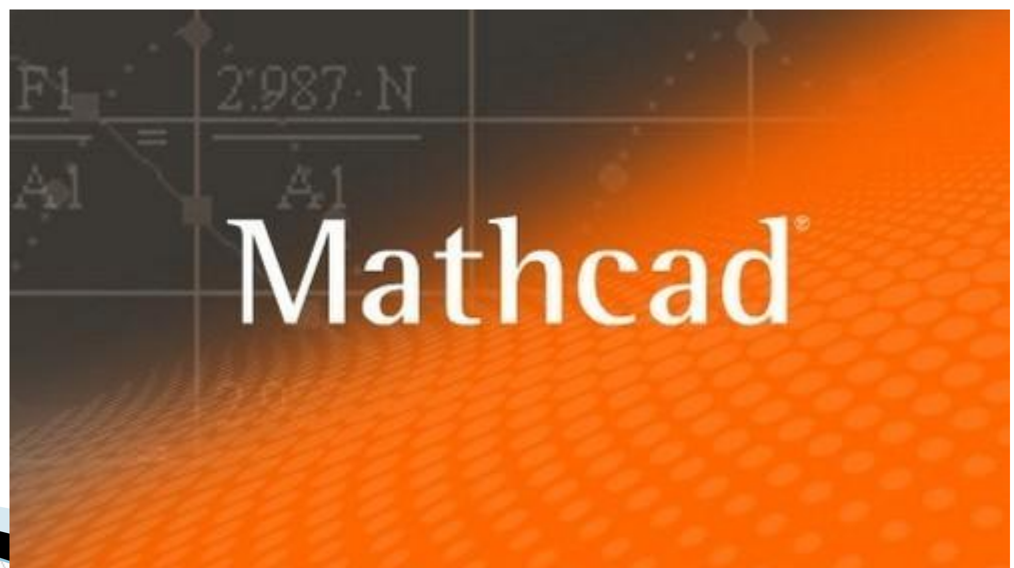
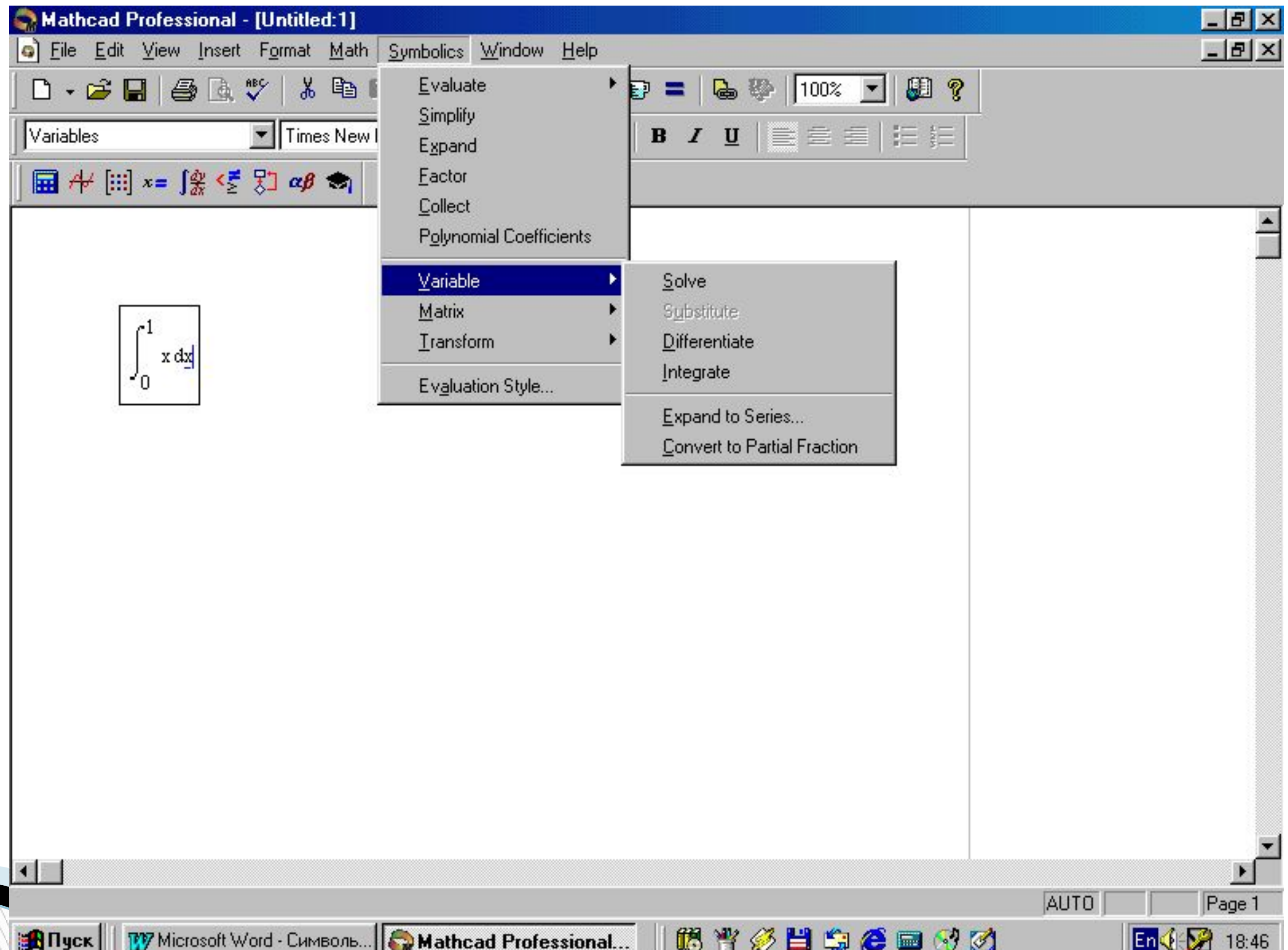
Символьное дифференцирование и интегрирование в пакете Maple V, Mathematica, MathCad

Автор презентации: Афонькина М. Л.

