

Решение системы уравнений в
Excel методом Крамера и
обратной матрицы

Метод Крамера

Метод Крамера — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Для системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- основная матрица системы.

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки

(столбца) на их алгебраические дополнения - определитель системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{p1} \cdot A_{p1} + a_{p2} \cdot A_{p2} + \dots + a_{pn} \cdot A_{pn} = \\ = a_{1q} \cdot A_{1q} + a_{2q} \cdot A_{2q} + \dots + a_{nq} \cdot A_{nq}$$

$p = 1, 2, \dots, n, \quad q = 1, 2, \dots, n$

Остальные определители получим, заменяя столбец с коэффициентами соответствующей переменной (неизвестного) свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Нахождения неизвестных переменных по методу Крамера

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{b_1 - a_{12}X_2}{a_{11}}$$

$$a_{21} \left(\frac{b_1 - a_{12}X_2}{a_{11}} \right) + a_{22}X_2 = b_2$$

$$X_2(a_{12}a_{22} - a_{11}a_{21}) = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

$$X_2 = \frac{-b_2a_{11} + a_{21}b_1}{-a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}}$$

$$-b_2a_{11} + a_{21}b_1 = \Delta A_2$$

$$-a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21} = \Delta A$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Метод обратной матрицы

Матричный метод решения (метод решения через обратную матрицу) систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем состоит следующим.

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными (над произвольным полем):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \dots \dots, \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

Тогда её можно переписать в матричной форме: $A \cdot X = B$, где A - основная матрица системы; B и X - столбцы свободных членов и решений системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Найдём обратную матрицу по формуле:

$$\frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T \cdot A = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1} & A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \dots + A_{n1}a_{n2} & \dots & A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots + A_{n1}a_{nn} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + \dots + A_{n2}a_{n1} & A_{12}a_{12} + A_{22}a_{22} + \dots + A_{n2}a_{n2} & \dots & A_{12}a_{1n} + A_{22}a_{2n} + \dots + A_{n2}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}a_{11} + A_{2n}a_{21} + \dots + A_{nn}a_{n1} & A_{1n}a_{12} + A_{2n}a_{22} + \dots + A_{nn}a_{n2} & \dots & A_{1n}a_{1n} + A_{2n}a_{2n} + \dots + A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Вычислить значения корней сформированной системы уравнений двумя методами: обратной матрицы и методом Крамера.

		A				B	
0	1	11	0	-3	0	0	
0	1	-3	-1	0	-2	-2	
-9	0	0	6	-4	7	7	
1	0	2	-4	0	0	0	
1	0	1	0	9	-5	-5	

Решение СЛАУ методом Крамера в Excel

Находим матричный определитель:

Аопр.		
-3840		

Находим определители X_n ,
заменяя каждый столбец
матрицей В

0	1	11	0	-3		
-2	1	-3	-1	0		2510
7	0	0	6	-4		
0	0	2	-4	0		
-5	0	1	0	9		
0	0	11	0	-3		
0	-2	-3	-1	0		7660
-9	7	0	6	-4		
1	0	2	-4	0		
1	-5	1	0	9		
0	1	0	0	-3		
0	1	-2	-1	0		-185
-9	0	7	6	-4		
1	0	0	-4	0		
1	0	-5	0	9		
0	1	11	0	-3		
0	1	-3	-2	0		535
-9	0	0	7	-4		
1	0	2	0	0		
1	0	1	-5	9		
0	1	11	0	0		
0	1	-3	-1	-2		1875
-9	0	0	6	7		
1	0	2	-4	0		
1	0	1	0	-5		

Определители X_n порядка делим на матричный определитель и получаем ответ

X
-0,65365
-1,99479
0,04818
-0,13932
-0,48828

Решение СЛАУ методом обратной матрицы

1. Мышкой выделить квадратную область клеток, где будет размещена обратная матрица.
2. Начать вписывать формулу =МОБР
3. Выделить мышкой матрицу A. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
4. Закрыть скобку, нажать комбинацию клавиш: Ctrl-Shift-Enter
5. Должна вычислиться обратная матрица и заполнить предназначенную для неё область

0,03229	-0,03229	-0,13906	-0,20052	-0,05104
0,23958	0,76042	-0,01563	-0,21354	0,07292
0,06615	-0,06615	0,00547	0,02474	0,02448
0,04115	-0,04115	-0,03203	-0,28776	-0,00052
-0,01094	0,01094	0,01484	0,01953	0,11406

1. Начать вписывать формулу =МУМНОЖ
2. Выделить мышкой матрицу - первый сомножитель.
3. Выделить мышкой вектор- второй сомножитель.
4. нажать комбинацию клавиш: Ctrl-Shift-Enter
5. Вычислиться произведение и заполниться предназначенная для неё область.

X
-0,65365
-1,99479
0,04818
-0,13932
-0,48828