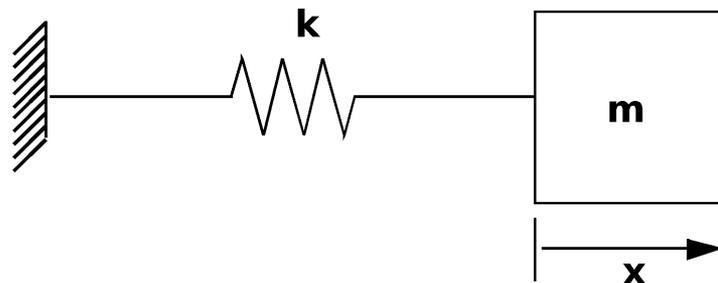


Раздел 6

Собственные частоты и формы колебаний

Основные уравнения

Рассмотрим систему с одной степенью свободы без демпфирования, как показано на рисунке.



где m = масса

k = жесткость

Уравнение движения при свободных колебаниях (т.е. без внешней нагрузки или демпфирования) выглядит так:

$$m\ddot{x} = -kx$$

ИЛИ

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Основные уравнения (продолжение)

Для системы с несколькими степенями свободы уравнение примет вид

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

где $[K]$ = Матрица жесткости (такая же как и в статическом анализе).

$[M]$ Матрица масс (представляет инерционные свойства конструкции).

$[K]$ и $[M]$ должны быть вещественными и симметричными.

Запомните: Число степеней свободы равно числу координат, необходимых для описания деформированной формы конструкции в каждый данный момент времени.

Матрица масс

Матрица масс представляет инерционные свойства конструкции.

MSC.Nastran предоставляет пользователю две возможности для определения матрицы масс:

1. Несогласованная матрица масс (по умолчанию).

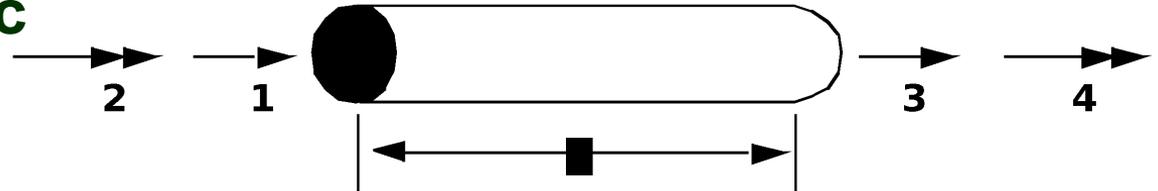
Содержит только диагональные члены, связанные с поступательными степенями свободы.

2. Согласованная матрица масс.

Содержит также внедиагональные члены, связывающие поступательные степени свободы и вращательные степени свободы. (Примечание: для стержневых элементов связываются только степени свободы поступательного движения.)

Матрица масс (продолжение)

Пример матрицы масс



где ρ = массовая плотность
 A = площадь сечения

Несогласованная матрица масс

$$[M] = \rho AL \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Согласованная матрица масс

$$[M] = \rho AL \begin{bmatrix} 5/12 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица масс (продолжение)

Согласованная и несогласованная матрица масс

- **Согласованная матрица масс, в общем случае, более точная чем несогласованная матрица масс.**
- **Несогласованная матрица масс предпочтительнее с точки зрения скорости расчета при динамическом анализе.**
- **Выбираются пользователем согласованные матрицы масс для элементов:**
 - ▣ **PARAM, COUPMASS, 1** выбирает согласованную матрицу масс для всех элементов BAR, ROD, и PLATE которые включают в себя изгибную жесткость.
 - ▣ По умолчанию выбирается несогласованная матрица масс.
- **Элементы, которые могут иметь как согласованную, так и несогласованную матрицу масс:**
 - ▣ **BAR, BEAM, CONROD, HEXA, PENTA, QUAD4, QUAD8, ROD, TETRA, TRIA3, TRIA6, TRIAX6, TUBE**

Матрица масс (продолжение)

- **Элементы имеющие только несогласованную матрицу масс:**
 - **CONEAX, SHEAR**
- **Элементы имеющие только согласованную матрицу масс:**
 - **BEND, HEX20, TRAPRG, TRIARG**
- **Несогласованная матрица масс содержит только диагональные компоненты, связанные с поступательным движением (без вращения).**
- **Согласованная матрица масс содержит внедиагональные компоненты, связанные как с поступательным движением, так и с вращательным для элементов типа BAR, BEAM, и BEND элементы.**

Теория

Рассмотрим уравнение

$$(6-1) \quad [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

Представим гармоническое решение в виде

$$(6-2) \quad \{x\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$$

(Физический смысл этого в том, что по всем координатам осуществляется синхронное движение и конфигурация системы не меняет свою форму во время движения, меняется только амплитуда.)