- **Mathcad** — система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается легкостью использования и применения для коллективной работы.
- Mathcad был задуман и первоначально написан Алленом Раздовом из Массачусетского технологического института (MIT), соучредителем компании Mathsoft, которая с 2006 года является частью корпорации PTC (Parametric Technology Corporation).

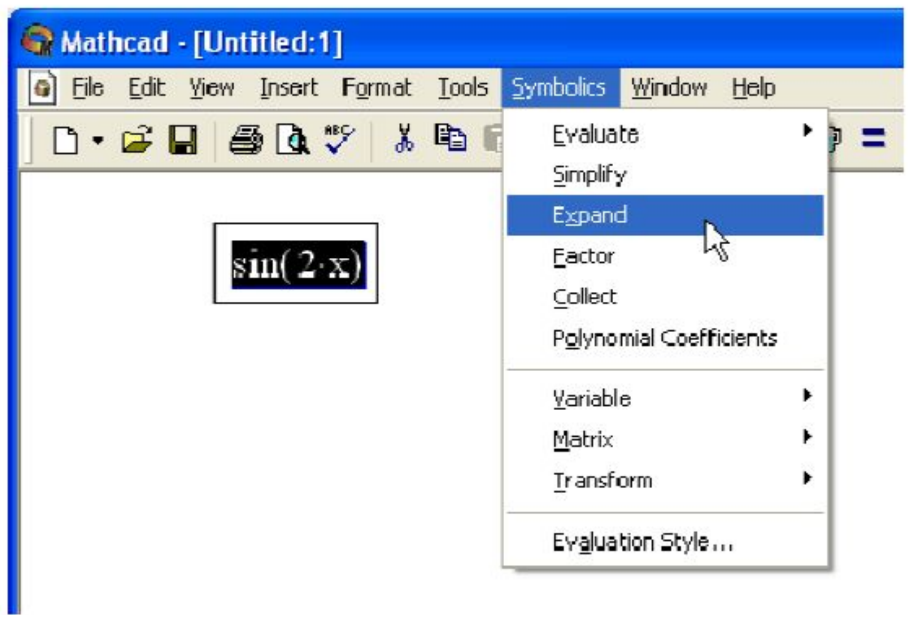


- Символьными называют такие вычисления, результаты которых представляются в аналитическом виде, то есть в виде формул. В частном случае результат может быть и числом.



Способы символьных вычислений

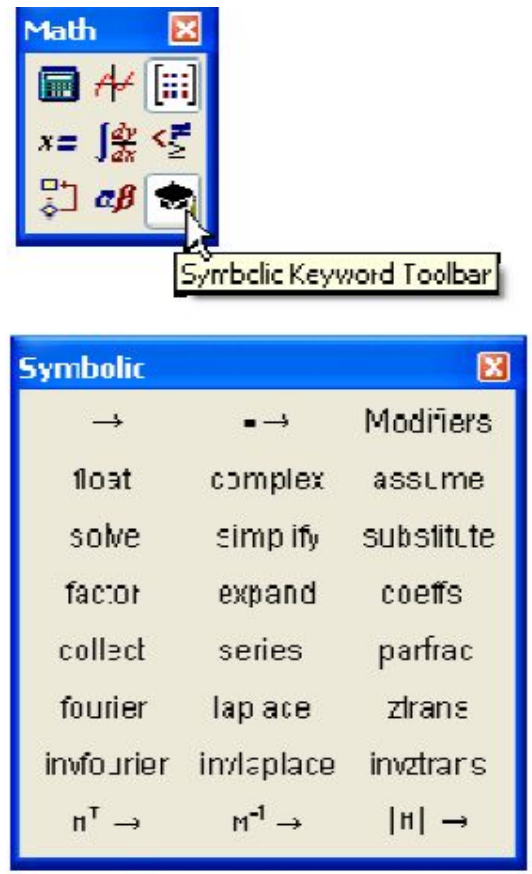
- Символьные вычисления в MathCAD можно осуществлять тремя способами.
- *Первый способ – с помощью меню Symbolics (Символика)*



- *Второй способ – с помощью оператора символьного равенства , ключевых слов* символьного процессора и обычных формул.

Для второго способа применяются все средства MathCAD, пригодные для численных вычислений (например, панели Calculator, Evaluation и т. д.), и специальная математическая панель инструментов Symbolic (Символы), которую можно вызвать на экран нажатием кнопки Symbolic Keyword Toolbar (Символические операторы) на панели Math (Математика).

- На панели Symbolic (Символы) находятся кнопки, соответствующие специфическим командам символьных преобразований

