Решение задач повышенной сложности для дифференцированного обучения и при подготовке к ЕГЭ

Учитель информатики

ГБОУ лицей №144 Калининского

района

г.Санкт-Петербург

Мочалова Марина Владимировна

Тематика заданий:

- логика
  - задачи на отрезки
  - задачи на круги Эйлера
  - запросы к поисковым системам
- информация
  - кодирование
  - вычисление количества информации
    - при равновероятных событиях
    - при событиях не равновероятностных
- системы счисления
  - двоичное кодирование
  - позиционные системы счисления

Задание 1. На числовой прямой даны два отрезка: *P*=[10; 18] и *Q*=[31; 40]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка *A*, что формула $(x \in P) \to (x \in Q) \lor \neg(x \in A)$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*.

Решение.

Введем обозначения: P: x ϵ P, Q: x ϵ Q, A: x ϵ A

Перепишем условие задания:

¬P → Q + ¬A или ¬P → (Q + ¬A) (поскольку импликация имеет самый низкий приоритет и выполнится последней)

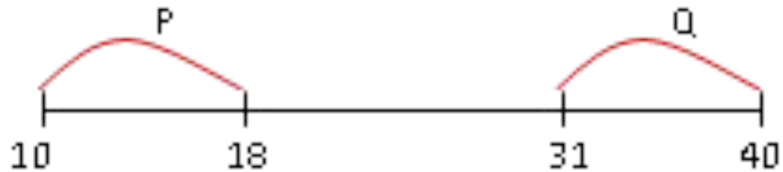
Раскрываем импликацию:

P + Q + ¬A

Это выражение должно быть равным 1 при любом значении A:

P + Q + ¬A = 1

Рассмотрим числовую ось с нашими отрезками P и Q.



Рассмотрим отдельно все три отрезка.
Отрезок 10–18: выражение истинно, т.к. P=1 (x ϵ P)
Отрезок 31– 40: выражение истинно, т.к. Q=1 (x ϵ Q)
Отрезок 18–31: выражение будет истинным в случае ¬A = 1, или A=0. Это значит, что A не принадлежит отрезку [18;31], значение A должно быть совпадающим либо с отрезком P, либо с отрезком Q.
Поскольку в задании спрашивается наименьшая длина отрезка, то это будет отрезок (18-10)=8
Ответ: 8

Задание 2. На числовой прямой даны два отрезка: *P*=[10; 18] и *Q*=[31; 40]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка *A*, что формула

$(x \in P) \vee \neg (x \in A) \vee (x \in Q)$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*.

Решение.

Введем обозначения: P: x ϵ P, Q: x ϵ Q, A: x ϵ A

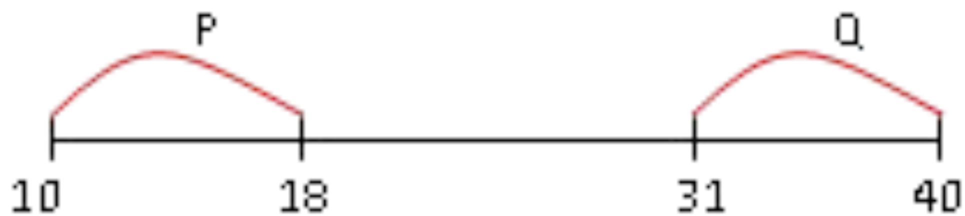
Перепишем условие задания:

$$P + \neg A + Q$$

Это выражение должно быть равным 1 при любом значении A:

$$P + \neg A + Q = 1$$

Рассмотрим числовую ось с нашими отрезками P и Q.



Рассмотрим отдельно все три отрезка.
Отрезок [10;18]: выражение истинно, т.к. P=1 (x ϵ P)
Отрезок [31; 40]: выражение истинно, т.к. Q=1 (x ϵ Q)
Отрезок [18;31]: выражение будет истинным в случае ¬A = 1, или A=0. Это значит, что A не принадлежит отрезку 18–31, т.е. значение A должно быть совпадающим либо с отрезком P, либо с отрезком Q.
Поскольку в задании спрашивается наибольшая длина отрезка, то это будет отрезок (31-40)=9
Ответ: 9

Задание 3. На числовой прямой даны 2 отрезка: P=[-10, 0] и Q=[-3, 8]. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A, что логическое выражение

$$((x \in P) \land (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \land (x \in A))$$

будет тождественно истинным, то есть будет принимать значение 1 при любом значении переменной x.

1) [-8, -4]   2) [-7, -1]   3) [-2, 5]   4) [-15, 15]

Решение.

