Раздел 5.1а

Расчет линейной статической аэроупругости


© Hugues Beslier

Описание задачи

- Основное уравнение линейной аэроупругости записывается в виде

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{aa}} - \bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{aa}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}} = \mathbf{P}_{\mathbf{a}} + \left(\bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{ax}} - \mathbf{M}_{\mathbf{aa}}\mathbf{D}_{\mathbf{ar}}\mathbf{T}_{\mathbf{rR}}\mathbf{T}_{\mathbf{Rx}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$$

- Известны внешние нагрузки $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}$ и известна часть балансировочных параметров $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$.
- Задача: определить остальные балансировочные параметры и упругие деформации $\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}}$.
- Затем могут быть определены нагрузки, действующие на ЛА.

MSC SOFTWARE SIMULATING REALITY

Последовательность

- Сначала производится расчет балансировки жесткого ЛА.
- Затем, с учетом эффекта упругости.
- Для упругих деформаций используются 2 системы отсчета:
    - В *Restrained Analysis (расчет с защемление)* используется СК, связанная с *r-множеством* степеней свободы.
    - В *Unrestrained Analysis (расчет без защемления)* используется основная (связанная) СК.

MSC SOFTWARE
SIMULATING REALITY

«Жесткий» ЛА

- Если принебречь упругостью ЛА, то для балансировки требуется только результирующие силы.
- Уравнение равновесия результирующих сил получают проецированием основного уравнения на твердотельные формы
- При $\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$ проецирование даст

$$\left(\mathbf{m}_{\mathbf{rr}}\mathbf{T}_{\mathbf{rR}}\mathbf{T}_{\mathbf{Rx}} - \bar{q}\mathbf{D}_{\mathbf{ar}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{ax}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{ar}}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{a}}$$

- где $\mathbf{m}_{\mathbf{rr}} = \mathbf{D}_{\mathbf{ar}}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{\mathbf{aa}}\mathbf{D}_{\mathbf{ar}}$ матрица масс твердого тела.

«Жесткий» ЛА: Уравнение балансировки

- Уравнение балансировки:

$$\underbrace{\left(\mathbf{m}_{\mathbf{rr}}\mathbf{T}_{\mathbf{rR}}\mathbf{T}_{\mathbf{Rx}}}_{\text{Инерциальные нагрузки}} - \underbrace{\bar{q}\,\mathbf{D}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{ar}}\mathbf{Q}_{\mathbf{ax}}\right)}_{\text{Аэродинамические нагрузки}}\mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{D}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{ar}}\mathbf{P}_{\mathbf{a}}}_{\text{Внешние нагрузки}}$$

- Уравнение балансировки это система *nr* уравнений, которая позволяет определить *nr* из *nx* балансировочных параметров.

MSC SOFTWARE SIMULATING REALITY

«Жесткий» ЛА: Пример 1

- Маневр: стационарный продольный полет

- **Балансировочные параметры:**
  - 6 видов твердотельных ускорений
  - Угол атаки и скольжения
  - Скорости крена, тангажа и курса
  - Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления

- **Дано:**
  - Вертикальное ускорение: *g*
  - Другие виды ускорений: 0
  - Скорости крена, тангажа и курса: 0

- Определяемые величины:
  - Угол атаки и скольжения
  - Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления
  - Продольное ускорение (должно равняться нулю)

«Жесткий» ЛА: Пример 2

- Маневр: внезапное отклонение элерона
- **Балансировочные параметры:**
  - 6 видов твердотельных ускорений
  - Угол атаки и скольжения
  - Скорости крена, тангажа и курса
  - Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления
- **Дано**:
  - Угол отклонение элерона
  - Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления берутся из примера 1
  - Скорости крена, тангажа и курса: 0
  - Угол атаки и скольжения берутся из примера 1
- Определяемые величины:
  - Все ускорения

Виды задач

- В первом примере все балансировочные параметры постоянны во времени. Такая задача может называться *стационарным* балансировочным расчетом.
- Во втором примере балансировочные параметры зависят от времени. Уравнение балансировки решается только для одного фиксированного момента времени. Такая задача может называться *мгновенным* балансировочным расчетом.
- Мгновенный балансировочный расчет является квазистатической аппроксимацией динамической задачи.

