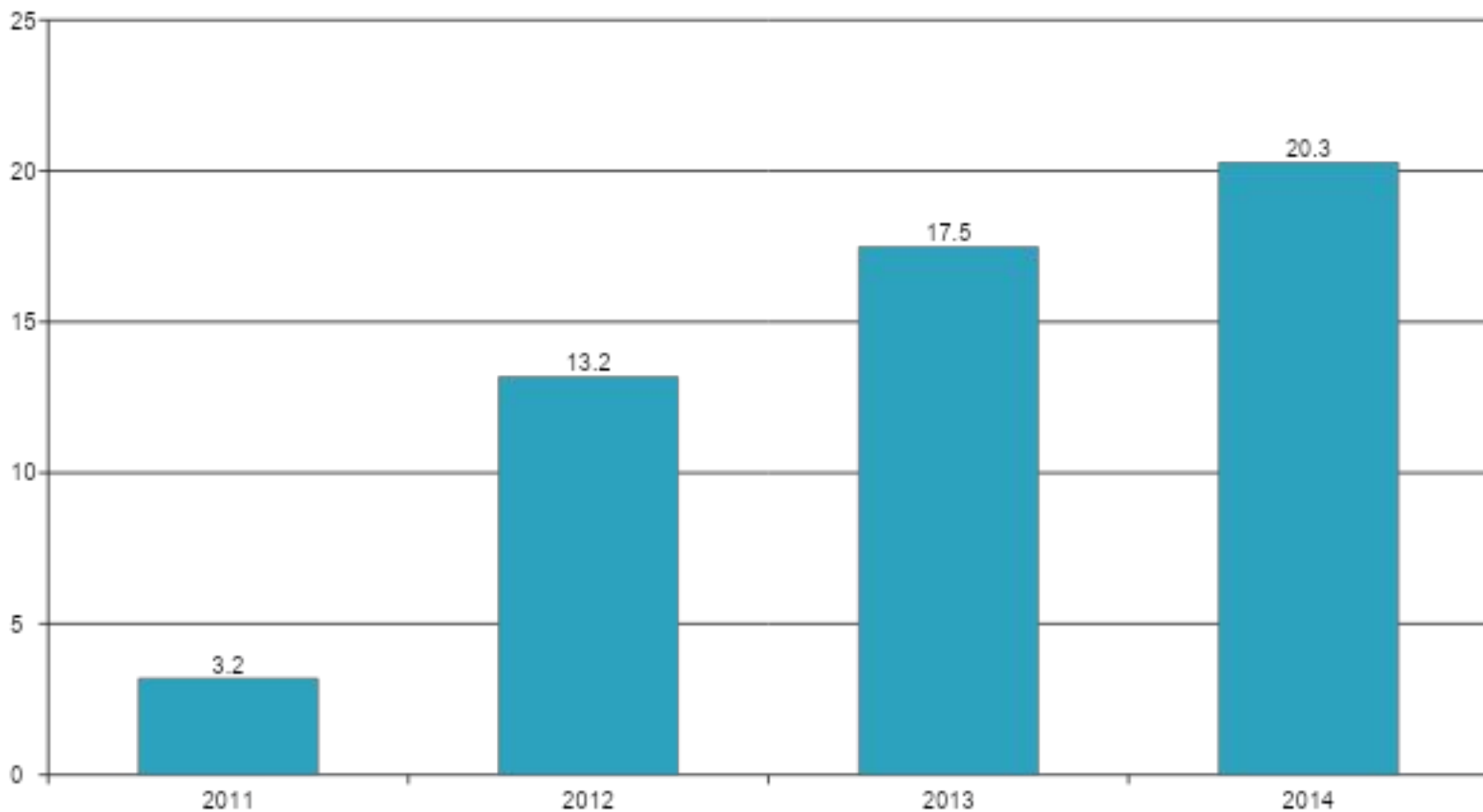


РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

учитель информатики
и математики МАОУ
«Гимназия № 87»
Мигачева Т.В.