Введем обозначения: P: x ∈ P, Q: x ∈ Q, A: x ∈ A

Перепишем условие задания:

$$(P \land A) \rightarrow (Q \land A)$$

Раскрываем импликацию, затем используем формулу де Моргана:

$$\neg(P \cdot A) + (Q \cdot A) \text{ или } \neg P + \neg A + Q \cdot A$$

Преобразуем выражение, используя следующий закон преобразования:

$$a + \neg a \cdot b = a + b$$

В нашем задании имеем:

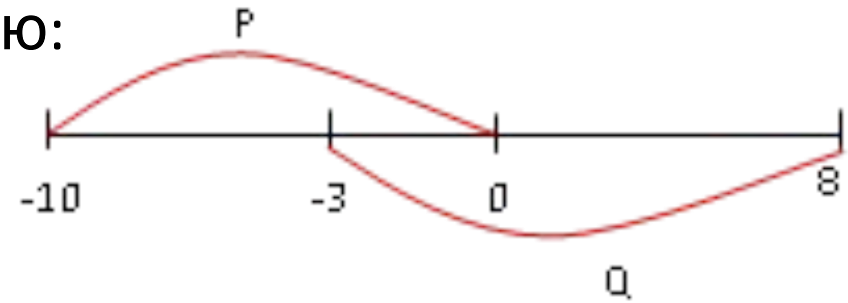
$$\neg P + (\neg A + Q \cdot A) = \neg P + (\neg A + Q) = \neg A + \neg P + Q$$

Поскольку это выражение должно быть тождественно истинным, т.е. равным 1 при любом значении А, то $\neg A$ должно быть истинным там, где $(\neg P + Q)$ ложно, или где истинно $\neg(\neg P + Q)$.

Преобразуем получившееся выражение, используя формулу де Моргана:

$$\neg(\neg P + Q) = (\neg\neg P) \land \neg Q = P \land \neg Q$$

Рассмотрим числовую прямую:



Выражение (P ∧ ¬Q) истинно на отрезке [-10; -3]. На нем должно быть ¬A=1 или A=0. Это означает, что отрезок A не должен содержать в себе отрезок [-10; -3]. Рассмотрим варианты ответов.

Отрезок 1) [-8; -4] содержит в себе значения из отрезка [-10;-3], поэтому не является правильным ответом.

Отрезок 2) [-7; -1] содержит в себе значения из отрезка [-10; -3], что быть не должно.

Отрезок 4) [-15; 15] содержит в себе значения из отрезка [-10; -3], что быть не должно.

Отрезок 3) [-2; 5] не содержит в себе значения [-10; -3], поэтому является ответом.

Ответ: 3)

Задание 4. На числовой прямой даны два отрезка: *R*=[27; 50] и *S*=[30; 67]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка *T*, что формула

$(x \in R) \rightarrow (((x \in S) \land \neg(x \in T)) \rightarrow \neg(x \in R))$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*.

Решение.

Введем обозначения: R: x ϵ R, S: x ϵ S, T: x ϵ T

Перепишем условие задания:

$$R \quad ((S \land \neg T) \rightarrow \neg R) \qquad \rightarrow$$

Преобразуем получившееся выражение, используя замену импликации и формулу де Моргана:

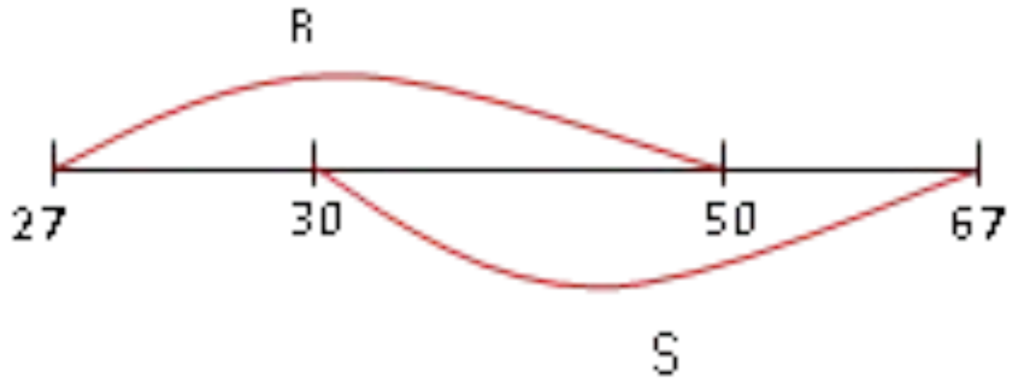
$R \rightarrow (\neg(S \land \neg T) + \neg R) \qquad R \quad (\neg S + \rightarrow T + \neg R)$

$\neg R + \neg S + T + \neg R \qquad \neg R + \neg S + T$

Это выражение должно быть равно 1 при любом значении T:

$$T + \neg R + \neg S = 1$$

Рассмотрим числовую прямую:



Чтобы получившееся выражение было везде истинным, T должно быть истинным там, где ложно (¬R + ¬S), т.е. где истинно ¬ (¬R + ¬S).

