуемой литературе.

3.4. Экономические приложения линейного программирования

Основная задача народного планирования

x – объёмы производства
(т, шт., м³ и т.д.)
 y – объём удовлетворения

Целевая функция: $\max y$

Балансы невозпроизводимых ресурсов: $A_1 x \leq b$

Балансы воспроизводимых ресурсов: $A_2 x \leq 0$

Баланс продукции: $A_3 x \geq c$

$x \geq 0, y \geq 0.$

Матрица потребности в ресурсах для

Объёмы невозпроизводимых ресурсов

Матрица затрат (+) и выпуска (-) ресурсов
при единичном объёме производства в

Матрица выпуска (+) конечной продукции

Вектор объёмов потребления каждого вида
конечной продукции при единичном
(стандартном) уровне удовлетворения
потребностей

3.4. Экономические приложения линейного программирования

Основная задача производства и планирования

\mathbf{x} = (объёмы реализации продукции)
(т, шт., м³ и т.д.)

\mathbf{y} = (объёмы закупки ресурсов)
(т, шт., м³ и т.д.)

Целевая функция: \max

Балансы ресурсов: $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{y} + \mathbf{b}_1$

(например, работники, производственные помещения, оборудование, сырьё, электроэнергия и т.п.)

Выполнение обязательств: $\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2$

(например, налог на имущество, возврат и инвестиционного кредита и т.п.)

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$

Вектор цен

Объёмы обязательств, имеющих
у предприятия и учитываемых при
оптимальном планировании
(выполнение которых зависит от
составленного плана)

реализации
единицы продукции
каждого вида

3.5. Программное обеспечение линейного программирования

Microsoft Excel - Пример_XA.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Аrial 10 Ж К Ц

xatable = n

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2	Moloko	XATITLE	maximize yes	LPCMD	имена переменных					XACS
3	Комментарии	n	mol	kefir	smetana	min	max	summa	dv_ocenka	
4	Потребность в молоке	moloko	1.01	1.01	9.45		140	140	444.4444	UB
5	Основное оборуд-е	vr_mol_kef	0.2	0.166667			21	21	3006.667	UB
6	Аппарат по р/ф смет	vr_smet			3.33333		16	10.90853		BS
7	Молока не менее	MAX								
8	Кефира не менее	MIN	90	10						
9	ЦФ	cost	800	950	4200					
10							целевая функция			XACA XACR
11	переменные	peremen	90	18	3.27196	102842.2	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION		
12	оценка	ocenka	-250.222							
13			LB	BS	BS					XAVS
14										Найти XA
15		XAOUTPUT		XAVR	XAVA					
17			Writing to XAOUTPUT Range							
18			Loading Data Range: LPCMD							

Запуск решения – [Ctrl]+[x]



3.5.

- Два способа установки ХА
 - ◆ Если есть права доступа к каталогу C:\WINDOWS
 - ◆ копируем туда файлы CXА32.DLL и САХА32.DLL
 - ◆ Иначе
 - ◆ копируем файлы CXА32.DLL и САХА32.DLL в ту папку, в которой решаем модель
 - ◆ после вызова файла модели нажимаем кнопку

Найти ХА

и указываем расположение любого из этих файлов

- это действие повторяется при каждом вызове Excel

- Антивирус Касперского блокирует выполнение ХА

- ◆ При первом вызове программы следует в ответ на предупреждение антивируса дать ему указание разрешать выполнение данной программы