

Решение системы уравнений в
Excel методом Крамера и
обратной матрицы

Метод Крамера

Метод Крамера — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Для системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- основная матрица системы.

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки

(столбца) на их алгебраические дополнения - определитель системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{p1} \cdot A_{p1} + a_{p2} \cdot A_{p2} + \dots + a_{pn} \cdot A_{pn} = \\ = a_{1q} \cdot A_{1q} + a_{2q} \cdot A_{2q} + \dots + a_{nq} \cdot A_{nq}$$

$p = 1, 2, \dots, n, \quad q = 1, 2, \dots, n$

Остальные определители получим, заменяя столбец с коэффициентами соответствующей переменной (неизвестного) свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Нахождения неизвестных переменных по методу Крамера

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{b_1 - a_{12}X_2}{a_{11}}$$

$$a_{21} \left(\frac{b_1 - a_{12}X_2}{a_{11}} \right) + a_{22}X_2 = b_2$$

$$X_2(a_{12}a_{22} - a_{11}a_{21}) = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

$$X_2 = \frac{-b_2a_{11} + a_{21}b_1}{-a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}}$$

$$-b_2a_{11} + a_{21}b_1 = \Delta A_2$$

$$-a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21} = \Delta A$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Найдём обратную матрицу по формуле:

$$\frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T \cdot A = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1} & A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \dots + A_{n1}a_{n2} & \dots & A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots + A_{n1}a_{nn} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + \dots + A_{n2}a_{n1} & A_{12}a_{12} + A_{22}a_{22} + \dots + A_{n2}a_{n2} & \dots & A_{12}a_{1n} + A_{22}a_{2n} + \dots + A_{n2}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}a_{11} + A_{2n}a_{21} + \dots + A_{nn}a_{n1} & A_{1n}a_{12} + A_{2n}a_{22} + \dots + A_{nn}a_{n2} & \dots & A_{1n}a_{1n} + A_{2n}a_{2n} + \dots + A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Вычислить значения корней сформированной системы уравнений двумя методами: обратной матрицы и методом Крамера.

| | | A | | | | B | |
|----|---|----|----|----|----|---|--|
| 0 | 1 | 11 | 0 | -3 | 0 | | |
| 0 | 1 | -3 | -1 | 0 | -2 | | |
| -9 | 0 | 0 | 6 | -4 | 7 | | |
| 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 9 | -5 | | |

Решение СЛАУ методом Крамера в Excel

Находим матричный определитель:

| | | |
|-------|--|--|
| | | |
| Аопр. | | |
| -3840 | | |

Находим определители X_n ,
заменяя каждый столбец
матрицей В

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|--|------|
| 0 | 1 | 11 | 0 | -3 | | |
| -2 | 1 | -3 | -1 | 0 | | 2510 |
| 7 | 0 | 0 | 6 | -4 | | |
| 0 | 0 | 2 | -4 | 0 | | |
| -5 | 0 | 1 | 0 | 9 | | |
| 0 | 0 | 11 | 0 | -3 | | |
| 0 | -2 | -3 | -1 | 0 | | 7660 |
| -9 | 7 | 0 | 6 | -4 | | |
| 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | | |
| 1 | -5 | 1 | 0 | 9 | | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | -3 | | |
| 0 | 1 | -2 | -1 | 0 | | -185 |
| -9 | 0 | 7 | 6 | -4 | | |
| 1 | 0 | 0 | -4 | 0 | | |
| 1 | 0 | -5 | 0 | 9 | | |
| 0 | 1 | 11 | 0 | -3 | | |
| 0 | 1 | -3 | -2 | 0 | | 535 |
| -9 | 0 | 0 | 7 | -4 | | |
| 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 1 | -5 | 9 | | |
| 0 | 1 | 11 | 0 | 0 | | |
| 0 | 1 | -3 | -1 | -2 | | 1875 |
| -9 | 0 | 0 | 6 | 7 | | |
| 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | -5 | | |

Определители X_n порядка делим на матричный определитель и получаем ответ

| X |
|----------|
| -0,65365 |
| -1,99479 |
| 0,04818 |
| -0,13932 |
| -0,48828 |

Решение СЛАУ методом обратной матрицы

1. Мышкой выделить квадратную область клеток, где будет размещена обратная матрица.
2. Начать вписывать формулу =МОБР
3. Выделить мышкой матрицу A. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
4. Закрыть скобку, нажать комбинацию клавиш: Ctrl-Shift-Enter
5. Должна вычислиться обратная матрица и заполнить предназначенную для неё область

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0,03229 | -0,03229 | -0,13906 | -0,20052 | -0,05104 |
| 0,23958 | 0,76042 | -0,01563 | -0,21354 | 0,07292 |
| 0,06615 | -0,06615 | 0,00547 | 0,02474 | 0,02448 |
| 0,04115 | -0,04115 | -0,03203 | -0,28776 | -0,00052 |
| -0,01094 | 0,01094 | 0,01484 | 0,01953 | 0,11406 |

1. Начать вписывать формулу =МУМНОЖ
2. Выделить мышкой матрицу - первый сомножитель.
3. Выделить мышкой вектор- второй сомножитель.
4. нажать комбинацию клавиш: Ctrl-Shift-Enter
5. Вычислиться произведение и заполниться предназначенная для неё область.

| X |
|----------|
| -0,65365 |
| -1,99479 |
| 0,04818 |
| -0,13932 |
| -0,48828 |