Выполним преобразования, используя формулу де Моргана:

¬ (¬R + ¬S) = ¬ ¬R Λ ¬¬S) = R Λ S = 1

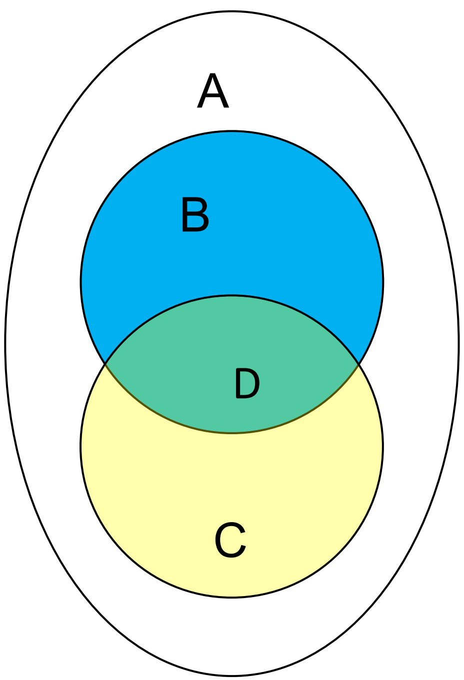
Это выражение истинно на отрезке [30; 50]. Его длина равна (50 – 30) = 20

Ответ: 20

Задание 5. Сколько натуральных чисел из второй сотни кратно 5, но не кратно 7?

Решение:

Построим круги Эйлера, введем обозначения количества различных чисел.



Проанализируем условие задачи. Всего чисел во второй сотне – 100 (101-200). Чисел, кратных 5, в каждом десятке -2, всего десятков – 10. Получаем: 20 чисел кратны 5 (голубая B и зеленая D области). Среди них есть три числа, кратных и 5 и 7, это числа 105, 140, 175, (зеленая область), т.е. D=3.

Искомое число – область B.

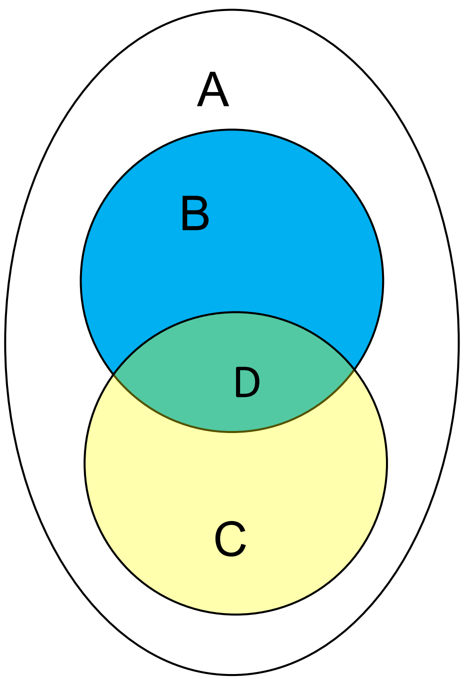
B = 12 – D B = 20 – 3 = 17

Ответ: 17 натуральных чисел из второй сотни кратно 5, но не кратно 7.

Задание 6. Сколько натуральных чисел из первого десятка не делится ни на 2, ни на 3?

Решение:

Построим круги Эйлера, введем обозначения количества различных чисел:



Проанализируем условие задачи. Всего чисел в первом десятке - 10. Каждое второе число – четное, т.е. делится на 2. Таких чисел 5 (10/2=5) (голубая B и зеленая D области). Чисел, кратных трем, 3 (каждое третье число, 10/3=3) (желтая C и зеленая D области). Число, кратное и 2, и 3, одно (число 6) (зеленая область), т.е. D=1.

Вычисляем: B = 5-1=4, C = 3-1=2

Искомое число – область А.