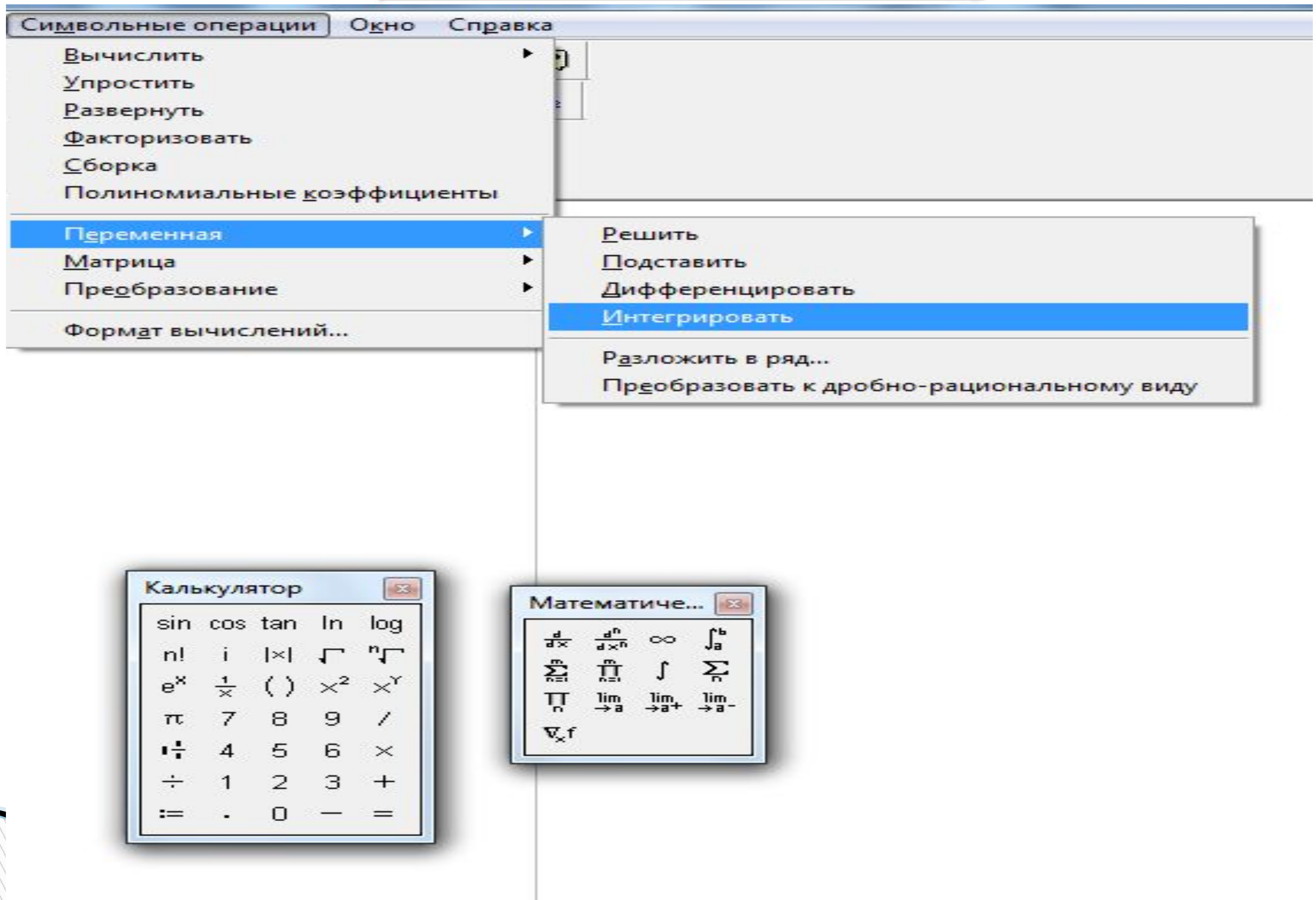


- *Третий способ – с помощью сочетания клавишей < Shift > + < F9 >.*
- *Если выражение не поддается аналитическим преобразованиям (либо в силу того, что задача вовсе не имеет аналитического решения, либо она оказывается слишком сложной для символьного процессора MathCAD), то в качестве результата выводится само выражение;*

Символьное интегрирование (Integrate)

- Для вычисления неопределенного интеграла от некоторого выражения по определенной переменной *первым способом через меню Symbolics, нужно:*
- - напечатать подынтегральное выражение *в явном виде на экране,*
- - поставить курсор на переменную интегрирования,
- - выполнить команду Symbolics/Variable/Integrate (Символика/Переменная/Интегрировать)

$$\sqrt{\sin(x)}\cdot\cos(x)+\ln(x)$$



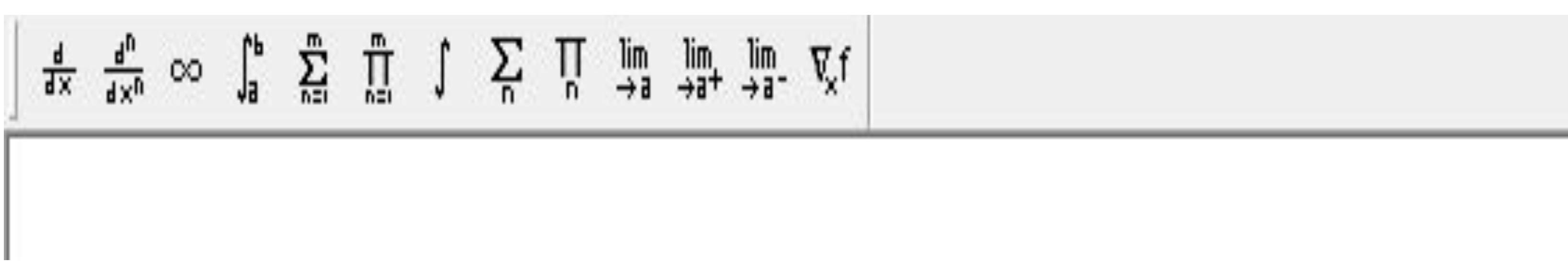
- Для нахождения неопределенного интеграла *вторым способом через знак символьного*

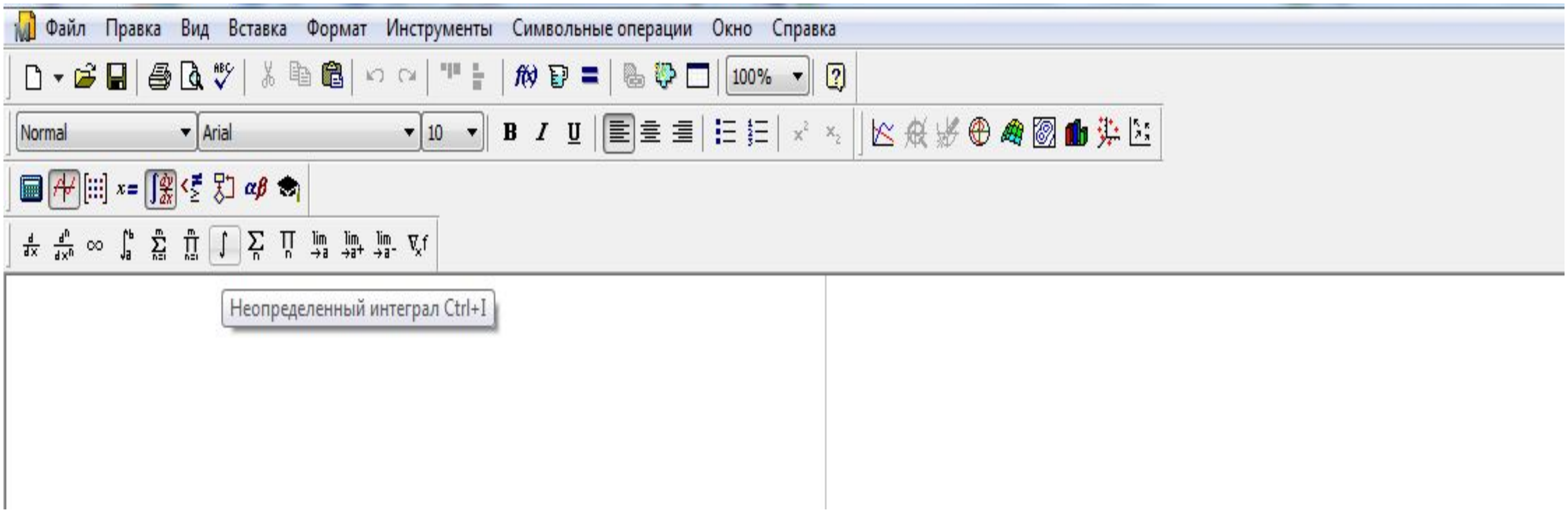
равенства нужно:

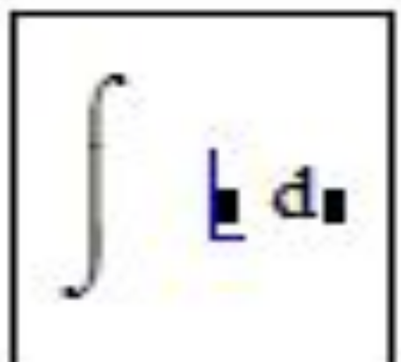
- \- ввести оператор неопределенного интеграла,
- \- в появившиеся местозаполнители ввести подынтегральное выражение (*в явном или*

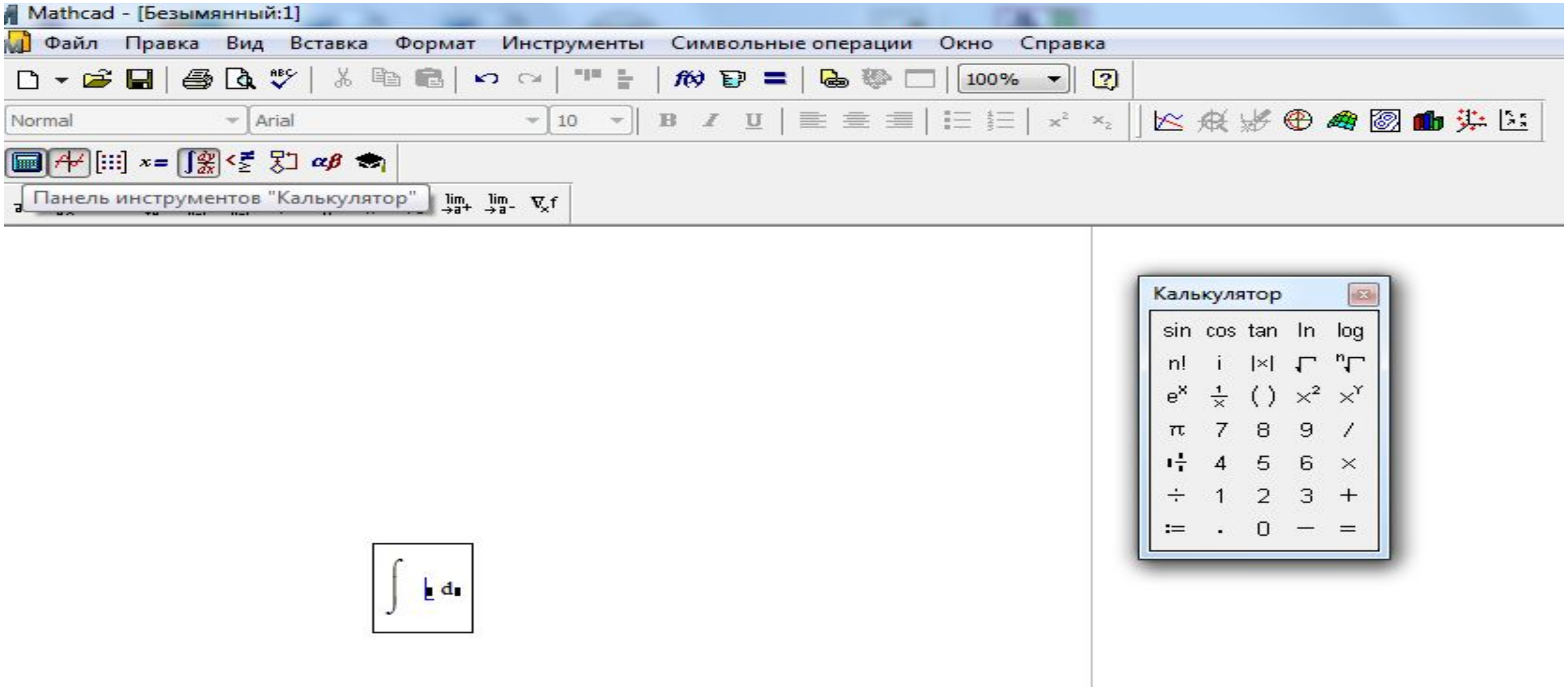
неявном виде) и переменную интегрирования,