Чрезмерная балансировка

- Число свободных балансировочных параметров может превышать число степеней свободы *r*- множества.
- В этом случае свободные балансировочные параметры определяются из условий что
  - уравнение балансировки выполняется и
  - Сумма квадратов балансировочных параметров минимальна

Упругий ЛА

- Уравнение равновесия результирующих сил

$$\left(\mathbf{m}_{\mathbf{rr}}\mathbf{T}_{\mathbf{rR}}\mathbf{T}_{\mathbf{Rx}} - \bar{q}\mathbf{D}_{\mathbf{ar}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{ax}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{ar}}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{a}} + \bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{aa}}\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}}\right)$$

Инерциальные нагрузки

Внешние нагрузки

Аэродинамические нагрузки

«Упругое» приращение

Упругие деформации

- Упругие деформации должны быть линейно независимыми от форм твердого тела
- Таким образом они могут быть записаны в виде

$$\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}} = \mathbf{D}_{\mathbf{al}}\mathbf{h}_{\mathbf{l}}$$

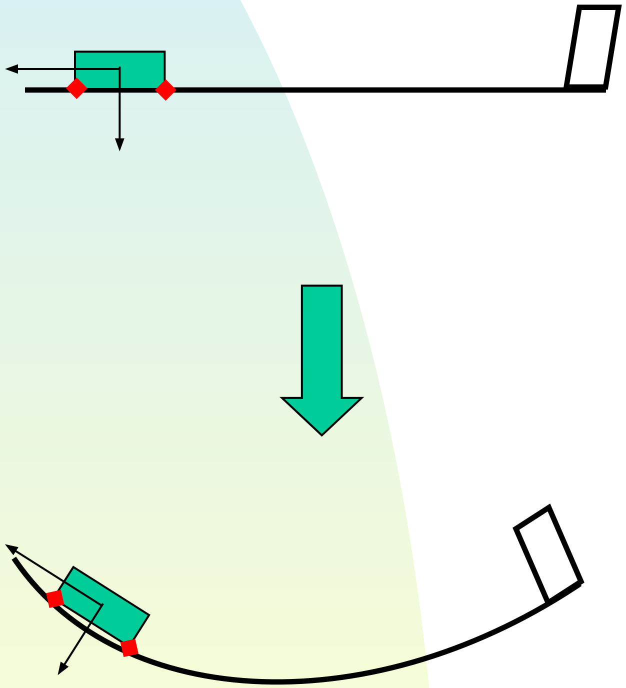
- *nl = na – nr* число столбцов матрицы $\mathbf{D}_{\mathbf{al}}$ - основная матрица упругих деформаций.
- Только при выполнении этого условия деформации будут линейно независимыми от форм твердого тела $\mathbf{D}_{\mathbf{ar}}$.

Связанная система координат

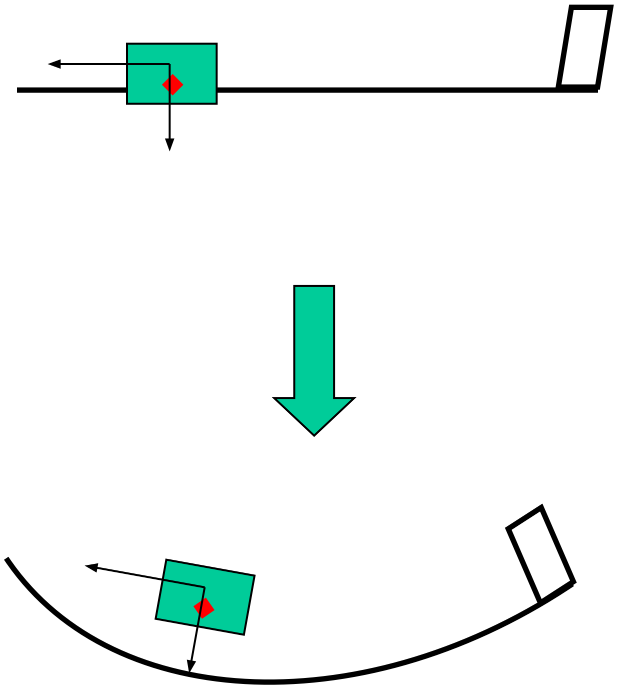
- Упругие деформации отображаются относительно связанной СК
- В *restrained analysis (расчет с защемлением)*, связанная СК движется вместе с твердым телом, присоединенная к *r*-множеству степеней свободы.
  - Упругие перемещения *r*-множества степеней свободы равны 0.
- В *unrestrained analysis (расчет без защемления)*, связанная СК движется с твердым телом, присоединенная к центру масс и главным осям инерции.
  - Эта система называется системой средних осей.