A = 10 – B – D – C   A = 10 – 4 – 1 – 2 = 3

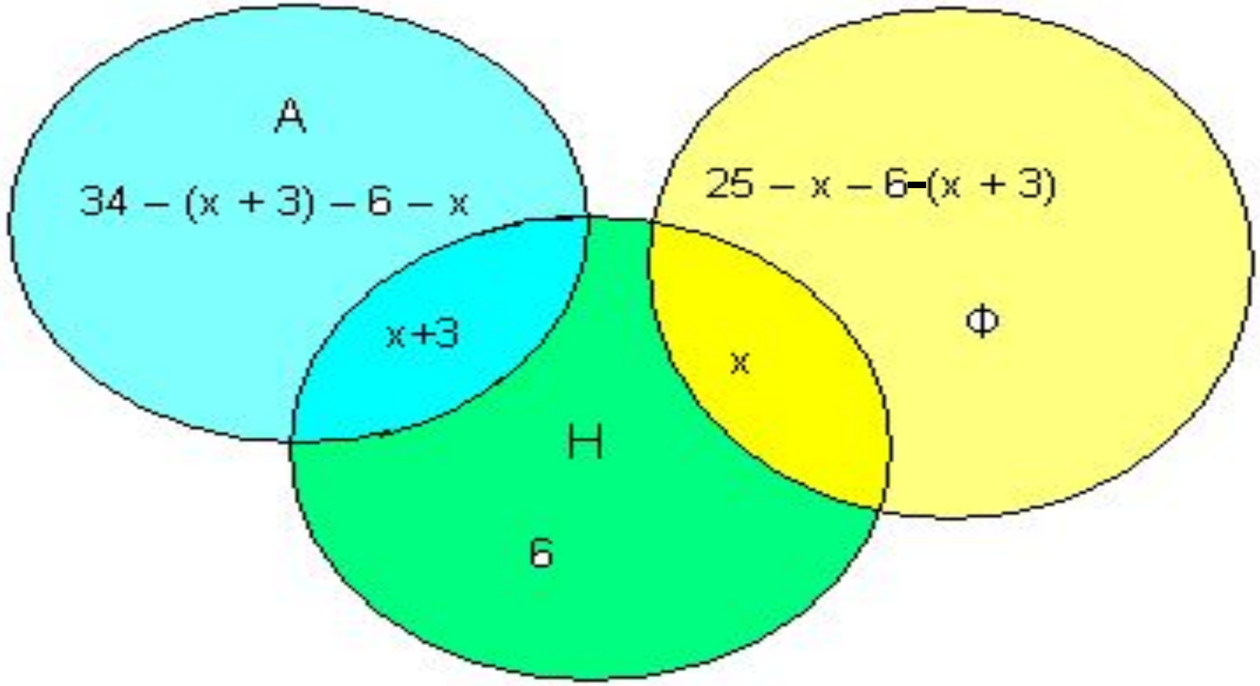
Ответ: 3 числа из первого десятка не

Задание 7.

В восьмом классе учится 40 человек. Каждый из них изучает не менее одного иностранного языка: английский (А), немецкий (Н), французский (Ф). 34 человека изучают хотя бы один из двух языков: английский, немецкий. 25 человек — хотя бы один из языков: немецкий, французский. 6 человек только немецкий. Одновременно два языка — английский и немецкий — изучают на 3 человека больше, чем французский и немецкий языки. Сколько человек изучает каждый из языков и сколько изучает одновременно каждую пару языков?

Решение.

При решении данной задачи, кроме кругов Эйлера, которые наглядно показывают решение, удобно применить составление уравнения по условию задачи.



Составим и решим уравнение. Обозначим: x – изучают Ф и Н.

(34 – x – 3 – 6 – x) + (x + 3) + 6 + x + (25 – x – 6 – x – 3) = 40 x = 5

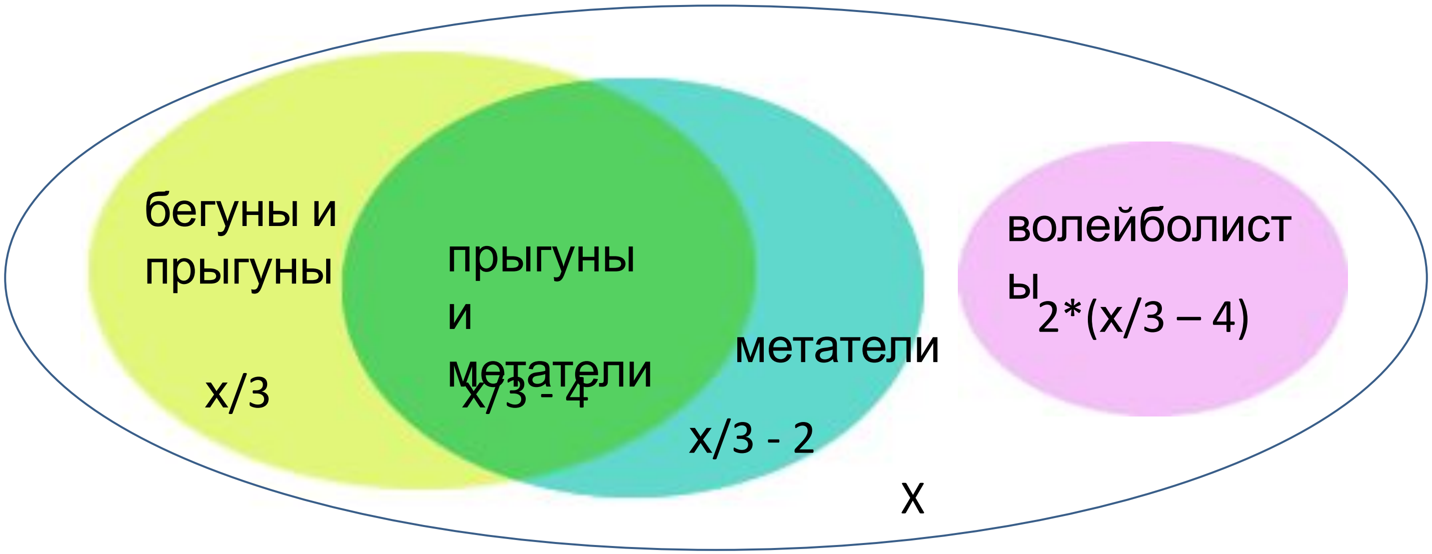
Ф + Н = 5 человек. А + Н = 8 человек.