- \- нажать знак символьного равенства и клавишу < Enter >

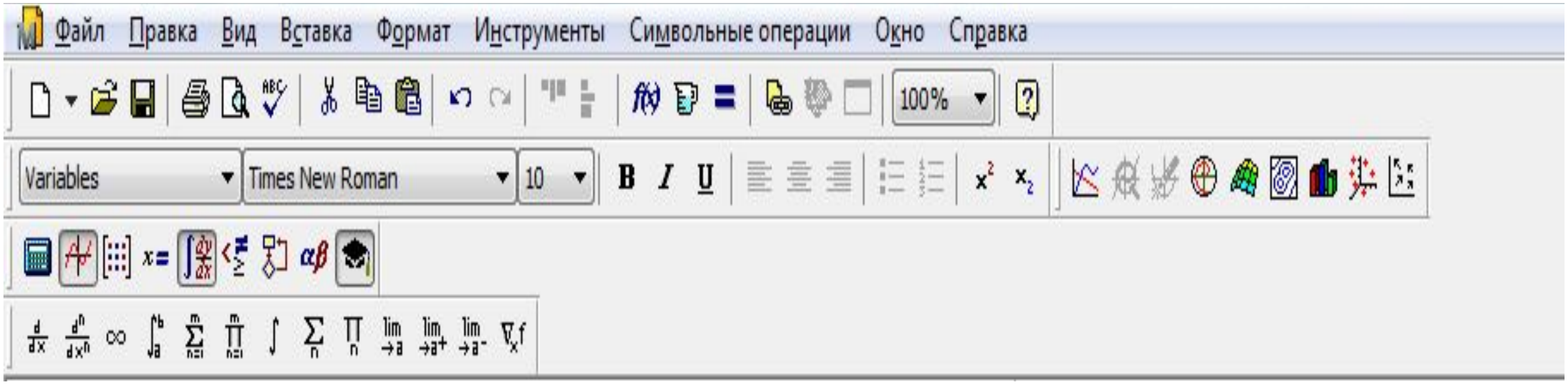



Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка
100%
Normal
Arial
10
Неопределенный интеграл Ctrl+I





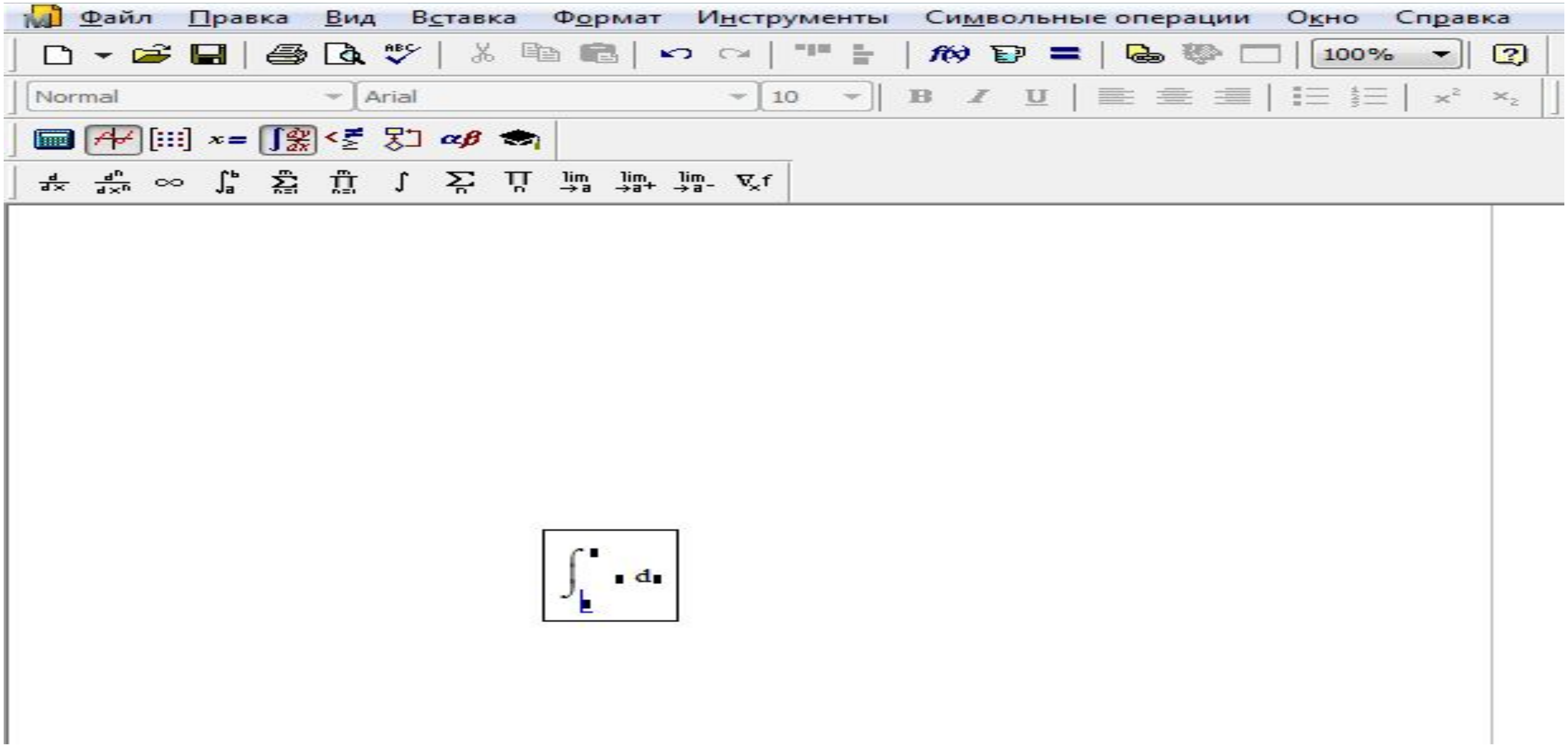
$$\int x + \sqrt{x} - 3\cdot x^{5} + 2\cdot x^{3} - \frac{1}{\sin(x)^{2}}\, dx$$

