

Раздел 5.1а

Расчет линейной статической аэроупругости



Описание задачи

- Основное уравнение линейной аэроупругости записывается в виде

$$(\mathbf{K}_{aa} - \bar{q}\mathbf{Q}_{aa})\mathbf{u}_a^e = \mathbf{P}_a + (\bar{q}\mathbf{Q}_{ax} - \mathbf{M}_{aa}\mathbf{D}_{ar}\mathbf{T}_{rR}\mathbf{T}_{Rx})\mathbf{u}_x$$

- Известны внешние нагрузки \mathbf{P}_a и известна часть балансировочных параметров \mathbf{u}_x .
- Задача: определить остальные балансировочные параметры и упругие деформации \mathbf{u}_a^e .
- Затем могут быть определены нагрузки, действующие на ЛА.

Последовательность

- Сначала производится расчет балансировки жесткого ЛА.
- Затем, с учетом эффекта упругости.
- Для упругих деформаций используются 2 системы отсчета:
 - ◆ В *Restrained Analysis* (расчет с заземление) используется СК, связанная с r -множеством степеней свободы.
 - ◆ В *Unrestrained Analysis* (расчет без заземления) используется основная (связанная) СК.

«Жесткий» ЛА

- Если пренебречь упругостью ЛА, то для балансировки требуется только результирующие силы.
- Уравнение равновесия результирующих сил получают проецированием основного уравнения на твердотельные формы
- При $\mathbf{u}_a^e = \mathbf{0}$ проецирование даст

$$\left(\mathbf{m}_{rr} \mathbf{T}_{rR} \mathbf{T}_{Rx} - \bar{q} \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{Q}_{ax} \right) \mathbf{u}_x = \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{P}_a$$

- где $\mathbf{m}_{rr} = \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{M}_{aa} \mathbf{D}_{ar}$ матрица масс твердого тела.

«Жесткий» ЛА: Уравнение балансировки

- Уравнение балансировки:

$$\left(\underbrace{\mathbf{m}_{rr} \mathbf{T}_{rR} \mathbf{T}_{Rx}}_{\text{Инерциальные нагрузки}} - \underbrace{\bar{q} \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{Q}_{ax}}_{\text{Аэродинамические нагрузки}} \right) \mathbf{u}_x = \underbrace{\mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{P}_a}_{\text{Внешние нагрузки}}$$

Инерциальные нагрузки

Аэродинамические нагрузки

Внешние нагрузки

- Уравнение балансировки это система nr уравнений, которая позволяет определить nr из nx балансировочных параметров.

«Жесткий» ЛА: Пример 1

- Маневр: стационарный продольный полет
- Балансировочные параметры:
 - ◆ 6 видов твердотельных ускорений
 - ◆ Угол атаки и скольжения
 - ◆ Скорости крена, тангажа и курса
 - ◆ Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления
- Дано:
 - ◆ Вертикальное ускорение: g
 - ◆ Другие виды ускорений: 0
 - ◆ Скорости крена, тангажа и курса: 0
- Определяемые величины:
 - ◆ Угол атаки и скольжения
 - ◆ Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления
 - ◆ Продольное ускорение (должно равняться нулю)

«Жесткий» ЛА: Пример 2

- **Маневр: внезапное отклонение элерона**
- **Балансировочные параметры:**
 - ◆ 6 видов твердотельных ускорений
 - ◆ Угол атаки и скольжения
 - ◆ Скорости крена, тангажа и курса
 - ◆ Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления
- **Определяемые величины:**
 - ◆ Все ускорения
- **Дано:**
 - ◆ Угол отклонение элерона
 - ◆ Углы отклонения элевонов, элеронов и руля направления берутся из примера 1
 - ◆ Скорости крена, тангажа и курса: 0
 - ◆ Угол атаки и скольжения берутся из примера 1

Виды задач

- В первом примере все балансирующие параметры постоянны во времени. Такая задача может называться *стационарным* балансирующим расчетом.
- Во втором примере балансирующие параметры зависят от времени. Уравнение балансировки решается только для одного фиксированного момента времени. Такая задача может называться *мгновенным* балансирующим расчетом.
- Мгновенный балансирующий расчет является квазистатической аппроксимацией динамической задачи.

Чрезмерная балансировка

- Число свободных балансируемых параметров может превышать число степеней свободы r - множества.
- В этом случае свободные балансируемые параметры определяются из условий что
 - ◆ уравнение балансировки выполняется и
 - ◆ Сумма квадратов балансируемых параметров минимальна

Упругий ЛА

- Уравнение равновесия результирующих сил

$$\left(\mathbf{m}_{rr} \mathbf{T}_{rR} \mathbf{T}_{Rx} - \bar{q} \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{Q}_{ax} \right) \mathbf{u}_x = \mathbf{D}_{ar}^T \left(\mathbf{P}_a + \bar{q} \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{u}_a^e \right)$$

Инерциальные
нагрузки

Аэродинамические
нагрузки

Внешние нагрузки

«Упругое» приращение

Упругие деформации

- Упругие деформации должны быть линейно независимыми от форм твердого тела
- Таким образом они могут быть записаны в виде

$$\mathbf{u}_a^e = \mathbf{D}_{al} \mathbf{h}_l$$

- $nl = na - nr$ число столбцов матрицы \mathbf{D}_{al} - основная матрица упругих деформаций.
- Только при выполнении этого условия деформации будут линейно независимыми от форм твердого тела \mathbf{D}_{ar} .