А = 34 – 8 – 6 – 5 =15 человек. Н = 6 человек.

Ф =25 – 5 – 6 – 8 = 6 человек.

Задание 8.

Летом в спортивный лагерь пришло письмо: «Здравствуйте! Мы узнали, что у вас будут проводиться спортивные соревнования, и мы хотим участвовать в них. В состав нашей команды входят волейболисты, бегуны, прыгуны и метатели. Команда у нас сильная. Все бегуны являются и прыгунами, а все прыгуны являются или метателями, или бегунами. Одна из особенностей нашей команды состоит в том, что среди метателей, которые являются еще и прыгунами, нет бегунов. Метателей у нас в два раза меньше, чем прыгунов, и на два меньше, чем бегунов. Бегуны составляют третью всей часть, а волейболистов в два раза больше, чем тех ребят которые являются одновременно и прыгунами, и метателями. До скорой встречи!». Сколько мест необходимо подготовить для этой команды?



X – вся команда

x/3 – бегуны

(x/3 – 2) – метатели

2*(x/3 – 2) – прыгуны

2*(x/3 – 2) - x/3 = x/3 – 4 – прыгуны и метатели

2*(x/3 – 4) – волейболисты

команда = бегуны + волейболисты + метатели (часть прыгунов – бегуны, остальные – метатели)

x = x/3 + 2*(x/3 – 4) + (x/3 – 2) . **Ответ:** x = 30

Задание 9.
Сборная команда страны по летнему многоборью отправилась на сборы. Известно, что мужчин, занимающихся, плаванием, или мужчин, занимающихся бегом, в команде 33 человека. Мужчин, которые и бегают, и плавают, 7 человек, а мужчин, занимающихся бегом, 18.
Сколько в команде мужчин, которые занимаются только плаванием?

Решение.
Проанализируем условие задачи. Из нее следует, что в команде есть мужчины-пловцы, мужчины-бегуны и мужчины, занимающиеся и бегом, и плаванием.
Построим круги Эйлера, введем обозначения количества спортсменов по видам спорта.

x – искомое количество мужчин-пловцов
18 – 7 = 11 человек – мужчины, которые только бегают (без тех, кто и плавает, и бегает).
33 человека – мужчины-пловцы или мужчины-бегуны.
Составляем и решаем уравнение.
33 = x + 11   x = 22
Ответ: 22 человека в команде – мужчины-пловцы.

Задание 10.
В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите обозначения запросов в порядке возрастания количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» - &.

А) Пушкин | Евгений | Онегин
Б) Пушкин | Онегин
В) Пушкин & Евгений & Онегин
Г) Пушкин & Онегин

Решение.

Анализируем запросы.

Под обозначением В) присутствует три условия, которые должны выполняться одновременно. Ясно, что таких страниц будет меньше всего. Несколько больше страниц будет найдено по запросу, в котором должны выполняться одновременно два условия – это запрос Г). Еще больше страниц найдется по условию Б), где ищется одно слово из двух возможных (логическое «ИЛИ»). И, наконец, наибольшее число страниц будет найдено по запросу А), где количество найденных страниц будет самым большим. **Ответ:** ВГБА

Задание 11.
Ваня шифрует русские слова, записывая вместо каждой буквы ее номер в алфавите (без пробелов). Номера букв даны в таблице.

А	1	И	10	С	19	Ь	28
Б	2	Й	11	Т	20	Ы	29
В	3	К	12	У	21	Ъ	30
Г	4	Л	13	Ф	22	Э	31
Д	5	М	14	Х	23	Ю	32
Е	6	Н	15	Ц	24	Я	33
Ё	7	О	16	Ч	25		
Ж	8	П	17	Ш	26		
З	9	Р	18	Щ	27		

Задание 12.

Некоторые шифровки можно расшифровать несколькими способами. Например, 311333 может означать «ВАЛЯ», может «ЭЛЯ», а может «ВААВВВ».

Даны четыре шифровки: 3113 9212 6810 2641

Только одна из них расшифровывается единственным способом. Найдите ее и расшифруйте. То, что получилось, запишите в качестве ответа.

Ответ: _______________

Решение.

