Решение краевых задач ОДУ

Паросова
Ольга
ГИП-109

История дифферинциальных исчислений

- 17 в.

И. Ньютон и Г. Лейбниц,

братья Я. и И. Бернулли, Б. Тейлор

- 18 в.

Л. Эйлер и Ж. Лагранж

- 19 в.

Коши, Б. Больцан и К. Гаус

Основные понятия

- Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее не зависимую переменную неизвестную функцию x(t) этой независимой переменой и ее производные
- Краевые задачи, задачи, в которых из некоторого класса функций, определённых в данной области, требуется найти ту, которая удовлетворяет на границе (крае) этой области заданным условиям

Золотое сечение

Метод золотого сечения — метод поиска значений действительно - значной функции на заданном отрезке. В основе метода лежит принцип деления в пропорциях золотого сечения. Наиболее широко известен как метод поиска экстремума в решении задач оптимизации.

Формализация

Шаг 1. Задаются начальные границы отре: a, b и точность ε,

рассчитывают начальные точки деления:

$$x_1 = b - \frac{(b-a)}{\varphi}, x_2 = a + \frac{(b-a)}{\varphi}$$

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$$

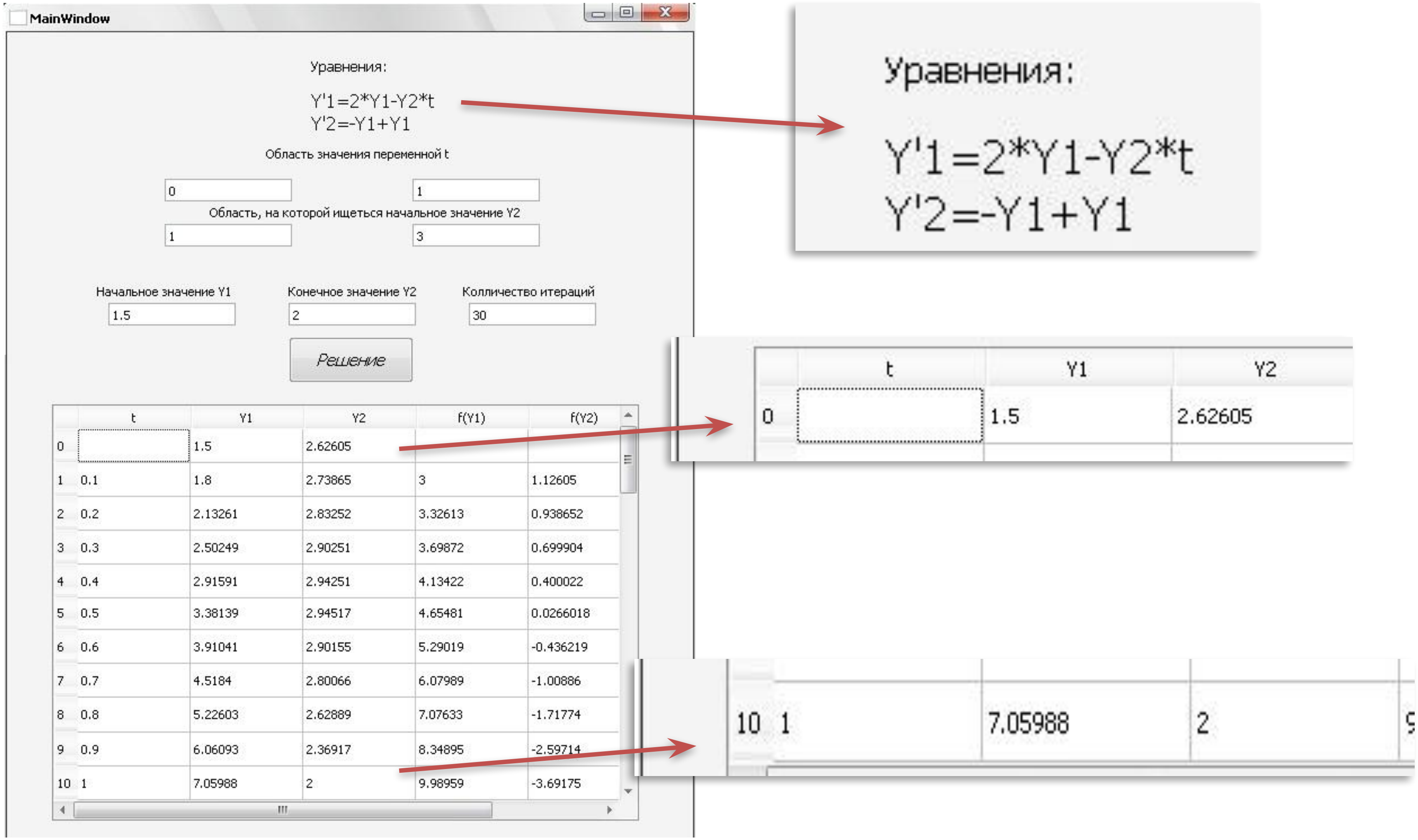
Шаг 2.
Если $y_1 \le y_2$, то $b = x_2, x_2 = x_1, \quad x_1 = b - \frac{(b-a)}{\varphi}, \quad y_2 = y_1, \quad y_1 = f(x_1)$