Процент выполнения задания 23 в ЕГЭ



№ 1

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \wedge (X_3 \equiv X_4)) \vee (\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge \neg(X_3 \equiv X_4)) = 0$$

$$((X_3 \equiv X_4) \wedge (X_5 \equiv X_6)) \vee (\neg(X_3 \equiv X_4) \wedge \neg(X_5 \equiv X_6)) = 0$$

$$((X_5 \equiv X_6) \wedge (X_7 \equiv X_8)) \vee (\neg(X_5 \equiv X_6) \wedge \neg(X_7 \equiv X_8)) = 0$$

$$((X_7 \equiv X_8) \wedge (X_9 \equiv X_{10})) \vee (\neg(X_7 \equiv X_8) \wedge \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 0$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение

1. Найдем все решения уравнения

$$((X_1 \equiv X_2) \wedge (X_3 \equiv X_4)) \vee (\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge \neg(X_3 \equiv X_4)) = 0$$

x1	x2	x3	x4
0	0	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x1	x2	x3	x4
0	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0

2. Найдем отображение переменных в 1 уравнении

X_1X_2	X_3X_4
00	00
01	01
10	10
11	11

3.Используя схему, заполним таблицу

X_1X_2	X_3X_4
00	00
01	01
10	10
11	11

	x_1x_2	x_3x_4	x_5x_6	x_7x_8	x_9x_{10}
00	1	2	4	8	16
01	1	2	4	8	16
10	1	2	4	8	16
11	1	2	4	8	16

Ответ: 64

№ 2

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_7 \wedge X_8) \vee (\neg X_7 \wedge \neg X_8) \vee (X_7 \equiv X_9) = 1$$

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 0$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение

1. Найдем все решения уравнения

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$

x1	x2	x3
0	0	0
		1
	1	0

x1	x2	x3
1	0	1
	1	0
		1

2. Найдем отображение переменных в 1 уравнении

X_1X_2	X_2X_3
00	00
01	01
10	10
11	11

3. Найдем все решения уравнения

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 0$$

x8	x9	x10
0	1	1
1	0	0

4. Найдем отображение переменных в 8 уравнении

X_8X_9	X_9X_{10}
00	00
01	01
10	10
11	11

5.Используя схемы, заполним таблицу

X_1X_2	X_2X_3
00	00
01	01
10	10
11	11

X_8X_9	X_9X_{10}
00	00
01	01
10	10
11	11

	x_1x_2	x_2x_3	x_3x_4	x_4x_5	x_5x_6	x_6x_7	x_7x_8	x_8x_9	x_9x_{10}
00	1	1	1	1	1	1	1	1	8
01	1	2	3	4	5	6	7	8	
10	1	2	3	4	5	6	7	8	
11	1	1	1	1	1	1	1	1	8

Ответ: 16

№ 3

Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(\neg x_1 \rightarrow x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_3 \rightarrow x_4) \wedge (\neg x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (\neg y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow y_4) \wedge (\neg y_4 \rightarrow y_5) = 1$$
$$x_1 \vee y_1 = 0$$

где $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение

1. Найдем все решения уравнения

$$(\neg x_1 \rightarrow x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_3 \rightarrow x_4) \wedge (\neg x_4 \rightarrow x_5) = 1,$$

учитывая $x_1 \vee y_1 = 0$ ($x_1 = 0, y_1 = 0$)

x1	x2	x3	x4	x5	
0	1	0	1	0	
			1	1	
		1	0	1	
			1	0	0
				1	1

2. Найдем все решения уравнения

$$(\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (\neg y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow y_4) \wedge (\neg y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

учитывая $x_1 \vee y_1 = 0$ ($x_1 = 0, y_1 = 0$)

y1	y2	y3	y4	y5
0	1	0	1	0
			1	1
		1	0	1
			1	0

3. Уравнения

$$(\neg x_1 \rightarrow x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_3 \rightarrow x_4) \wedge (\neg x_4 \rightarrow x_5) = 1,$$
$$(\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (\neg y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow y_4) \wedge (\neg y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

независимые.