Из уравнения 6-2 получим

$$(6-3) \quad \{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{\phi\}e^{i\omega t}$$

Теория (продолжение)

Подставив уравнения 6-2 и 6-3 в уравнение 6-1, получим:

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} e^{i\omega t} + [K] \{\phi\} e^{i\omega t} = 0$$

которое, после преобразования имеет вид:

$$(6-4) \quad ([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0$$

Это обобщенная проблема на собственные значения.

Теория (продолжение)

Поэтому, существует два варианта решения данного уравнения:

1. Если $\det ([K] - \omega^2 [M]) \neq 0$, то из уравнения (6-4) следует что есть только одно решение

$$\{ \varphi \} = 0$$

- это, так называемое, тривиальное решение, которое с физической точки зрения интереса не представляет

2. Тогда, чтобы получить не тривиальное решение, относительно $\{ \varphi \}$, необходимо, чтобы:

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Теория (продолжение)

Проблема собственных значений сводится к решению уравнения

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

или

$$\det ([K] - \lambda [M]) = 0$$

где $\lambda = \omega^2$

Теория (продолжение)

Если конструкция имеет N динамических степеней свободы (степеней свободы с массой), то имеется N чисел ω , которые будут решением проблемы собственных значений. Эти ω ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$) и есть собственные частоты, так же известные как резонансные частоты, основные частоты и частотные характеристики.

Собственный вектор $\{\phi_j\}$ связанный с собственной частотой ω_j и называется собственной формой или формой колебаний. Собственная форма соответствует отклонению модели от состояния покоя.

Когда конструкция вибрирует, ее форма в каждый момент времени является линейной комбинацией собственных форм колебаний.

Теория (продолжение)

Пример

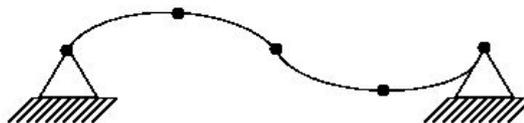
Свободно опертая балка



Форма 1



Форма 2



Форма 3



и т. д.

Для чего нужно вычислять собственные частоты и формы колебаний

- Для определения динамических характеристик конструкции. Например, если вращающийся механизм помещается в некоторую конструкцию, то для избежания чрезмерных вибраций желательно проверить насколько близки его частоты вращения к собственным частотам конструкции.
- Для определения динамического усиления нагрузки.
- Собственные частоты и формы используются для того, чтобы знать как проводить последующий динамический анализ (нестационарные процессы, спектральный анализ), например, если требуется выбрать подходящий временной шаг δt для интегрирования уравнения движения в нестационарном анализе.

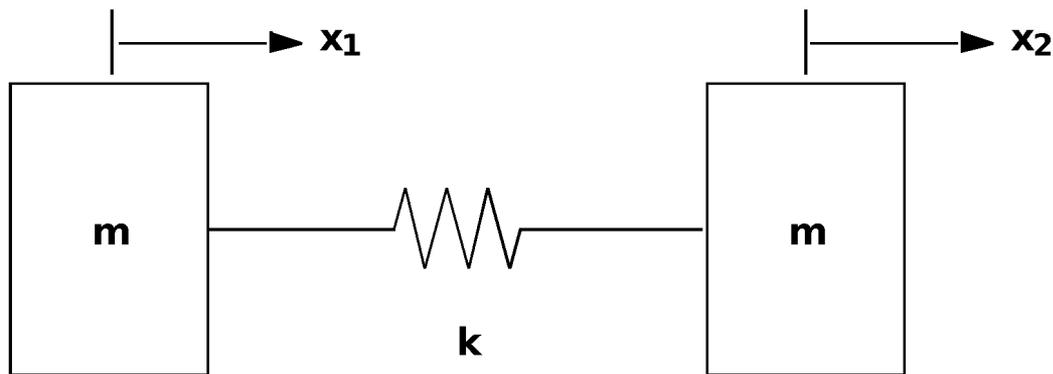
Для чего нужно вычислять собственные частоты и формы колебаний (продолжение)

- Для использования собственных частот и форм при последующем динамическом анализе, например, в анализе нестационарных процессов с использованием модальных методов.
- Для проведения экспериментальных исследований, например, для определения местонахождения акселерометров и т. д.