Связанная система координат

С защемлением



Без защемления



Restrained Analysis: упругий базис

- Упругим базисом удобно называть

$$\mathbf{D}_{\mathbf{al}} = \mathbf{J}_{\mathbf{al}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{ll}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{rl}} \end{bmatrix}$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{ll}}$ *nl*-размменрная единичная матрица и $\mathbf{0}_{\mathbf{rl}}$ - вырожденная матрица с *nr* строками и *nl* столбцами.

- Значить

$$\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{l}} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{ll}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{rl}} \end{bmatrix} \mathbf{h}_{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\mathbf{l}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{r}} \end{bmatrix}$$

следовательно $\mathbf{u}_{\mathbf{l}} = \mathbf{h}_{\mathbf{l}}$

Restrained Analysis: уравнение упругости

- Система *nl* уравнений получается проецированием основного уравнения на упругий базис:

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{ll}} - \bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{ll}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{l}} = \mathbf{P}_{\mathbf{l}} + \left[\bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{lx}} - \left(\mathbf{M}_{\mathbf{ll}}\mathbf{D}_{\mathbf{lr}} + \mathbf{M}_{\mathbf{lr}}\right)\mathbf{T}_{\mathbf{rR}}\mathbf{T}_{\mathbf{Rx}}\right]\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$$

- Индексом *l* обозначена часть матриц *l*-множества, соответствующая матрицам *a*-множества.
- Эта система уравнений позволяет записать уравнение упругих деформаций как функцию от балансировочных параметров и приложенных нагрузок.

Restrained Analysis: Основное решение

- За счет деформаций вносятся аэроупругие поправки во внешние нагрузки:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{l}}^{\mathbf{Pr}} = \left(\mathbf{K}_{\mathbf{ll}} - \bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{ll}}\right)^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}$$

- Деформации, за счет которых вносятся аэроупругие поправки в нагрузки, вызванные единичными балансировочными параметрами (единичное решение):

$$\mathbf{U}_{\mathbf{lx}}^{\mathbf{r}} = \left(\mathbf{K}_{\mathbf{ll}} - \bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{ll}}\right)^{-1}\left[\bar{q}\mathbf{Q}_{\mathbf{lx}} - \left(\mathbf{M}_{\mathbf{ll}}\mathbf{D}_{\mathbf{lr}} + \mathbf{M}_{\mathbf{lr}}\right)\mathbf{T}_{\mathbf{rR}}\mathbf{T}_{\mathbf{Rx}}\right]$$

- В таком случае $\mathbf{u}_{\mathbf{l}} = \mathbf{u}_{\mathbf{l}}^{\mathbf{Pr}} + \mathbf{U}_{\mathbf{lx}}^{\mathbf{r}}\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$

MSC SOFTWARE SIMULATING REALITY

Restrained Analysis: уравнение балансировки

- Введя $$\mathbf{u}_a^e = \mathbf{D}_{al}\mathbf{u}_l = \mathbf{D}_{al}\left(\mathbf{u}_l^{Pr} + \mathbf{U}_{lx}^{r}\mathbf{u}_x\right)$$

  в уравнение равновесия результирующих сил, палучим уравнение балансировки

$$\left[\mathbf{m}_{rr}\mathbf{T}_{rR}\mathbf{T}_{Rx} - \bar{q}\mathbf{D}_{ar}^{T}\left(\mathbf{Q}_{ax} + \underbrace{\mathbf{Q}_{al}\mathbf{U}_{lx}^{r}}\right)\right]\mathbf{u}_x = \mathbf{D}_{ar}^{T}\left(\mathbf{P}_a + \underbrace{\bar{q}\mathbf{Q}_{al}\mathbf{u}_l^{Pr}}\right)$$

«Упругое» приращение вносимое единичными балансировочными усилиями

«Упругое» приращение вносимое внешними нагрузками

Unrestrained Analysis: Упругий базис

- Условие «средних осей»

$$\mathbf{D}_{ar}^{T}\mathbf{M}_{aa}\mathbf{D}_{al} = \mathbf{0}$$

- Упругим базисом удобно называть

$$\mathbf{D}_{al} = \mathbf{J}_{al} - \mathbf{D}_{ar}\mathbf{m}_{rr}^{-1}\mathbf{D}_{ar}^{T}\mathbf{M}_{aa}\mathbf{J}_{al}$$

- Следствием условия «средних осей» является то, что твердотельные ускорения не вызывают упругие деформации.

