

Решение краевых задач ОДУ

Паросова

Ольга

ГИП-109

История дифференциальных исчислений

- 17 в.

И. Ньютон и Г. Лейбниц,
братья Я. и И. Бернулли, Б. Тейлор

- 18 в.

Л. Эйлер и Ж. Лагранж

- 19 в.

Коши, Б. Больцман и К. Гаус

Основные понятия

- Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее не зависимую переменную неизвестную функцию $x(t)$ этой независимой переменной и ее производные
- Краевые задачи, задачи, в которых из некоторого класса функций, определённых в данной области, требуется найти ту, которая удовлетворяет на границе (крае) этой области заданным условиям

Золотое сечение

Метод золотого сечения — метод поиска значений действительно - значной функции на заданном отрезке. В основе метода лежит принцип деления в пропорциях золотого сечения. Наиболее широко известен как метод поиска экстремума в решении задач оптимизации.

Формализация

Шаг 1. Задаются начальные границы отрезка a, b и точность ε ,
рассчитывают начальные точки деления:

$$x_1 = b - \frac{(b-a)}{\varphi}, x_2 = a + \frac{(b-a)}{\varphi}$$
$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

Шаг 2.

Если $y_1 \leq y_2$, то $b = x_2, x_2 = x_1, x_1 = b - \frac{(b-a)}{\varphi}, y_2 = y_1, y_1 = f(x_1)$

Иначе $a = x_1, x_1 = x_2, x_2 = a + \frac{(b-a)}{\varphi}, y_1 = y_2, y_2 = f(x_2)$

Шаг 3.

Если $|b-a| < \varepsilon$, то $x = \operatorname{argmin}(y_1, y_2)$

и останов.

Иначе возврат к шагу 2.

Программа

MainWindow

Уравнения:
 $Y'1=2*Y1-Y2*t$
 $Y'2=-Y1+Y1$

Область значения переменной t
0 1

Область, на которой ищется начальное значение Y2
1 3

Начальное значение Y1 Конечное значение Y2 Количество итераций

Решение

t	Y1	Y2	f(Y1)	f(Y2)
0	1.5	2.62605		
1 0.1	1.8	2.73865	3	1.12605
2 0.2	2.13261	2.83252	3.32613	0.938652
3 0.3	2.50249	2.90251	3.69872	0.699904
4 0.4	2.91591	2.94251	4.13422	0.400022
5 0.5	3.38139	2.94517	4.65481	0.0266018
6 0.6	3.91041	2.90155	5.29019	-0.436219
7 0.7	4.5184	2.80066	6.07989	-1.00886
8 0.8	5.22603	2.62889	7.07633	-1.71774
9 0.9	6.06093	2.36917	8.34895	-2.59714
10 1	7.05988	2	9.98959	-3.69175

Уравнения:
 $Y'1=2*Y1-Y2*t$
 $Y'2=-Y1+Y1$

t	Y1	Y2
0	1.5	2.62605

10	1	7.05988	2	
----	---	---------	---	--

Градиентный метод

- *Градиентный спуск* — метод нахождения локального минимума (максимума) функции с помощью движения вдоль градиента. Для минимизации функции в направлении градиента используются методы одномерной оптимизации, например, метод золотого сечения

Алгоритм

1. Задают начальное приближение и точность расчёта \vec{x}^0, ε

2. Рассчитывают $\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\vec{x}^j)$, где

$$\lambda^{[j]} = \operatorname{argmin}_{\lambda} (\|\vec{x}^{[j]} - \lambda \nabla F(\vec{x}^j)\|)$$

3. Проверяют условие остановки:

Если $\|\vec{x}^{[j+1]} - \vec{x}^{[j]}\| > \varepsilon$, то $j = j + 1$ и переход к шагу 2.

Иначе $\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]}$ и останов.

Программа

$$y_1(0) = 1, \quad \lambda = 0.001, \quad \varepsilon = 0.001, \quad y_2(0) = 3, \quad y_2(10) = 2, \quad y_3(10) = 3$$

```
C:\ D:\H\df-build-desktop\debug\df.exe
Y' 1=2*Y1-Y2*t+2*Y3
Y' 2=-Y1+Y2+Y3
Y' 3=Y1+Y2-Y3

1          1.53917 -1.37286
0.925429  1.4558  -0.827737  -0.745712  -0.83369  5.45119
0.930409  1.42606  -0.361261  0.0498041  -0.297369  4.66476
1.01572   1.4395   0.0531181  0.853085   0.13439   4.14379
1.1863    1.48719  0.437278   1.70582   0.4769    3.8416
1.45153   1.56101  0.809618   2.65228   0.738167  3.7234
1.82571   1.65292  1.18601    3.74179   0.919096  3.76392
2.32888   1.75424  1.58056    5.03168   1.01322   3.94553
2.98797   1.85483  2.00624    6.59091   1.00593   4.25679
3.83842   1.94214  2.47538    8.50455   0.873106  4.69139
4.92639   2.00005  3.00011   10.8797   0.5791    5.24732
```

$$y_2(0) = 1.53917, \quad y_3(0) = -1.37286, \quad y_2(10) = 2.00005, \quad y_3(10) = 3.00011$$

Спасибо за внимание