Решение задачи начнем с анализа первой записи - 3113. Поскольку в алфавите 33 буквы, то либо первая цифра 3 означает букву В, либо стоит число 31 (буква Э). Следующие цифры 1 и 3 могут быть либо одним числом (буква Л), либо двумя отдельными (буквы А и В). Таким образом, первая запись имеет варианты: ВААВ, ЭАВ, ЭЛ.
Во второй записи цифра 9 – это буква З. Далее могут быть варианты – 2-1-2, 2-12 и 21-2.
Аналогично исключается и последняя шифровка.
В записи 6810 первая цифра 6 имеет однозначное решение, далее цифра 8 также может быть только единственной буквой. Последние две цифры 10 могут означать только букву И, поскольку буквы с номером 0 в таблице нет.
Итого, ответ ЕЖИ.
Ответ: ЕЖИ

Задание 13.

Некоторый алгоритм из одной цепочки символов получает новую цепочку следующим образом. Сначала вычисляется длина исходной цепочки символов; если она четна, то в середину цепочки добавляется символ **А**, а если нечетна, то в начало цепочки добавляется символ **Б**. В полученной цепочке символов каждая буква заменяется буквой, следующей за ней в русском алфавите (**А** на **Б**, **Б** на **В** и т.д., а **Я** на **А**). Получившаяся таким образом цепочка является результатом работы алгоритма.

Например, если исходной была цепочка **ВРМ**, то результатом работы алгоритма будет цепочка **ВГСН**, а если исходной цепочкой была **ПД**, то результатом будет **РБЕ**. Дана цепочка символов **ПУСК**. Какая цепочка символов получится, если к данной цепочке применить описанный алгоритм дважды (т.е. применить алгоритм к данной цепочке, а затем к результату вновь применить алгоритм?).

Решение.

Исходная цепочка содержит четное число символов, поэтому добавляем в середину символ **А** – **ПУАСК** и после этого производим замену букв по заданному алгоритму: **РФБТЛ**. Получили цепочку из нечетного количества символов, поэтому добавляем в начало символ **Б** – **БРФБТЛ**. Далее следует заменить символы на те, что в алфавите следуют за ними.

Получаем **ВСХВУМ**.

Ответ: ВСХВУМ

Задание 14. Сколько информации несет сообщение о том, что было угадано число в диапазоне от 784 до 911?

Решение: количество угадываемых чисел N = 911- 784 + 1 = 128

$$N = 2^i$$

По формуле Хартли находим искомое i

$N = 128 \quad 128 = 2^7 \quad i=7$

Ответ: 7 бит

Задание 4. Одноклассник рассказал, что семья переехала в новый дом и теперь он живет на 11-ом этаже шестнадцатиэтажного дома во втором подъезде. Эта новость содержит 6 бит информации. Сколько подъездов в доме одноклассника?

$N_{подъездов} = 2^{iпод}$ $\quad N_{этажей} = 2^{iэтаж}$

Решение:

$N_{подъездов} = 16$ $\quad i_{под} = 4$ $\quad i_{суммар} = i_{под} + i_{этаж}$

$i_{суммар}$ $\quad i_{этаж} = i_{суммар} - i_{под}$

Задание 15.
Имеются 2 мешка с монетами, в одном из них есть фальшивая (более легкая). Для ее нахождения понадобилось 1-й мешок взвесить на рычажных весах 6 раз, а 2-й – 4 раза. Сколько всего монет в обоих мешках?

Решение: рычажные весы позволяют нам определить, на какой чаше груз более легкий, т.е. в какой части находится фальшивая монета.

Разделим на 2 части содержимое 1-ого мешка и взвесим части. Таким образом мы определим ту часть, в которой находится фальшивая (более легкая) монета. При этом неопределенность наших знаний при 1-м взвешивании уменьшилась в 2 раза, т.е. мы получили 1 бит информации. Более легкую часть вновь делим пополам и взвешиваем, получаем вновь уменьшение вдвое неопределенности знаний и добавление 1 бит информации. Таким образом, после всех 6 взвешиваний мы найдем фальшивую монету и получим 6 бит информации, т.е. $i_1=6$.

Задание 15.

Имеются 2 мешка с монетами, в одном из них есть фальшивая (более легкая). Для ее нахождения понадобилось 1-й мешок взвесить на рычажных весах 6 раз, а 2-й – 4 раза. Сколько всего монет в обоих мешках?

Второй мешок взвесили 4 раза, получая каждый раз по 1 биту информации, т.е. $i_2=4$.
Находим количество монет в каждом мешке, используя формулу Хартли $N=2^i$ (N – количество вариантов событий, i - количество информации в битах, содержащееся в одном событии из N возможных).

$N_1=2^{i1}$ $N_1=2^6$ $N_1=64$

$N_2=2^{i2}$ $N_2=2^4$ $N_2=16$

$N=N_1+N_2$ $N= 64+16=80$

Ответ: 80 монет было в обоих мешках

Формулы для частного события с номером i для случая не равновероятных событий :

$$N_i = 2^i \qquad N_i = \frac{1}{p_i}$$

N_i – количество возможных вариантов *i*-го события

При решении задач этого типа часто используется частная формула

$$i = 1og_2(1/p)$$

где i - это количество информации, содержащееся в одном из *N* событий,

p - вероятность этого события.