Unrestrained Analysis: уравнение упругости

- Проецируя основное уравнение на упругий базис получаем уравнение упругости

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{ll}} - \bar{q}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{ll}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{l}} + \bar{q}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{lx}}\,\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{ll}} &= \mathbf{D}_{\mathbf{al}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{aa}}\mathbf{D}_{\mathbf{al}} \\
\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{l}} &= \mathbf{D}_{\mathbf{al}}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{a}} \\
\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{lx}} &= \mathbf{D}_{\mathbf{al}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{ax}}
\end{aligned}$$

- Инерциальные члены исчезли, так как использовалось условие «средних осей».

Unrestrained Analysis: Основное решение

- За счет деформаций вносятся аэроупругие поправки во внешние нагрузки:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{Pu}} = \mathbf{D}_{\mathbf{al}}\left(\mathbf{K}_{\mathbf{ll}} - \bar{q}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{ll}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{l}}$$

- Деформации, за счет которых вносятся аэроупругие поправки в нагрузки, вызванные единичными балансировочными параметрами (единичное решение):

$$\mathbf{U}_{\mathbf{ax}}^{\mathbf{u}} = \bar{q}\mathbf{D}_{\mathbf{al}}\left(\mathbf{K}_{\mathbf{ll}} - \bar{q}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{ll}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{lx}}$$

- В таком случае $\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}} = \mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{Pu}} + \mathbf{U}_{\mathbf{ax}}^{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$

Unrestrained Analysis: Уравнение балансировки

- Подставляя основное решениие в уравнение равновесия результирующих сил, получим уравнение балансировки

$$\left[\mathbf{m}_{rr}\mathbf{T}_{rR}\mathbf{T}_{Rx} - \bar{q}\mathbf{D}_{ar}^{T}\left(\mathbf{Q}_{ax} + \mathbf{Q}_{aa}\mathbf{U}_{ax}^{u}\right)\right]\mathbf{u}_{x} = \mathbf{D}_{ar}^{T}\left(\mathbf{P}_{a} + \bar{q}\mathbf{Q}_{aa}\mathbf{u}_{a}^{Pu}\right)$$

- Заметьте, что «упругие» приращения не зависимы на твердотельных ускорениях поэтому единичное решение $\mathbf{U}_{ax}^{u}$ отсутствует.

Производные устойчивости: Определение

- Производные устойчивости – производные от коэффициентов аэродинамических нагрузок относительно балансировочных параметров.
- Производные устойчивости относятся к связанной системе координат.
- Результирующая аэродинамических нагрузок запишется в виде

$$\mathbf{A}_{\mathbf{R}} = \mathbf{T}_{\mathbf{rR}}^{\mathbf{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{ar}}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_{\mathbf{a}} \left(\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{e}}, \mathbf{u}_{\mathbf{x}} \right)$$

Производные устойчивости : Нормирование

- Коэффициент результирующей эродинамической нагрузки

$$\mathbf{C_R} = \mathbf{N}\mathbf{A_R} / \bar{q}$$

где

$$\mathbf{N} = \frac{1}{S}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1/b & & \\ & & & & 1/\bar{c} & \\ & & & & & 1/b \end{bmatrix}$$

S Характерная площадь

b Размах

c Длина хорды

Производные устойчивости : Расчет

- В общем виде: $$\frac{\partial C_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \frac{N}{\bar{q}} \frac{d\mathbf{A}_R}{d\mathbf{u}_x} = \frac{N}{\bar{q}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_R}{\partial \mathbf{u}_x} + \frac{\partial \mathbf{A}_R}{\partial \mathbf{u}_a^e} \frac{\partial \mathbf{u}_a^e}{\partial \mathbf{u}_x} \right)$$
- «Жесткий» ЛА: $$\frac{\partial C_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \mathbf{N}\mathbf{T}_{rR}^T \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{Q}_{ax}$$
- Restrained Analysis: $$\frac{\partial C_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \mathbf{N}\mathbf{T}_{rR}^T \mathbf{D}_{ar}^T \left(\mathbf{Q}_{ax} + \mathbf{Q}_{al} \mathbf{U}_{lx}^r \right)$$
- Unrestrained Analysis: $$\frac{\partial C_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \mathbf{N}\mathbf{T}_{rR}^T \mathbf{D}_{ar}^T \left(\mathbf{Q}_{ax} + \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{U}_{ax}^u \right)$$