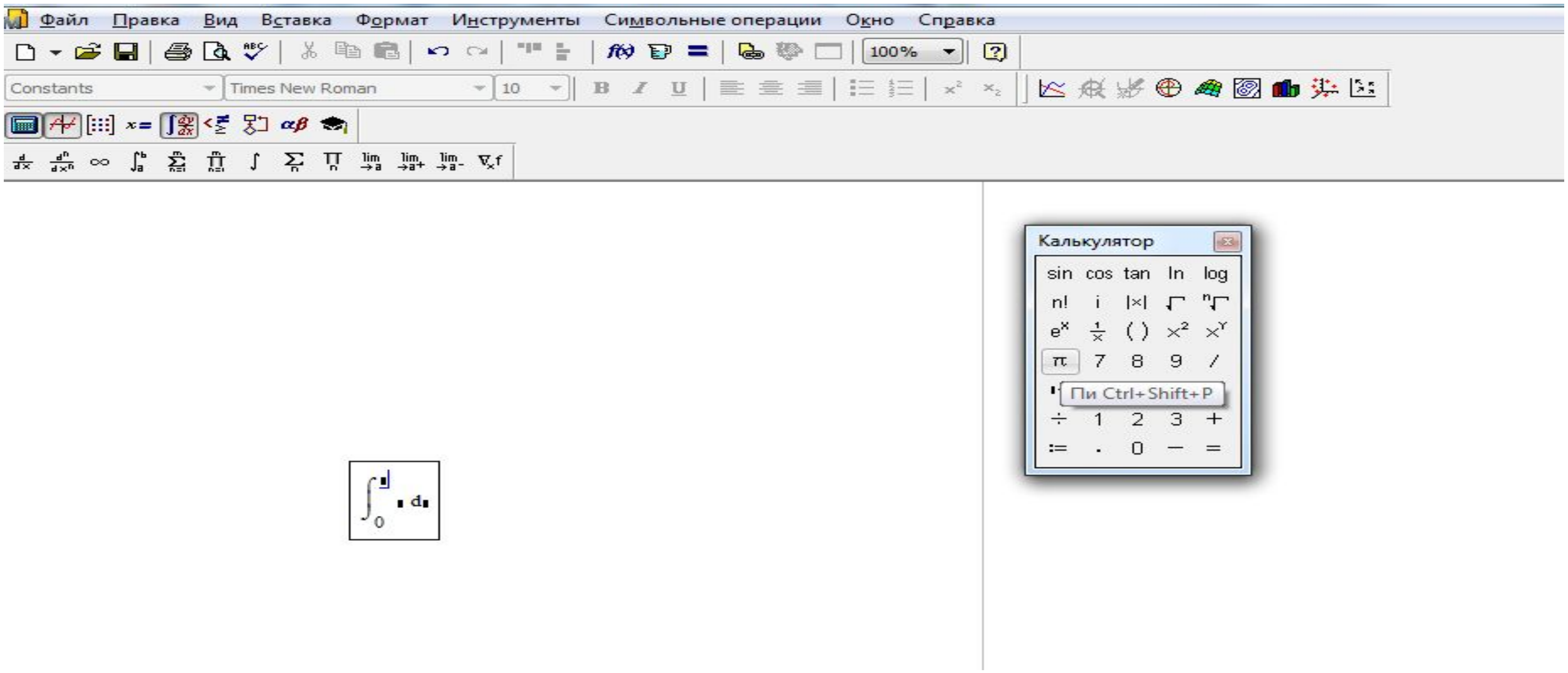

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка
100%
Variables
Times New Roman
10


Modifiers
Аналитические преобразования Ctrl+.
solve
simplify
substitute
factor
expand
coeffs
collect
series
parfrac
fourier
laplace
ztrans
invfourier
invlaplace
invztrans
explicit
combine
confrac
rewrite

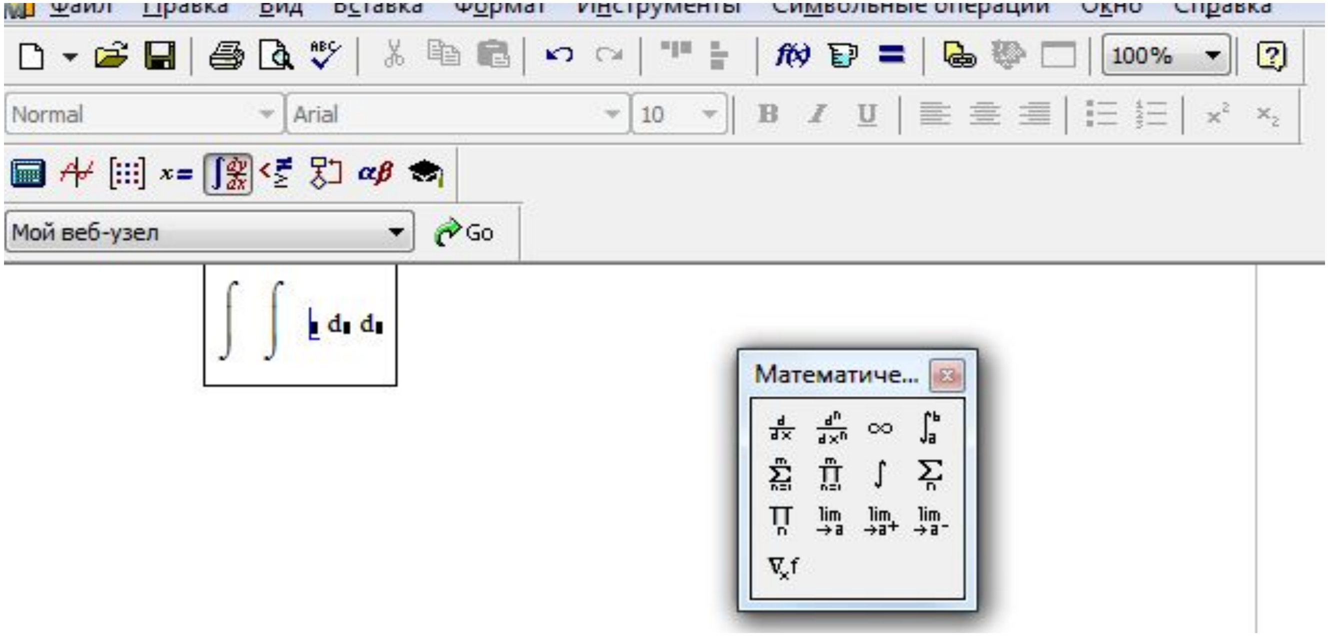
$$\int x + \sqrt{x} - 3\cdot x^5 + 2\cdot x^3 - \frac{1}{\sin(x)^2}\,dx \rightarrow$$

$$\int x + \sqrt{x} - 3\cdot x^5 + 2\cdot x^3 - \frac{1}{\sin(x)^2}\,dx \rightarrow -\frac{12\cdot\sin(2\cdot x) + 6\cdot x^2 + 6\cdot x^4 - 6\cdot x^6 + 8\cdot x^{\frac{3}{2}} - 6\cdot x^2\cdot\cos(2\cdot x) - 6\cdot x^4\cdot\cos(2\cdot x) + 6\cdot x^6\cdot\cos(2\cdot x) - 8\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\cos(2\cdot x) - 12i\cdot\cos(2\cdot x) + 12i}{12\cdot\cos(2\cdot x) - 12}$$