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний

Если конструкция не полностью закреплена, например, допускается перемещение ее как твердого тела (форма колебаний без напряжений) или механизма, то как минимум одна собственная частота будет равняться нулю.

Пример: Следующая не закрепленная конструкция может перемещаться как твердое тело.



$$\omega_1 = 0 \{ \phi_1 \} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

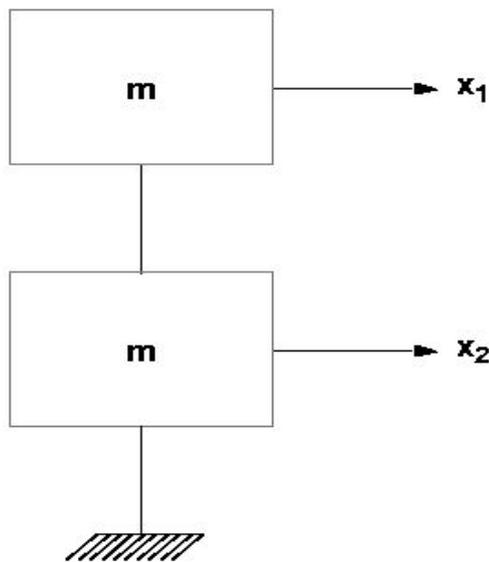
Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний (продолжение)

- Собственные частоты ($\omega_1, \omega_2, \dots$) имеют размерность радиан/с. Они также могут быть представлены в герцах (цикл/с), с помощью выражения

$$f_j(\text{герц}) = \frac{\omega_j(\text{радиан/с})}{2\pi}$$

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний (продолжение)

- Масштабирование собственных форм произвольное. Например



$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 300 \\ 150 \end{Bmatrix}, \{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} .66 \\ .33 \end{Bmatrix}$$

... одну и ту же "форму колебаний"

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний (продолжение)

- **Определение собственных частот, т. е., решение уравнения**

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

является сложной задачей. Для решения этой задачи должны применяться численные методы.

Методы вычислений

MSC.Nastran предоставляет пользователю следующие три подхода к нахождению собственных значений.

Метод итераций

Собственные значения (или собственные частоты) определяются одно за другим методом итераций. Имеются два варианта метода INV и SINV. Эти методы наиболее удобны при определении нескольких собственных частот. В общем SINV более надежен, чем INV.

Метод трансформаций

Общая проблема собственных значений

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = 0$$

Методы вычислений (продолжение)

Преобразуется в форму

$$[A]\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$$

Затем матрица $[A]$ трансформируется в трехдиагональную матрицу, с использованием методов Гивенса или Хаусхольдера. В конце концов, все собственные значения извлекаются одновременно с использованием QR алгоритма. Имеются два варианта метода Гивенса и два варианта метода Хаусхольдера: GIV, MGIV, HOU и MHOU. Эти методы более эффективны, когда требуется определить большое количество собственных значений

Методы вычислений (продолжение)

Метод Ланцоша

Это рекомендуемый метод, который является комбинацией методов итераций и трансформаций. Этот метод наиболее эффективен для расчета малого числа собственных значений в больших разреженных задачах (большинство КЭ моделей попадают в эту категорию).

Записи для анализа собственных частот

- Секция EXECUTIVE CONTROL
SOL 103
- Секция CASE CONTROL
METHOD=x Номер указывающий на записи EIGR или EIGRL,
имеющиеся в секции BULK DATA.
- Секция BULK DATA
 - EIGR Запись для нахождения собственных значений.
или
 - EIGRL Запись для метода Ланцоша.
 - Требуются массовые свойства.

Массовые свойства

Массовые свойства

- **Конструкционная масса** Добавляет массу элементов (например, для расчета эффекта) гравитационного
 - Плотность в записях MATi,
 - единицы = (“масса”/объем)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-------|---|-----|-----|---|---|---|----|
| MAT1 | MID | E | G | NU | RHO | | | | |
| MAT1 | 1 | 10.+7 | | 0.3 | 0.1 | | | | |

- **Не конструкционная масса** Добавляет массу (пример - нагрузка на строительное перекрытие, нагрузка на грузовой корабль) на

Массовые свойства (продолжение)

- Масса на единицу размера (масса на единицу площади в данном случае)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|-----|------|-----|------|-----------|------|------|------|----|
| PSHELL | PID | MID1 | T | MID2 | $121/T^3$ | MID3 | TS/T | NSM | |
| PSHELL | 2 | 1 | 0.1 | 1 | | 1 | | 0.15 | |

- **Сосредоточенная масса**

- Явные массовые свойства в узле (CONM2)

Массовые свойства (продолжение)

Единицы массы

- Программа подразумевает что размерности инерции:

lb-sec²/ft (ft-lb-sec система)

кг-сек²/м

- PARAM,WTMASS умножает входные данные для получения размерности инерции. Обычно используется для замены весовых размерностей на массовые.