Иначе $a = x_1, x_1 = x_2, \quad x_2 = a + \frac{(b-a)}{\varphi}, \quad y_1 = y_2, \quad y_2 = f(x_2)$

Шаг 3.
Есл
и $|b - a| < \varepsilon$, то $x = argmin(y_1, y_2)$

и останов.
Иначе возврат к шагу 2.

Программа


MainWindow
Уравнения:
Y'1=2*Y1-Y2*t
Y'2=-Y1+Y1
Область значения переменной t
0
1
Область, на которой ищеться начальное значение Y2
1
3
Начальное значение Y1
1.5
Конечное значение Y2
2
Колличество итераций
30
Решение
t Y1 Y2 f(Y1) f(Y2)
0 1.5 2.62605
1 0.1 1.8 2.73865 3 1.12605
2 0.2 2.13261 2.83252 3.32613 0.938652
3 0.3 2.50249 2.90251 3.69872 0.699904
4 0.4 2.91591 2.94251 4.13422 0.400022
5 0.5 3.38139 2.94517 4.65481 0.0266018
6 0.6 3.91041 2.90155 5.29019 -0.436219
7 0.7 4.5184 2.80066 6.07989 -1.00886
8 0.8 5.22603 2.62889 7.07633 -1.71774
9 0.9 6.06093 2.36917 8.34895 -2.59714
10 1 7.05988 2 9.98959 -3.69175
Уравнения:
Y'1=2*Y1-Y2*t
Y'2=-Y1+Y1
t Y1 Y2
0 1.5 2.62605
10 1 7.05988 2

Градиентный метод

- *Градиентный спуск* — метод нахождения локального минимума (максимума) функции с помощью движения вдоль градиента. Для минимизации функции в направлении градиента используются методы одномерной оптимизации, например, метод золотого сечения

Алгоритм

1.Задают начальное приближение и точность расчё $\vec{x}^{0}, \varepsilon$

2.Рассчитываю $\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\vec{x}^{j})$, где

$$\lambda^{[j]} = argmin_{\lambda} \overrightarrow{(x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\vec{x}^{j}))$$

3.Проверяют условие остановки:

Если $\left|\vec{x}^{[j+1]} - \vec{x}^{[j]}\right| > \varepsilon$, то $j = j + 1$ и переход к шагу 2.

Иначе $\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]}$ и останов.

Программа

$y_1(0) = 1, \quad \lambda = 0.001, \quad \varepsilon = 0.001, \quad y_2(0) = 3, \quad y_2(10) = 2, \quad y_3(10) = 3$

```
D:\H\df-build-desktop\debug\df.exe
Y'1=2*Y1-Y2*t+2*Y3
Y'2=-Y1+Y2+Y3
Y'3=Y1+Y2-Y3


1         1.53917 -1.37286
0.925429  1.4558   -0.827737  -0.745712  -0.83369  5.45119
0.930409  1.42606  -0.361261  0.0498041  -0.297369  4.66476
1.01572  1.4395  0.0531181  0.853085  0.13439  4.14379
1.1863  1.48719  0.437278  1.70582  0.4769  3.8416
1.45153  1.56101  0.809618  2.65228  0.738167  3.7234
1.82571  1.65292  1.18601  3.74179  0.919096  3.76392
2.32888  1.75424  1.58056  5.03168  1.01322  3.94553
2.98797  1.85483  2.00624  6.59091  1.00593  4.25679
3.83842  1.94214  2.47538  8.50455  0.873106  4.69139
4.92639  2.00005  3.00011  10.8797  0.5791  5.24732
```

$y_2(0) = 1.53917, \ y_3(0) = -1.37286, \quad y_2(10) = 2.00005, \quad y_3(10) = 3.00011$

Спасибо за внимание