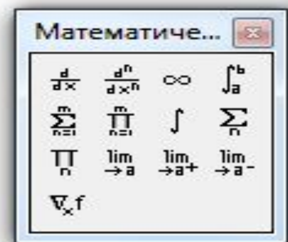

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка
100%
Normal
Arial
10

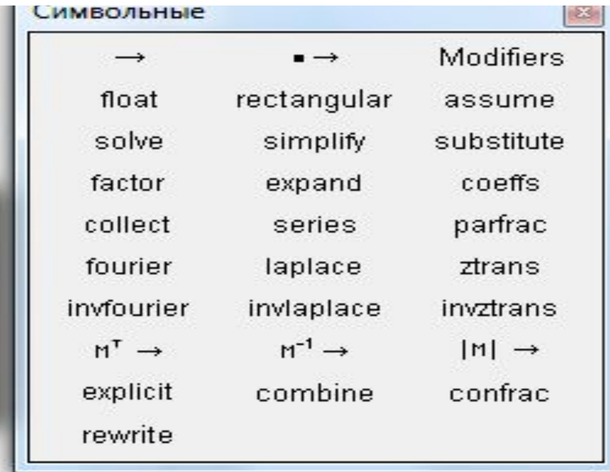


$$\int_0^{\pi} \cos(x)\, dx \rightarrow 0$$



$$\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} e^{x} - x \, dx \, dy \rightarrow \frac{3}{2} - e^{-1}$$


Математиче...


Символьные
Modifiers
float
rectangular
assume
solve
simplify
substitute
factor
expand
coeffs
collect
series
parfrac
fourier
laplace
ztrans
invfourier
invlaplace
invztrans
explicit
combine
confrac
rewrite


Калькулятор
sin
cos
tan
ln
log
n!
i
π
7
8
9
4
5
6
1
2
3
0

- Для нахождения неопределенного интеграла *третьим способом помощью сочетания*

клавиш < Shift > + < F9 > нужно:

- - ввести оператор неопределенного интеграла,
- - в появившиеся местозаполнители ввести переменную интегрирования и подынтегральную

функцию *в явном виде,*

- - охватить все выражение выделяющей рамкой
- - и нажать клавиши <Shift>+<F9>. Результат интегрирования появится на экране

$$\int \sin(x)^2 \, dx$$

$$\frac{-1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot x$$

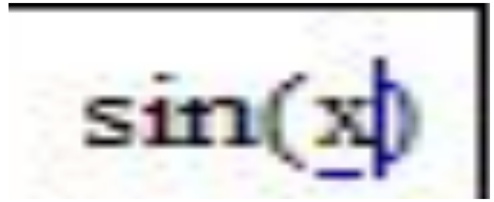
Символьное дифференцирование (Differentiate)

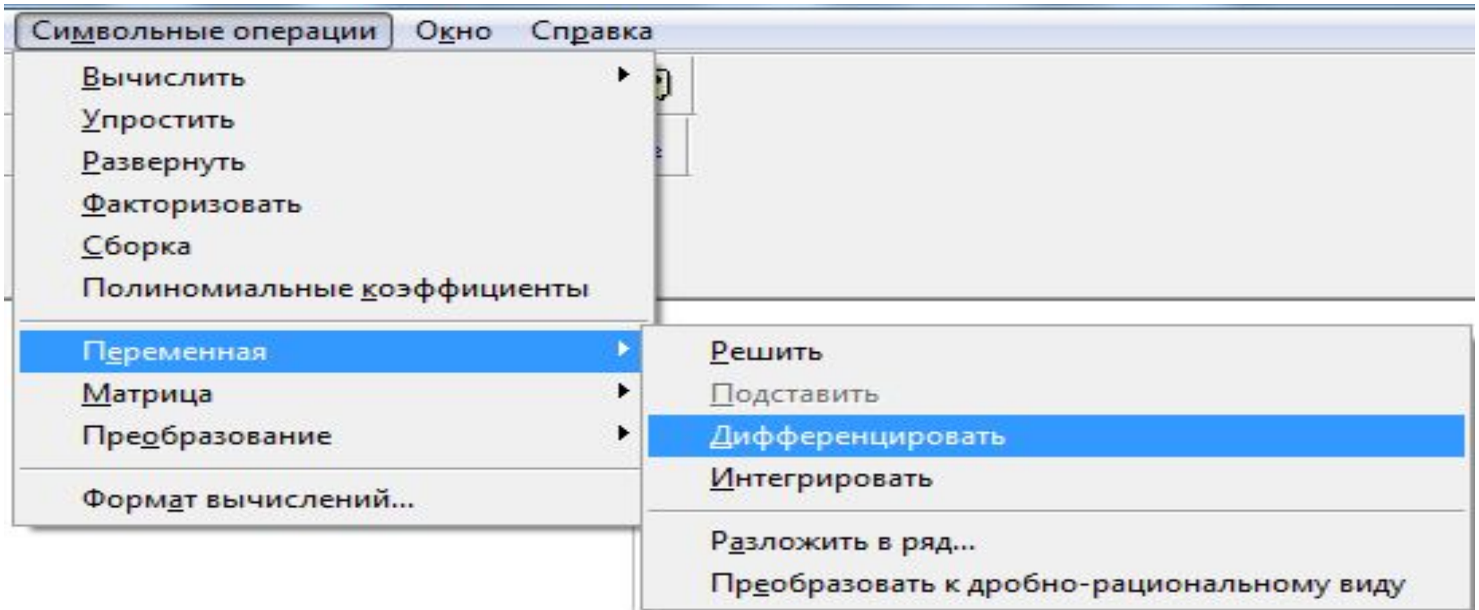
- Чтобы аналитически продифференцировать выражение по некоторой переменной