Связанная система координат

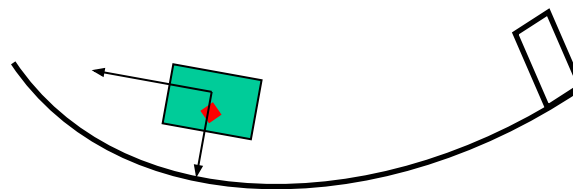
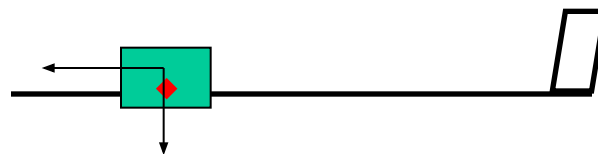
- Упругие деформации отображаются относительно связанной СК
- В *restrained analysis* (расчет с защемлением), связанная СК движется вместе с твердым телом, присоединенная к r -множеству степеней свободы.
 - ◆ Упругие перемещения r -множества степеней свободы равны 0.
- В *unrestrained analysis* (расчет без защемления), связанная СК движется с твердым телом, присоединенная к центру масс и главным осям инерции.
 - ◆ Эта система называется системой средних осей.

Связанная система координат

С заземлением



Без заземления



Restrained Analysis: упругий базис

- Упругим базисом удобно называть

$$\mathbf{D}_{al} = \mathbf{J}_{al} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ll} \\ \mathbf{0}_{rl} \end{bmatrix}$$

где \mathbf{I}_{ll} nl -размерная единичная матрица и $\mathbf{0}_{rl}$ - вырожденная матрица с nr строками и nl столбцами.

- Значит

$$\mathbf{u}_a^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ll} \\ \mathbf{0}_{rl} \end{bmatrix} \mathbf{h}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_l \\ \mathbf{0}_r \end{bmatrix}$$

следовательно

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{h}_l$$

Restrained Analysis: уравнение упругости

- Система n_l уравнений получается проецированием основного уравнения на упругий базис:

$$(\mathbf{K}_{ll} - \bar{q}\mathbf{Q}_{ll})\mathbf{u}_l = \mathbf{P}_l + [\bar{q}\mathbf{Q}_{lx} - (\mathbf{M}_{ll}\mathbf{D}_{lr} + \mathbf{M}_{lr})\mathbf{T}_{rR}\mathbf{T}_{Rx}]\mathbf{u}_x$$

- Индексом l обозначена часть матриц l -множества, соответствующая матрицам a -множества.
- Эта система уравнений позволяет записать уравнение упругих деформаций как функцию от балансирующих параметров и приложенных нагрузок.

Restrained Analysis: Основное решение

- За счет деформаций вносятся аэроупругие поправки во внешние нагрузки:

$$\mathbf{u}_1^{\text{Pr}} = (\mathbf{K}_{\text{II}} - \bar{q}\mathbf{Q}_{\text{II}})^{-1} \mathbf{P}_1$$

- Деформации, за счет которых вносятся аэроупругие поправки в нагрузки, вызванные единичными балансировочными параметрами (единичное решение):

$$\mathbf{U}_{\text{Ix}}^{\text{r}} = (\mathbf{K}_{\text{II}} - \bar{q}\mathbf{Q}_{\text{II}})^{-1} [\bar{q}\mathbf{Q}_{\text{Ix}} - (\mathbf{M}_{\text{II}}\mathbf{D}_{\text{Irr}} + \mathbf{M}_{\text{Irr}})\mathbf{T}_{\text{rR}}\mathbf{T}_{\text{Rx}}]$$

- В таком случае $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^{\text{Pr}} + \mathbf{U}_{\text{Ix}}^{\text{r}}\mathbf{u}_x$

Restrained Analysis: уравнение балансировки

■ Введя $\mathbf{u}_a^e = \mathbf{D}_{al} \mathbf{u}_l = \mathbf{D}_{al} (\mathbf{u}_l^{Pr} + \mathbf{U}_{lx}^r \mathbf{u}_x)$

в уравнение равновесия результирующих сил, получим уравнение балансировки

$$\left[\mathbf{m}_{rr} \mathbf{T}_{rR} \mathbf{T}_{Rx} - \bar{q} \mathbf{D}_{ar}^T (\mathbf{Q}_{ax} + \mathbf{Q}_{al} \mathbf{U}_{lx}^r) \right] \mathbf{u}_x = \mathbf{D}_{ar}^T (\mathbf{P}_a + \bar{q} \mathbf{Q}_{al} \mathbf{u}_l^{Pr})$$

«Упругое» приращение вносимое единичными балансировочными усилиями

«Упругое» приращение вносимое внешними нагрузками

Unrestrained Analysis: Упругий базис

- Условие «средних осей»

$$\mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{M}_{aa} \mathbf{D}_{al} = \mathbf{0}$$

- Упругим базисом удобно называть

$$\mathbf{D}_{al} = \mathbf{J}_{al} - \mathbf{D}_{ar} \mathbf{m}_{rr}^{-1} \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{M}_{aa} \mathbf{J}_{al}$$

- Следствием условия «средних осей» является то, что твердотельные ускорения не вызывают упругие деформации.

