

Раздел 7

Линейный анализ устойчивости

Теория устойчивости

- Запишем уравнение равновесия конструкции, к которой приложена система постоянных сил, в следующем виде:

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

- Рассмотрим эффект дифференциальной (геометрической) жесткости. Дифференциальная жесткость $[K_d]$ появляется в результате учета членов высокого порядка в зависимостях деформация-перемещение. Эти зависимости подразумевают, что перемещения в конструкции не зависят от интенсивности нагрузки.

Теория устойчивости (продолжение)

- Пусть λ произвольный скалярный множитель для другой "интенсивности" нагрузки.

$$([K] + \lambda [K_D])\{u^*\} = \{\lambda P\}$$

- При нагружении конструкции данной силой с различной интенсивностью, могут быть найдены несколько положений неустойчивого равновесия. Эти положения равновесия являются решениями задачи на собственные значения.

$$([K] + \lambda [K_D])\{\delta u^*\} = 0$$

Решение задачи на собственные значения

$$[K - \lambda K_d] \{ \varphi \} = 0 \quad (1)$$

- Решение нетривиально (отлично от нуля) только для определенных значений $\lambda = \lambda_i$ для $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- которые делают матрицу $[K - \lambda K_d]$ сингулярной.

Решение задачи на собственные значения (продолжение)

- Каждому собственному значению λ_i , соответствует единственный собственный вектор $\{ \varphi_i \}$.
- $\{ \varphi_i \}$ может быть масштабирован с помощью любого скалярного множителя и по прежнему оставаться решением уравнения (1).
- Компоненты вектора $\{ \varphi_i \}$ - вещественные числа..

Последовательности решений для задач устойчивости

SOL 105 Линейная устойчивость

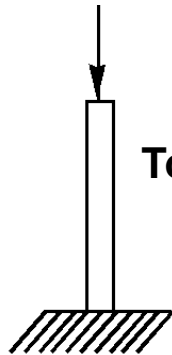
SOL 106 Нелинейная устойчивость

Ограничения для SOL 105

- Требования к конструкции до потери устойчивости:
 - Перемещения должны быть малы.
 - Напряжения должны быть в упругой области (и линейно зависеть от деформаций).

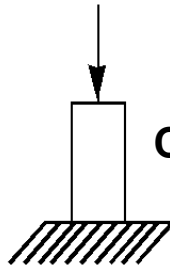
Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

Пример: Три класса колонн (под центральной нагрузкой, материал без дефектов)



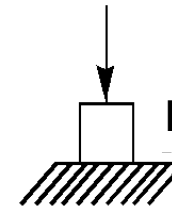
Тонкая

Теряет форму из-за потери устойчивости. Прогиб, при потере устойчивости мал и критическая нагрузка не достигает предела текучести материала. Это колонна Эйлера.



Средняя

Причина потери формы – комбинация текучести и потери устойчивости. Прогиб при потере устойчивости мал, но некоторые напряжения превышают предел упругости материала.



Короткая

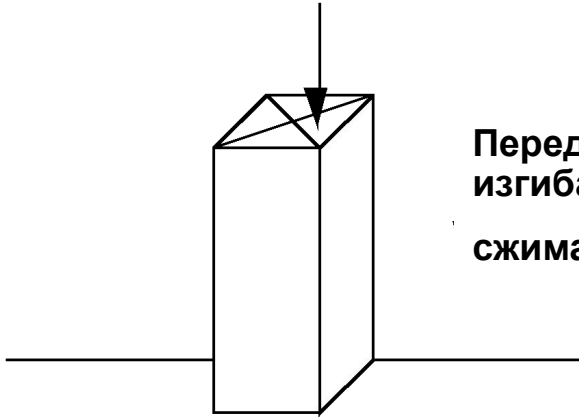
Причина потери формы – текучесть (также, как при тестовом сжатии образца)

Последовательности решений для задач устойчивости (продолжение)

Примечание: SOL 105 может применяться для конструкций с небольшими дефектами материала или с очень малым эксцентриситетом нагрузки (например, когда нагрузка направлена не строго в центр и приводит к небольшому изгибу). Здесь инженеру надо исходить из здравого смысла. Те же соображения применимы при анализе пластин.