Условие $x_1 \vee y_1 = 0$ выполняется для всех найденных решений

Поэтому, система имеет
 $5 \cdot 5 = 25$ различных решений.

Ответ: 25

№ 4

Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$(x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2) \wedge (x_3 \rightarrow y_3) = 1$$

- где $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение

1. Найдем все решения уравнений

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1 \text{ и}$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

x1	x2	x3	x4	x5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

y1	y2	y3	y4	y5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Уравнения

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

независимые.

Найдем решение системы, учитывая

$$(x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2) \wedge (x_3 \rightarrow y_3) = 1$$

		Решения первого уравнения					
		00000	00001	00011	00111	01111	11111
Решения второго уравнения	00000	1	1	1	0	0	0
	00001	1	1	1	0	0	0
	00011	1	1	1	0	0	0
	00111	1	1	1	1	0	0
	01111	1	1	1	1	1	0
	11111	1	1	1	1	1	1

№ 5

Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5 = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_3 \rightarrow \mathbf{y}_4 \rightarrow \mathbf{y}_5 = \mathbf{0}$$

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_5$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение

1. Найдем количество решений уравнения

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 = 0$$

количество решений уравнения с нулём в правой части, обозначим через Z_N , где N – количество переменных; количество решений уравнения с единицей в правой части, обозначим через K_N .

$$\text{Очевидно, что } Z_N + K_N = 2^N \quad Z_N = K_{N-1}$$

$$Z_N = K_{N-1} = 2^{N-1} - Z_{N-1}$$

$$y_1 \rightarrow y_2 = 0, \quad Z_2 = 1$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 = 0, \quad Z_3 = 2^{3-1} - Z_{3-1} = 4 - 1 = 3$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 = 0, \quad Z_4 = 2^{4-1} - Z_{4-1} = 8 - 3 = 5$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 = 0, \quad Z_5 = 2^{5-1} - Z_{5-1} = 16 - 5 = 11$$

Уравнение имеет 11 решений

2. Найдем количество решений уравнения

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 = 1$$

$$z_N + K_N = 2^N$$

$$K_N = 2^N \cdot z_N = 2^5 \cdot 11 = 32 \cdot 11 = 21$$

3. Уравнения

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 = 1$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 = 0$$

независимые.

Поэтому, система имеет

$21 \cdot 11 = 231$ различных решений.

Ответ: 231

№ 6

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$(z_1 \rightarrow z_2) \wedge (z_2 \rightarrow z_3) \wedge (z_3 \rightarrow z_4) \wedge (z_4 \rightarrow z_5) = 1$$

$$x_1 \wedge y_2 \wedge z_3 = 0$$

где $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5, z_1, \dots, z_5$, – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов

Решение

Уравнения

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$(z_1 \rightarrow z_2) \wedge (z_2 \rightarrow z_3) \wedge (z_3 \rightarrow z_4) \wedge (z_4 \rightarrow z_5) = 1$$

независимые.

Каждое из уравнений имеет 6 различных решений:

00000, 00001, 00011, 00111, 01111, 11111.

Найдем решение системы, учитывая

$$x_1 \wedge y_2 \wedge z_3 = 0$$

		Решения первого уравнения					
		00000	00001	00011	00111	01111	11111
Решения второго уравнения	00000	0	0	0	0	0	0
	00001	0	0	0	0	0	0
	00011	0	0	0	0	0	0
	00111	0	0	0	0	0	0
	01111	0	0	0	0	0	1
	11111	0	0	0	0	0	1

x1	x2	x3	x4	x5	y1	y2	y3	y4	y5	z1	z2	z3	z4	z5
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$6^3 - 6 = 210$$