Пример: Плотность (RHO) стали задана как 490.0 lb/ft³ в MAT1.

Используйте PARAM,WTMASS,.031056, который умножит элементы матрицы масс конструкции на 1/g (= 1/32.174 ft/sec²) для того, чтобы перевести плотность в соответствующие единицы инерции.

Массовые свойства (продолжение)

Генератор весов узловых точек

```

OUTPUT FROM GRID POINT WEIGHT GENERATOR
REFERENCE POINT = 0
M O
* 4.322800E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 2.417940E+00 -2.161400E+01 *
* 0.000000E+00 4.322800E+00 0.000000E+00 -2.417940E+00 0.000000E+00 4.322800E+01 *
* 0.000000E+00 0.000000E+00 4.322800E+00 2.161400E+01 -4.322800E+01 0.000000E+00 *
* 0.000000E+00 -2.417940E+00 2.161400E+01 1.679263E+02 -2.161400E+02 -2.417940E+01 *
* 2.417940E+00 0.000000E+00 -4.322800E+01 -2.161400E+02 5.904396E+02 -1.208970E+01 *
* -2.161400E+01 4.322800E+01 0.000000E+00 -2.417940E+01 -1.208970E+01 7.532883E+02 *
S
* 1.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 *
* 0.000000E+00 1.000000E+00 0.000000E+00 *
* 0.000000E+00 0.000000E+00 1.000000E+00 *
DIRECTION
MASS AXIS SYSTEM (S)      MASS      X-C.G.      Y-C.G.      Z-C.G.
X      4.322800E+00      0.000000E+00  5.000000E+00  5.593458E-01
Y      4.322800E+00      1.000000E+01  0.000000E+00  5.593458E-01
Z      4.322800E+00      1.000000E+01  5.000000E+00  0.000000E+00
I (S)
* 5.850388E+01 -2.842171E-14 -3.552714E-15 *
* -2.842171E-14 1.568072E+02 -3.552714E-15 *
* -3.552714E-15 -3.552714E-15 2.129383E+02 *
I (Q)
* 5.850388E+01 *
* 1.568072E+02 *
* 2.129383E+02 *
Q
* 1.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 *
* 0.000000E+00 1.000000E+00 0.000000E+00 *
* 0.000000E+00 0.000000E+00 1.000000E+00 *

```

Матрица масс жесткого тела (MO) относительно ссылочной точки в основной системе координат.

Матрица преобразования из основной системы координат в систему главных осей инерции

Главные массы и соответственно центр тяжести

Матрица инерции I(S) в центре тяжести в системе главных осей масс.

Матрица инерции I(Q) в центре тяжести в системе главных осей инерции.

Матрица преобразования [Q] из S-осей и Q-осей.

Примечание: 1. Это стандартный вывод генератора весов узловых точек. Он получается с помощью задания в параметре GRDPNT целого числа, значение которого определяет номер ссылочного узла сетки. Если это число 0 или несуществующий узел, то в качестве ссылочной точки выбирается начало отсчета базовой системы координат.

Запись SUPORT

Запись SUPORT в секции Bulk Data

Для вычисления форм колебаний конструкции как твердого тела используются специальные подпрограммы.

Esthetics Абсолютные нулевые собственные значения вместо вычисления нулей (для всех методов кроме метода Ланцоша, где программа будет "судить": либо собственное значение должно быть 0.0, либо нет).

Cost Отдельная подпрограмма, используемая для расчета форм колебаний конструкции как жесткого тела, может значительно уменьшить время CPU

| SUPPORT | ID | C | ID | C | ID | C | ID | C | |
|---------|----|-----|----|---|----|---|----|---|--|
| SUPPORT | 16 | 125 | | | | | | | |

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

EIGRL Рекомендуемая запись для расчета собственных частот

Описывает данные, необходимые для определения собственных частот или анализа устойчивости методом Ланцоша.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

| EIGRL | SID | V1 | V2 | ND | MSGLVL | MAXSET | SHFSCCL | NORM | |
|-------|-----|-----|-----|----|--------|--------|---------|------|--|
| EIGRL | 1 | 0.1 | 3.2 | 10 | | | | | |

Поле Содержание

SID Идентификатор (уникальное целое положительное число)