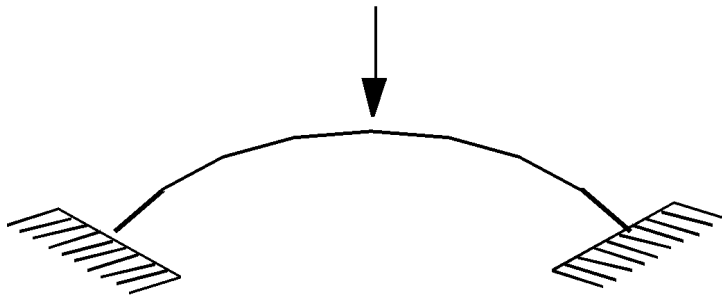
Примеры нелинейного анализа устойчивости

Колонна под нагрузкой с большим эксцентриситетом



Перед потерей устойчивости возникают большие изгибающие напряжения, такие же как и сжимающие осевые напряжения.

Процелкивание тонкой оболочки (подобно дну бака)



Перед потерей устойчивости возникают большие прогибы, и возможно не упругое поведение конструкции.

Правила для анализа устойчивости SOL 105

(Для справки необходимо смотреть раздел 13, MSC/NASTRAN Linear Statics Users Guide)

- Секция CASE CONTROL должна содержать не менее двух SUBCASE.
- Запросы на вывод, которые относятся только к решению статической задачи должны быть помещены в первом SUBCASE.
- METHOD должен появиться в отдельном SUBCASE для выбора записей EIGB или EIGRL из секции BULK DATA для решения задач устойчивости.
- Если имеется несколько статических решений, тогда используйте команду STATSUB для выбора варианта одного из статических решений для дальнейшего решения задачи устойчивости.

Правила для анализа устойчивости SOL 105 (продолжение)

- Если необходимо, могут использоваться различные условия в SPC узлах в SUBCASE статического решения и SUBCASE решения задачи устойчивости.
- Запросы на вывод могут быть помещены в любом выбранном SUBCASE.
- Запросы на вывод, действующие одновременно и в статическом расчете и в анализе устойчивости могут быть помещены выше уровня SUBCASE.

Записи для линейного анализа устойчивости

Секция EXECUTIVE CONTROL

SOL 105

Секция CASE CONTROL

SUBCASE 1 LOAD = M	Определяет условия статического нагружения (LOAD, TEMP, DEFORM)
SUBCASE 2	Выбирает метод нахождения собственных значений
METHOD = N STATSUB = i	Выбирает SUBCASE статического решения чтобы использовать его для решения задачи устойчивости (по умолчанию берется первый SUBCASE)

Записи для линейного анализа устойчивости (продолжение)

Секция CASE CONTROL должна содержать не менее двух SUBCASE.

Секция BULK DATA

Определение условий статического нагружения

EIGB Данные для нахождения собственного значения

или

EIGRL Данные для нахождения собственного значения по методу Ланцоша.

Запись EIGRL

EIGRL Рекомендуемая запись для расчета устойчивости

Определяет данные, необходимые для проведения решения задачи на собственные значения и анализа устойчивости методом Ланцоша.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGRL	SID	V1	V2	ND	MSGVLV	MAXSET	SHFSCCL	NORM	
EIGRL	1	0.1	3.2	10					

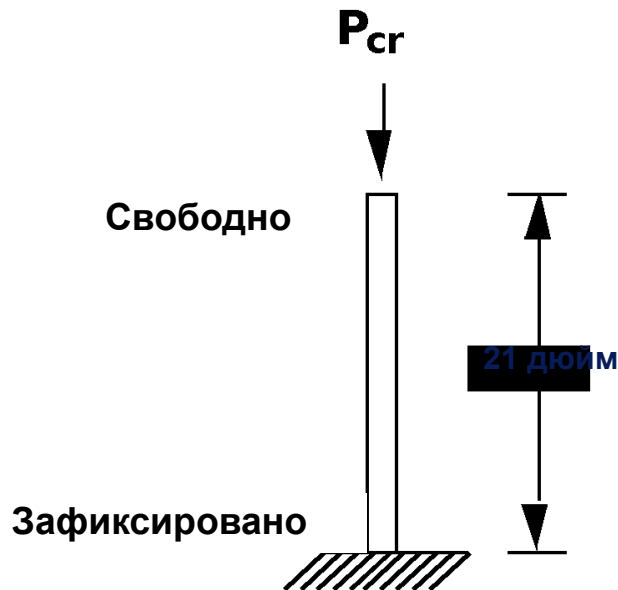
Запись EIGRL (продолжение)