Ответ: 210

№ 7

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \vee x_2) \wedge ((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3) \wedge \neg(x_1 \wedge y_1) = 1$$

$$(x_2 \vee x_3) \wedge ((x_2 \wedge x_3) \rightarrow x_4) \wedge \neg(x_2 \wedge y_2) = 1$$

...

$$(x_5 \vee x_6) \wedge ((x_5 \wedge x_6) \rightarrow x_7) \wedge \neg(x_5 \wedge y_5) = 1$$

$$(x_6 \vee x_7) \wedge \neg(x_6 \wedge y_6) = 1$$

$$x_7 \wedge y_7 = 0$$

где $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5, z_1, \dots, z_5$, – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов

Решение

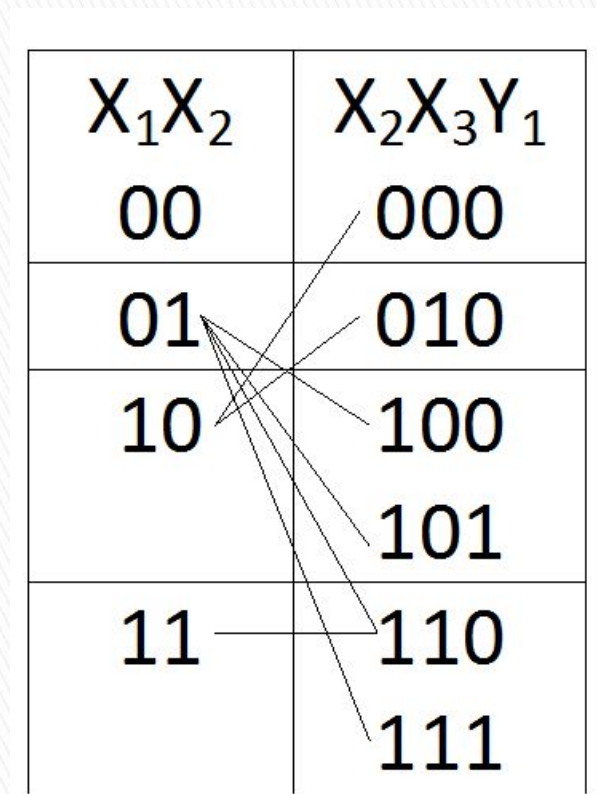
1. Найдем все решения уравнения

$$(x_1 \vee x_2) \wedge ((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3) \wedge \neg(x_1 \wedge y_1) = 1$$

x1	x2	x3	y1
0	1	0	0
			1
		1	0
			1

x1	x2	x3	y1
1	0	0	0
		1	0
	1	1	0

2. Найдем отображение переменных в 1 уравнении



2. Найдем отображение переменных в 1 и 2 уравнениях

X_1X_2	$X_2X_3Y_1$	$X_3X_4Y_2$
00	000	000
01	010	010
10	100	100
	101	101
11	110	110
	111	111

3. Найдем все решения уравнений

$$(x_6 \vee x_7) \wedge \neg(x_6 \wedge y_6) = 1$$
$$x_7 \wedge y_7 = 0$$

□

x6	x7	y6	y7
0	1	0	0
		1	0
1	0	0	0
			1
	1	0	0

4. Найдем отображение переменных в уравнениях

$X_6 X_7 Y_6$	Y_7
010	0
011	0
100	0
	1
110	0

5.Используя схемы, заполним таблицу

X_1X_2	$X_2X_3Y_1$	$X_3X_4Y_2$
00	000	000
01	010	010
10	100	100
	101	101
11	110	110
	111	111

$X_6X_7Y_6$	Y_7
010	0
011	0
100	0
	1
110	0

	x_1x_2	x_2x_3	x_3x_4	x_4x_5	x_5x_6	x_6x_7	$x_6x_7y_6$	y_7
00	0	1	2	2	4	4	0	0
01	1	1	2	2	4	4	8	8
10	1	2	2	4	4	8	8	16
11	1	3	5	9	13	21	21	21

Ответ: 45

Спасибо за внимание!

