

# Рекуррентные соотношения

Автор: учитель информатики и  
ИКТ МОУ Ольгинской СОШ  
Хохрина Елена Александровна

# Числовые ряды

●  $1+3+5+7+9+11+ \dots+(2n-1)+ \dots$

●  $2+6+ 18+54+ 162+ \dots$

●  $1+1/2+1/4+1/8+ \dots+1/2^n+ \dots =2$

●  $1+1+2+3+5+8+13+21+37+\dots$

●  $1+1/1!+ 1/2!+ 1/3!+ 1/4!+ \dots + 1/n!+ \dots =e$

●  $1+1/2+1/4+1/6+1/8+1/10+ \dots + 1/2n+ \dots$

# Последовательность чисел Фибоначчи

●  $1+1+2+3+5+8+13+21+37+\dots$

Задание: Сформулируйте правило, по которому образуется ряд Фибоначчи.

Числа Фибоначчи возникают в самых разных математических ситуациях: комбинаторных, числовых, геометрических. Учёные стремятся отыскивать числовые закономерности даже в живой природе и давно заметили, что числа Фибоначчи встречаются в спиральных формах, которые наблюдаются в мире растений. Например, в расположении листьев и ветвей вокруг ствола дерева. Число витков спирали, которые необходимо сделать, чтобы перейти от нижнего листа к ближайшему верхнему равно одному из чисел Фибоначчи. Это явление в ботанике называется **филлотаксис**.

## Леона́рдо Пиза́нский

(лат. *Leonardo Pisano*, около 1170, Пиза — около 1250, там же) — первый крупный **математик средневековой Европы**. Наиболее известен под прозвищем **Фибона́ччи** (*Fibonacci*); о происхождении этого псевдонима имеются разные версии. По одной из них, его отец Гильермо имел прозвище **Боначчи** («Благонамеренный»), а сам Леонардо прозывался *filius Bonacci* («сын Благонамеренного»). По другой, *Fibonacci* происходит от фразы *Figlio Buono Nato* *Ci*, что в переводе с итальянского означает «хороший сын родился».



# Число Непера

- $1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots + 1/n! + \dots = e$

Число Непера является составляющей закона существования случайных процессов физической и биологической природы.

*Например, закона нормального распределения скорости газовых молекул, закона охлаждения тел, в формулах радиоактивного распада, возраста Земли, роста клеток и др.*

# Джон Нэпер

(англ. *John Napier*; 1550—1617) — шотландский барон (8-й лорд Мерчистона), математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц.



# Факториал

- Факториал - это произведение натуральных чисел от 1 до того числа, которое стоит под знаком факториала.
- От factor - сомножитель.  $0! = 1$ .
- С учётом этого ряд чисел, дающих в сумме число Непера можно записать в виде
- $1 + 1/1 + 1/(1 * 2) + 1/(1 * 2 * 3) + \dots + 1/(1 * 2 * 3 * 4 * \dots * (n-1)) + \dots$
- Задание: Предложите, каким образом каждый элемент этого ряда можно выразить через предыдущий.

## ● *Вывод:*

- существуют ряды, в которых элементы можно вычислять через предыдущие. Во всех рядах на доске наблюдается условие, с помощью которого можно образовать элемент ряда. Такое условие называют ***инвариантом*** (неизменяемая часть чего-либо).



# Ряд четных чисел

- $2+4+6+8+10+12+ \dots +2n+ \dots =n(n+1)$
- Введём обозначения:
- $k$  - значение последнего члена ряда;
- $n$  - количество вычисляемых членов ряда;
- $i$  - номер члена ряда (от 1 до  $n$ );
- $a_i$  - обозначение члена ряда;
- $a_{i-1}$  - обозначение предыдущего члена ряда.

●  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \dots + k$

● №  $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \dots \quad n$   
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad \dots \quad a_n$

● **Задание:** Подумайте, как из 2 получить 4?

Чем является 2 по отношению к  $a_2$ ?

Чем является  $a_1$  по отношению к  $a_i$ ?

# Получаем формулу

$$a_i = a_{i-1} + 2$$

Формула представляет собой рекуррентное соотношение.

***Возникает вопрос: «Как записать рекуррентное соотношение для вычисления на компьютере?»***

$n = 15$

$a$

2

$$A=2$$

$a$

4

$$A_i = a_{i-1} + 2$$

$a$

6

$$A_i = a_{i-1} + 2$$

...

$a$

30

$$A_i = a_{i-1} + 2$$

*Вывод:*  
Инвариантность  
рекуррентного  
соотношения  
позволяет записать  
его в виде  
циклической  
конструкции.

# найти сумму элементов

## ряда

- $S=0$  - начальное значение суммы,
- $S=S+A$  - её изменение на каждом шаге цикла.

**алг** INV(вещ A,S/цел K,N,I)

**нач**

запрос (N)

A:=2

S:=0

S:=S+A

вывод («I», «A»:12, «S»S:12)

вывод («1»,A:12,S:12)

**нц для** i **от** 2 **до** n

A:=A+2

S:=S+A

вывод (I:3, A:12, S:12)

**кц**

**кон**

1. Можно ли по этому алгоритму выписать  $i$ -й член и сумму элементов ряда нечётных чисел?
2. Назовите инвариант. Запишите рекуррентное соотношение.
3. Что изменилось в алгоритме?

# Домашнее задание

- Примеры числовых рядов, в которых надо уметь находить инвариант.
- Получить рекуррентное соотношение и изобразить блок-схему.