<u>Поле</u>	<u>Содержание</u>
SID	Идентификатор набора (уникальное целое число > 0)
V1, V2	Анализ вибрации: диапазон интересующих частот Анализ устойчивости: диапазон интересующих λ
ND	Число необходимых корней (целое > 0 или оставлять чистым)
MSGLVL	Уровень диагностики (целое, от 0 до 3 или оставлять чистым)
MAXSET	Число векторов в блоке (целое, от 1 до 15 или оставлять чистым)

Пример - простая колонна Эйлера

Задача

Найти критическую нагрузку и соответствующую ей первую форму потери устойчивости цилиндрического стержня.



Круглое сечение

Диаметр = 0.25 дюйма

E = 30.E+6 фунтов/дюйм²

I = 1.917E-4 дюйм⁴

Площадь = 4.909E-2 дюйм²

Пример - простая колонна Эйлера (продолжение)

Теоретическое решение

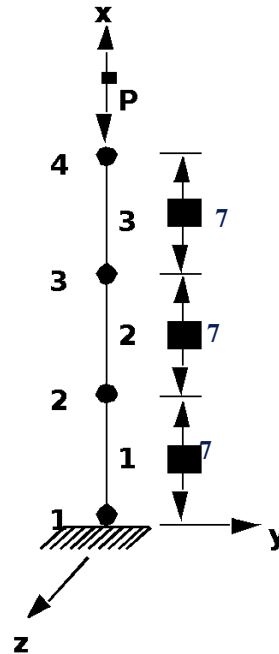
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} = 32,18 \text{ фунта}$$

где L_{eff} = эффективная длина колонны

= $2L$ для свободно опертой колонны

Пример - простая колонна Эйлера (продолжение)

Модель MSC.Nastran



Решение MSC.Nastran

Значение силы в записи FORCE

$$P_{cr} = \square 32.18 \times 1.0 = \square 32.18 \text{ фунта}$$

Собственное значение

Пример - простая колонна Эйлера – входной файл

```
sol 105
cend
$
title = buckling of fixed-free beam
disp = all
$
echo = punch
spc = 10
subcase 1
  label = static subcase
  load = 5
subcase 2
  label = buckling subcase
  method = 100
$
begin bulk
$
CBEAM      1      1      1      2      0.      0.      1.
CBEAM      2      1      2      3      0.      0.      1.
CBEAM      3      1      3      4      0.      0.      1.
EIGRL     100
FORCE      5      4      1.     -1.
GRID       1      0.      0.      0.      345
GRID       2      7.      0.      0.      345
GRID       3     14.      0.      0.      345
GRID       4     21.      0.      0.      345
MAT1       2     30.E6      .33
PBEAM      1      2     4.909E-21.917E-41.917E-4      3.835E-4
SPC1       10     123456      1
enddata
```

Пример - простая колонна Эйлера – выходной файл

Первое собственное значение: $P_{cr} = \lambda_1 \times 10$ фунтов = 32.18 фунта

Первый собственный вектор (дает форму потери устойчивости)

```

BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG
                                                    SUBCASE 2

REAL EIGENVALUES
MODE  EXTRACTION  EIGENVALUE  REAL  EIGENVALUES  GENERALIZED  GENERALIZED
NO.   ORDER        EIGENVALUE  RADIANS  CYCLES      MASS        STIFFNESS
   1     1          3.217839E+01  5.872600E+00  9.028223E-01  5.873539E-02  1.890010E+00
BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG
                                                    SUBCASE 2

BUCKLING OF FIXED-FREE BEAM                                OCTOBER 17, 2000  MSC.NASTRAN 10/12/00  PAG
BUCKLING SUBCASE                                           SUBCASE 2
EIGENVALUE =  3.217839E+01

REAL EIGENVECTOR NO. 1
POINT ID.  TYPE  T1  T2  T3  R1  R2  R3
   1      G   0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0
   2      G  4.118373E-18  1.339746E-01  0.0  0.0  0.0  3.739763E-02
   3      G  7.290629E-18  5.000000E-01  0.0  0.0  0.0  6.477460E-02
   4      G  8.820291E-18  1.000000E+00  0.0  0.0  0.0  7.479527E-02
    
```