Задание 16.

В корзине лежат шары: синие, красные, белые, зеленые, всего 32 шара. Сообщение о том, что вынули синий шар, несет 2 бит информации. Синих шаров было в 2 раза меньше, чем красных, белых и зеленых – поровну. Сколько шаров каждого цвета было в корзине?

Решение:

В задаче имеют место события не равновероятностные.

Используем следующие формулы: $\mathbf{N_i = 2^i}$ $\mathbf{N_i = \mathit{1} / p_i}$

Из условия задачи $i_c = 2$ бит. Находим p_c.

$p_c = 1 / N_c$ $N_c = 2^{ic}$ $N_c = 2^2 = 4$ $p_c = 1 /4$

С другой стороны вероятность того, что вынули синий шар, равна $p_c = k_c / N$ (k_c – количество синих шаров, N – всего шаров в корзине).

Находим k_c. Затем определяем количества остальных шаров.

$k_c / 32 = 1 / 4$ $k_c = 8$ $k_{кр} = 2 * k_c = 16$ $k_з = k_б = (32 – 16 – 8) / 2 = 4$

Ответ: в корзине синих шаров – 8, красных – 16, белых и зеленых – по 4 шт.

Задание 17. На уроке математики Незнайку вызывают к доске в 4 раза реже, чем Винтика. Определить количество информации в сообщении о том, что к доске вызвали Винтика, если сообщение о том, что вызвали Незнайку, несет 8 бит информации.

Решение.

По условию задачи дано: $i_н = 8$ бит $P_в = 4 * p_н$

Находимм вероятность того, что к доске вызвали Незнайку:

$N_н = 2^{iн}$ $N_н = 2^8 = 256$ $p_н = 1 / 256$

Находим вероятность того, что к доске вызвали Винтика, а затем - количество информации, содержащееся в сообщении о том, что к доске вызвали Винтика:

$P_в = 4 * p_н$ $P_в = 4 * 1 / 256 = 1 / 64$

$N_в = 1 / P_в$ $N_в = 1 / (1 / 64) = 64 = 2^6$ $i_в = 6$ (бит)

Ответ: количество информации в сообщении о том, что к доске вызвали Винтика, равно 6 бит.

Задание 18.

Число 110 нужно перевести из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления. Сколько единиц будет содержать полученное число?

Решение:

Вспоминаем алгоритм перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную: нужно число и получаемые далее частные делить на 2 до тех пор, пока не получим частное, равное 1. Затем выписываем в обратном порядке остатки от деления, начиная запись с последнего частного, равного 1.

Решение.

При делении частных на 2 в остатке получается либо 0 (если частное четное), либо 1 (если частное нечетное). Для решения задачи перевод числа не нужен. Достаточно выписать цепочку частных от деления на 2 и посчитать количество частных, которые окажутся нечетными. (Хотя при наличии свободного времени на экзамене можно сделать проверку переводом исходного числа в двоичную систему счисления.)

$$110 / 2 = 55 \xrightarrow[1]{} 54 / 2 = 27 \xrightarrow[1]{} 26 / 2 = 13 \xrightarrow[1]{} 12 / 2 = 6 / 2 = 3 \xrightarrow[1]{} 2 / 2 = 1$$

Ответ: 5

Задание 19. (Демо-2015, задание 4)
Сколько единиц в двоичной записи числа 519?

Вариант 1 (*прямой перевод*):
переводим число 519 в двоичную систему: 519 = 1000000111_2
Ответ: 4

Вариант 2 (*разложение на сумму степеней двойки*):
$519 = 512 + 4 + 2 + 1 = 2^9 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
Ответ: 4

Вариант 3 (*определение количества нечетных чисел при последовательном делении на 2 исходного числа и получаемых частных*):

$$519 \underset{1}{\longrightarrow} 259 \underset{1}{\longrightarrow} 129 \underset{1}{\longrightarrow} 64 \longrightarrow 32 \longrightarrow 16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Ответ: 4

Задание 20. (http://ege.yandex.ru)

Даны 4 числа, они записаны с использованием различных систем счисления. Укажите среди этих чисел то, в двоичной записи которого содержится ровно 5 единиц. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.

1) 15_{10} 2) 77_8 3) 345_8 4) FA_{16}

Решение:

Для решения задачи необходимо перевести в двоичную систему счисления все числа.

Первое число переводим любым методом, поскольку оно небольшое. Например, разложим его на сумму степеней двойки:

$15 = 8 + 4 + 2 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1111_2$

Три следующих числа переводим, используя таблицы соответствия двоичной-восьмиричной и двоичной-шестнадцатиричной (таблицы соответствия систем счисления, родственных двоичной).