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

V1, V2 Частотный анализ : интересующий диапазон частот
Анализ устойчивости : интересующий диапазон λ
($V1 < V2$, вещественные числа). Если нужны все формы ниже
некоторой частоты, задайте V2 и оставьте поле V1
пустым. Не рекомендуется задавать 0.0 для V1, более
эффективно использовать маленькое отрицательное
число или поле его пустым

ND Требуемое число корней (целое положительное число
или пробел)

MSGLVL Уровень диагностики (целое число от 0 до 3 или
пробел)

MAXSET Число векторов в блоке (целое число от 1 до 15 или
пробел)

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

EIGRL Рекомендуемая запись для расчета собственных частот

SHFSC Оценка первой из собственных частот
(действительное число или пробел)

NORM Метод нормирования собственных векторов, одно из
BCD значений либо "MASS", либо "MAX".

MASS Нормирование по обобщенной массе
масс (по умолчанию)

MAX Нормирование по наибольшей
компоненте

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

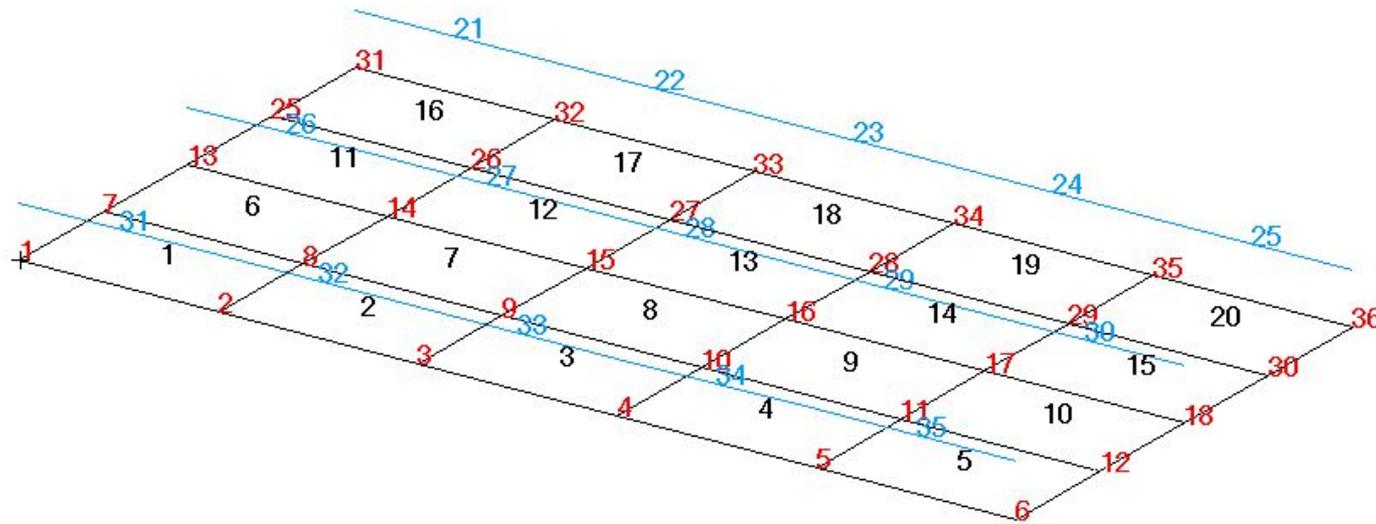
Основываясь на входных данных, программа будет:

- ❑ Рассчитывать все корни ниже $V2$ ($V1$ = пустое, $V2$ = наибольшее интересующее значение собственной частоты, ND - пробел)
- ❑ Рассчитывать максимум ND корней между $V1$ и $V2$ ($V1$, $V1$, ND - заданы)
- ❑ Рассчитывать ND корней выше $V1$ ($V1$ = самое низкое интересующее значение частоты, $V2$ = пустое, ND = требуемое число корней)
- ❑ Рассчитывать первые ND корней ($V1$ и $V2$ пустые, ND = требуемое число корней).
- ❑ Рассчитывать все корни между $V1$ и $V2$ ($V1$ = самое низкое интересующее значение частоты, $V2$ = наибольшее интересующее значение собственной частоты, ND = пустое)

Пример 8

Анализ собственных частот подкрепленной панели

Анализ собственных частот подкрепленной панели (продолжение)



Анализ собственных частот подкрепленной панели (продолжение)

- **Описание модели**

- Та же самая модель подкрепленной панели, которая была использована в Примере 5.
- Рассчитайте первые 6 собственных значений частот.
- Проверьте корректность используемых единиц измерения