Решение системы уравнений в Excel методом Крамера и обратной матрицы

Метод Крамера

Ме́тод Кра́мера — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Для системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица системы.

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки

(столбца) на их алгебраические дополнения - определитель системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{p1} \cdot A_{p1} + a_{p2} \cdot A_{p2} + \ldots + a_{pn} \cdot A_{pn} =$$

$$= a_{1q} \cdot A_{1q} + a_{2q} \cdot A_{2q} + \ldots + a_{nq} \cdot A_{nq}$$

$$p = 1, 2, \ldots, n, \quad q = 1, 2, \ldots, n$$

Остальные определители получим, заменяя столбец

с коэффициентами соответствующей переменной (неизвестного)

свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Нахождения неизвестных переменных по методу Крамера

$$\begin{cases} a11X1+a12X2=B1 \\ a21X1+a22X2=b2 \end{cases}$$

$X1=\frac{b1-a12X2}{a11}$

$$a21\left(\frac{b1-a12X2}{a11}\right)+a22X2=b2$$

$$X2(a12a22-a11a21)=b2a11-a21b1$$

$$X2=\frac{-b2a11+a21b1}{-a12a22+a11a21}$$

$$-b2a11+a21b1=\Delta A2$$

$$-a12a22+a11a21=\Delta A$$

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad \ldots,\quad x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Метод обратной матрицы

Ма́тричный метод решения (метод решения через обратную матрицу) систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем состоит следующем .

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными (над произвольным полем):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

Тогда её можно переписать в матричной форме: A*X=B, где A- основная матрица системы; B и X - столбцы свободных членов и решений системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Найдём обратную матрицу по формуле:

$$\frac{1}{|A|}\cdot\left\|A_{ij}\right\|^T\cdot A=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+\ldots+A_{n1}a_{n1} & A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}+\ldots+A_{n1}a_{n2} & \cdots & A_{11}a_{1n}+A_{21}a_{2n}+\ldots+A_{n1}a_{nn}\\ A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+\ldots+A_{n2}a_{n1} & A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}+\ldots+A_{n2}a_{n2} & \cdots & A_{12}a_{1n}+A_{22}a_{2n}+\ldots+A_{n2}a_{nn}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{1n}a_{11}+A_{2n}a_{21}+\ldots+A_{nn}a_{n1} & A_{1n}a_{12}+A_{2n}a_{22}+\ldots+A_{nn}a_{n2} & \cdots & A_{1n}a_{1n}+A_{2n}a_{2n}+\ldots+A_{nn}a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=E$$

Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле

$$X = A^{-1}\cdot B$$

Вычислить значения корней сформированной системы уравнений двумя методами: обратной матрицы и методом Крамера.

		A			B	
0	1	11	0	-3	0	
0	1	-3	-1	0	-2	
-9	0	0	6	-4	7	
1	0	2	-4	0	0	
1	0	1	0	9	-5	

Решение СЛАУ методом Крамера в Excel

Находим матричный определитель:

	Аопр.	
	-3840	

Находим определители Xn, заменяя каждый столбец матрицей B

0	1	11	0	-3		
-2	1	-3	-1	0		2510
7	0	0	6	-4		
0	0	2	-4	0		
-5	0	1	0	9		
0	0	11	0	-3		
0	-2	-3	-1	0		7660
-9	7	0	6	-4		
1	0	2	-4	0		
1	-5	1	0	9		
0	1	0	0	-3		
0	1	-2	-1	0		-185
-9	0	7	6	-4		
1	0	0	-4	0		
1	0	-5	0	9		
0	1	11	0	-3		
0	1	-3	-2	0		
-9	0	0	7	-4		535
1	0	2	0	0		
1	0	1	-5	9		
0	1	11	0	0		
0	1	-3	-1	-2		1875
-9	0	0	6	7		
1	0	2	-4	0		
1	0	1	0	-5		

Определители Xn порядка делим на матричный определитель и получаем ответ

X
-0,65365
-1,99479
0,04818
-0,13932
-0,48828

Решение СЛАУ методом обратной матрицы

1. Мышкой выделить квадратную область клеток, где будет размещена обратная матрица.

2. Начать вписывать формулу =МОБР

3. Выделить мышкой матрицу А. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.

4. Закрыть скобку, нажать комбинацию клавиш: Ctrl-Shift-Enter

5. Должна вычислиться обратная матрица и заполнить предназначенную для неё область

0,03229	-0,03229	-0,13906	-0,20052	-0,05104
0,23958	0,76042	-0,01563	-0,21354	0,07292
0,06615	-0,06615	0,00547	0,02474	0,02448
0,04115	-0,04115	-0,03203	-0,28776	-0,00052
-0,01094	0,01094	0,01484	0,01953	0,11406

1.Начать вписывать формулу =МУМНОЖ

2.Выделить мышкой матрицу - первый сомножитель.
3. Выделить мышкой вектор- второй сомножитель.
4.нажать комбинацию клавиш: Ctrl-Shift-Enter
5. Вычислиться произведение и заполниться предназначенная для неё область.

X
-0,65365
-1,99479
0,04818
-0,13932
-0,48828