Unrestrained Analysis: уравнение упругости

- Проецируя основное уравнение на упругий базис получаем уравнение упругости

где

$$(\mathbf{K}_{\parallel} - \bar{q} \hat{\mathbf{Q}}_{\parallel}) \mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{P}}_1 + \bar{q} \hat{\mathbf{Q}}_{\perp x} \mathbf{u}_x$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\parallel} = \mathbf{D}_{\text{al}}^T \mathbf{Q}_{\text{aa}} \mathbf{D}_{\text{al}}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{D}_{\text{al}}^T \mathbf{P}_a$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\perp x} = \mathbf{D}_{\text{al}}^T \mathbf{Q}_{\text{ax}}$$

- Инерциальные члены исчезли, так как использовалось условие «средних осей».

Unrestrained Analysis: Основное решение

- За счет деформаций вносятся аэроупругие поправки во внешние нагрузки:

$$\mathbf{u}_a^{\text{Pu}} = \mathbf{D}_{\text{al}} \left(\mathbf{K}_{\text{ll}} - \bar{q} \hat{\mathbf{Q}}_{\text{ll}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{P}}_1$$

- Деформации, за счет которых вносятся аэроупругие поправки в нагрузки, вызванные единичными балансирующими параметрами (единичное решение):

$$\mathbf{U}_{\text{ax}}^{\text{u}} = \bar{q} \mathbf{D}_{\text{al}} \left(\mathbf{K}_{\text{ll}} - \bar{q} \hat{\mathbf{Q}}_{\text{ll}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{Q}}_{\text{lx}}$$

- В таком случае $\mathbf{u}_a^{\text{e}} = \mathbf{u}_a^{\text{Pu}} + \mathbf{U}_{\text{ax}}^{\text{u}} \mathbf{u}_x$

Unrestrained Analysis: Уравнение балансировки

- Подставляя основное решение в уравнение равновесия результирующих сил, получим уравнение балансировки

$$\left[\mathbf{m}_{rr} \mathbf{T}_{rR} \mathbf{T}_{Rx} - \bar{q} \mathbf{D}_{ar}^T \left(\mathbf{Q}_{ax} + \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{U}_{ax}^u \right) \right] \mathbf{u}_x = \mathbf{D}_{ar}^T \left(\mathbf{P}_a + \bar{q} \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{u}_a^{Pu} \right)$$

- Заметьте, что «упругие» приращения не зависят на твердотельных ускорениях поэтому единичное решение \mathbf{U}_{ax}^u отсутствует.

Производные устойчивости: Определение

- Производные устойчивости – производные от коэффициентов аэродинамических нагрузок относительно балансируемых параметров.
- Производные устойчивости относятся к связанной системе координат.
- Результирующая аэродинамических нагрузок запишется в виде

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{T}_{rR}^T \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{A}_a(\mathbf{u}_a^e, \mathbf{u}_x)$$

Производные устойчивости : Нормирование

- Коэффициент результирующей эродинамической нагрузки

$$C_R = N A_R / \bar{q}$$

где

$$N = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1/b & \\ & & & & & 1/\bar{c} \\ & & & & & & 1/b \end{bmatrix}$$

S Характерная площадь

b Размах

c Длина хорды

Производные устойчивости : Расчет

- В общем виде:
$$\frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \frac{\mathbf{N}}{\bar{q}} \frac{d\mathbf{A}_R}{d\mathbf{u}_x} = \frac{\mathbf{N}}{\bar{q}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_R}{\partial \mathbf{u}_x} + \frac{\partial \mathbf{A}_R}{\partial \mathbf{u}_a^e} \frac{\partial \mathbf{u}_a^e}{\partial \mathbf{u}_x} \right)$$
- «Жесткий» ЛА:
$$\frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \mathbf{N} \mathbf{T}_{rR}^T \mathbf{D}_{ar}^T \mathbf{Q}_{ax}$$
- Restrained Analysis:
$$\frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \mathbf{N} \mathbf{T}_{rR}^T \mathbf{D}_{ar}^T (\mathbf{Q}_{ax} + \mathbf{Q}_{al} \mathbf{U}_{lx}^r)$$
- Unrestrained Analysis:
$$\frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial \mathbf{u}_x} = \mathbf{N} \mathbf{T}_{rR}^T \mathbf{D}_{ar}^T (\mathbf{Q}_{ax} + \mathbf{Q}_{aa} \mathbf{U}_{ax}^u)$$