Литература по анализу устойчивости

- 1. MSC Seminar Notes, “MSC/NASTRAN Material and Geometric Nonlinear Analysis”:**
- 2. MSC.Nastran Linear Static Analysis Users Guide, Section 13.**
- 3. MSC.Nastran Verification Problem Manual (Version 64, January 1986 Edition):**
 - Problem 3.0501A, “Lateral Buckling of a Cantilever Beam”**
 - Problem 3.0502A, “Simple Frame Analysis with Buckling”**
 - Problem 3.7701S, “Euler Buckling of a Simply Supported Beam”**

Литература по анализу устойчивости (продолжение)

4. MSC.Nastran Demonstration Problem Manual (Version 64, March 1985 Edition):

Under Elastic Stability Analysis, see Demonstration Problem D0504A,
“Flexural Buckling of a Beam”

5. MSC.Nastran Application Notes

October 1978 “Buckling and Real Eigenvalue Analysis of Laminated
Plates”

September 1979 “Static Stability of Structures with Nonlinear Differential
Stiffness”

February 1982 “Elastic-Plastic Buckling of a Thin Spherical Shell”

November 1985 “Nonlinear Buckling Analysis”

Пример 9

Анализ устойчивости пластины

Пример 9 (продолжение)

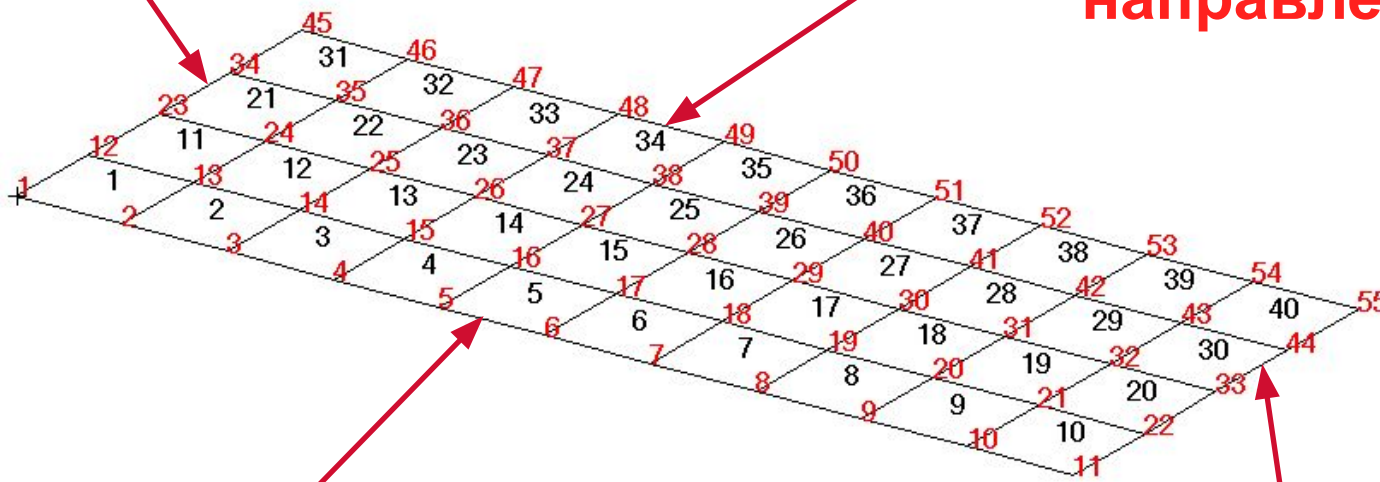
- **Описание модели**

- Та же самая модель панели что и в Примере 5, без подкреплений.
- В этой модели применены следующие граничные условия:
 - Опираение на левом конце
 - “Ролики” на правом конце
 - Нулевые вертикальные перемещения на верхней и нижней гранях
- Приложим 100 фунт/дюйм² сжимающие нагрузки к правому краю пластины
 - Общая нагрузка на правой стороне = $(100) (8) (.01) = 8$
 - Приложите 1 фунт в каждый из узлов 11 и 55 сетки
 - Приложите 2 фунта в каждый из узлов 22, 33 и 44 сетки

Пример 9 (продолжение) – Граничные условия

Простое опирание

Защемление в
вертикальном
направлении



Защемление в
вертикальном
направлении

Опора на роликах

Пример 9 (продолжение) – Приложенные нагрузки