$77_8 = 111\ 111_2$
$345_8 = 11\ 100\ 101_2$
$FA_{16} = 1111\ 1010_2$

Как видим, два числа имеют в двоичной системе счисления 5 единиц – число $15_{10} = 1111_2$ и число $345_8 =$ $11\ 100\ 101_2$.
В нашем случае в ответе требуется указать наибольшее из них – это число 345_8

Ответ: 3)

Задание 21.(ФИПИ, открытый банк заданий)
Укажите наибольшее основание системы счисления, в которой запись числа 15 имеет ровно 3 значащих разряда.

Решение:
Поскольку по условию задачи запись числа 15 в системе счисления с основанием ***p*** имеет три значащих разряда, то можно записать

$$100_p \le 15 < 1000_p \quad \text{или} \quad p^2 \le 15 < p^3$$

Решаем первую часть неравенства: $p^2 \le 15$. Получаем: $p < 4$. Поскольку имеем строгое неравенство, ответом не может быть $p=4$. Поэтому ответом будет $p=3$.

Проверяем вторую часть неравенства для $p=3$:

$$p^3 > 15 \qquad 3^3>15 \qquad 27>15$$

Ответ: 3

Задание 22. *Десятичное число 65 в некоторой системе счисления записывается как 230. Определите основание системы счисления.*

Решение

По условию задачи: $65 = 230_p$, где p – искомое основание системы счисления.

Представим это равенство в десятичной системе счисления: $65 = 2*p^2 + 3*p$

Получаем квадратное уравнение $2p^2 + 3p - 65 = 0$

Находим его корни, учитывая, что основание системы счисления p – натуральное число ($p>=2$).

Получаем p=5.

Ответ: 5

Задание 23. (ФИПИ открытый банк заданий)
В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 16 записывается как 100. Укажите это основание.

Решение:
Запишем условие задачи:
$16 = 100_p$ (p – искомое основание системы счисления).

Представим это равенство в десятичной системе счисления:

$$16 = p^2$$

Решаем уравнение, получаем два корня: $p_1=4$ $p_2=-4$

Основание системы счисления не может быть числом отрицательным, поэтому $p_2=-4$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4

Задание 24.
Решите уравнение $1D_{16} + 72_8 = X_2$. Основание системы счисления в ответе не указывать.
Решение.

Как видно из условия, все числа в задании представлены в системах счисления, родственных двоичной (8-ричной и 16-ричной).

Искомое число записано в двоичной системе счисления, поэтому для решения нужно все числа записать в двоичной системе счисления, затем выполнить их сложение.

$1D_{16} = 11101_2$ $72_8 = 111010_2$

Собирая всё в одно уравнение, получаем

$X_2 = 11101_2 + 111010_2$

Выполняем сложение, получаем результат: $X_2 = 1010111_2$

Ответ: *1010111*

Задание 25.

Решите уравнение $121_x + 1 = 101_7$. Ответ дайте в троичной системе счисления.

Решение.

Переведём все числа в десятичную систему счисления:

$121_x = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$ $101_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 50$

Собираем всё в одно уравнение, получаем

$x^2 + 2x + 1 + 1 + 50x^2 + 2x – 48 = 0$

Это уравнение имеет два решения, x=6 и x= -8; основание системы счисления – натуральное число, поэтому ответ x= 6

Переводим ответ в троичную систему: $6 = 2 \cdot 3^1 = 20_3$.

Ответ: 20_3

Задание 26.

Найдите наименьшие значения x и y, при которых существует равенство 147 + x = 14y. Ответ запишите в троичной системе счисления через запятую. Основание системы счисления указывать не нужно.

Решение:

1)запишем равенство в десятичной системе счисления:

1*7 + 4 + x = y + 4   11 + x = y + 4

2) Из условия следует, что y>=5 (т.к. число 14_y в системе счисления с основанием *y* содержит значащие цифры 1 и 4). Минимальное значение y_{min} = 5.

3) Минимальное значение x_{min} получается при минимальном значении y_{min} .

4) При y_{min}=5 получаем x_{min}=2 .

5) Переводим 2 и 5 в троичную систему счисления: 2 =2_3 5=12_3.

Задание 27. http://ege.yandex.ru

В системах счисления с основанием p запись числа 77 оканчивается на 0, а запись числа 29 – на 1. Чему равно это число?

Решение:

1)поскольку число 77 в p-ричной системе счисления оканчивается на 0, то основание p является делителем числа 77, т.е. возможны значения p=7, p=11, p=77

2) поскольку число 29 в p-ричной системе счисления оканчивается на 1, то основание p является делителем числа 28, т.е. возможны значения p=2, p=4, p=7, p=14, p=28

3)общим основанием для обоих чисел является p=7

Ответ: 7

Источники:

- http://www.fipi.ru/
- http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm
- тренировочные варианты для подготовки к ЕГЭ по информатике прошлых лет
- демоверсии ЕГЭ прошлых лет