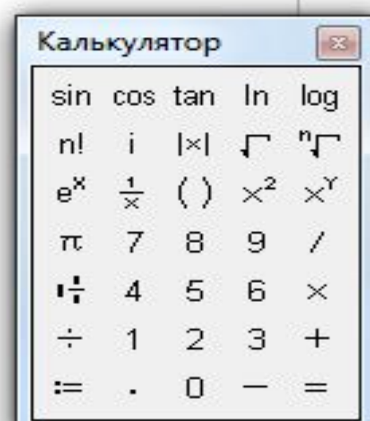
первым способом при помощи меню Symbolics, нужно:

- \- напечатать дифференцируемое выражение *в явном виде на экране,*
- \- поставить курсор на переменную интегрирования,
- \- выполнить команду Symbolics/Variable/Differentiate

(Символика/Переменная/Дифференцировать). В результате в следующей строке появится значение производной.


sin(x)


Символьные операции
Окно
Справка
Вычислить
Упростить
Развернуть
Факторизовать
Сборка
Полиномиальные коэффициенты
Переменная
Матрица
Преобразование
Формат вычислений...
Решить
Подставить
Дифференцировать
Интегрировать
Разложить в ряд...
Преобразовать к дробно-рациональному виду


Калькулятор
sin cos tan ln log
n! i |x|
π 7 8 9 /
4 5 6 ×
÷ 1 2 3 +
:= . 0 − =

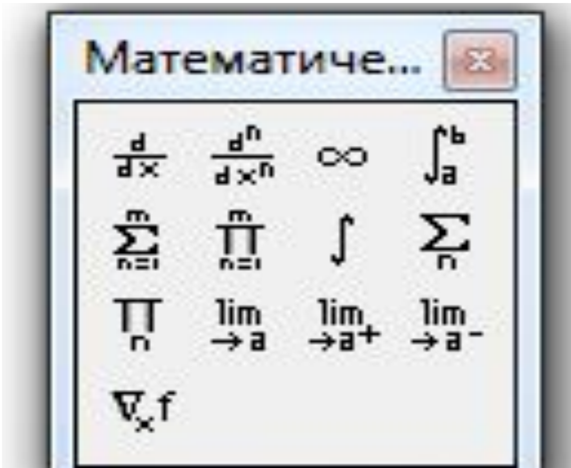
$\sin(x)$

$+$

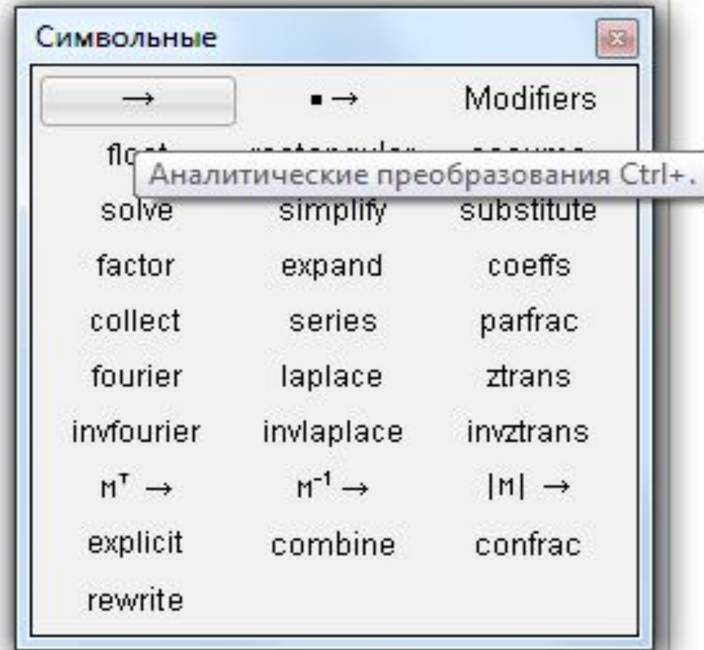
$\cos(x)$

- Для того чтобы найти *вторую производную, нужно повторно применить эту* последовательность действий, но уже к полученному результату дифференцирования. Так же

находятся и производные высших порядков.



$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\pi\cdot x^4+\frac{v}{x}\right)\rightarrow$$

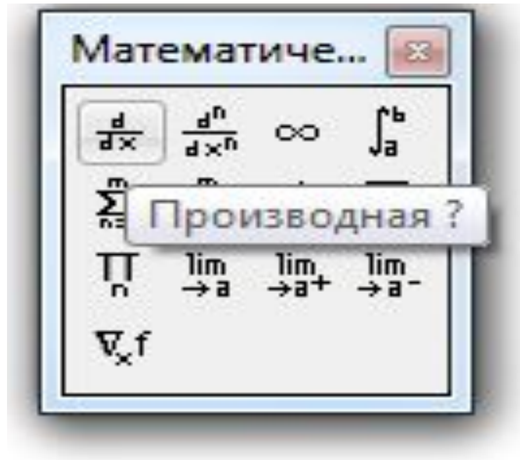


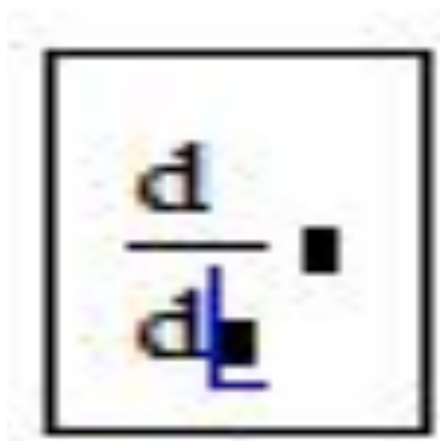
$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\pi x^4+\frac{v}{x}\right)\rightarrow 24\cdot\pi\cdot x-\frac{6\cdot v}{x^4}$$

- *Для нахождения производной вторым способом через знак символьного равенства*

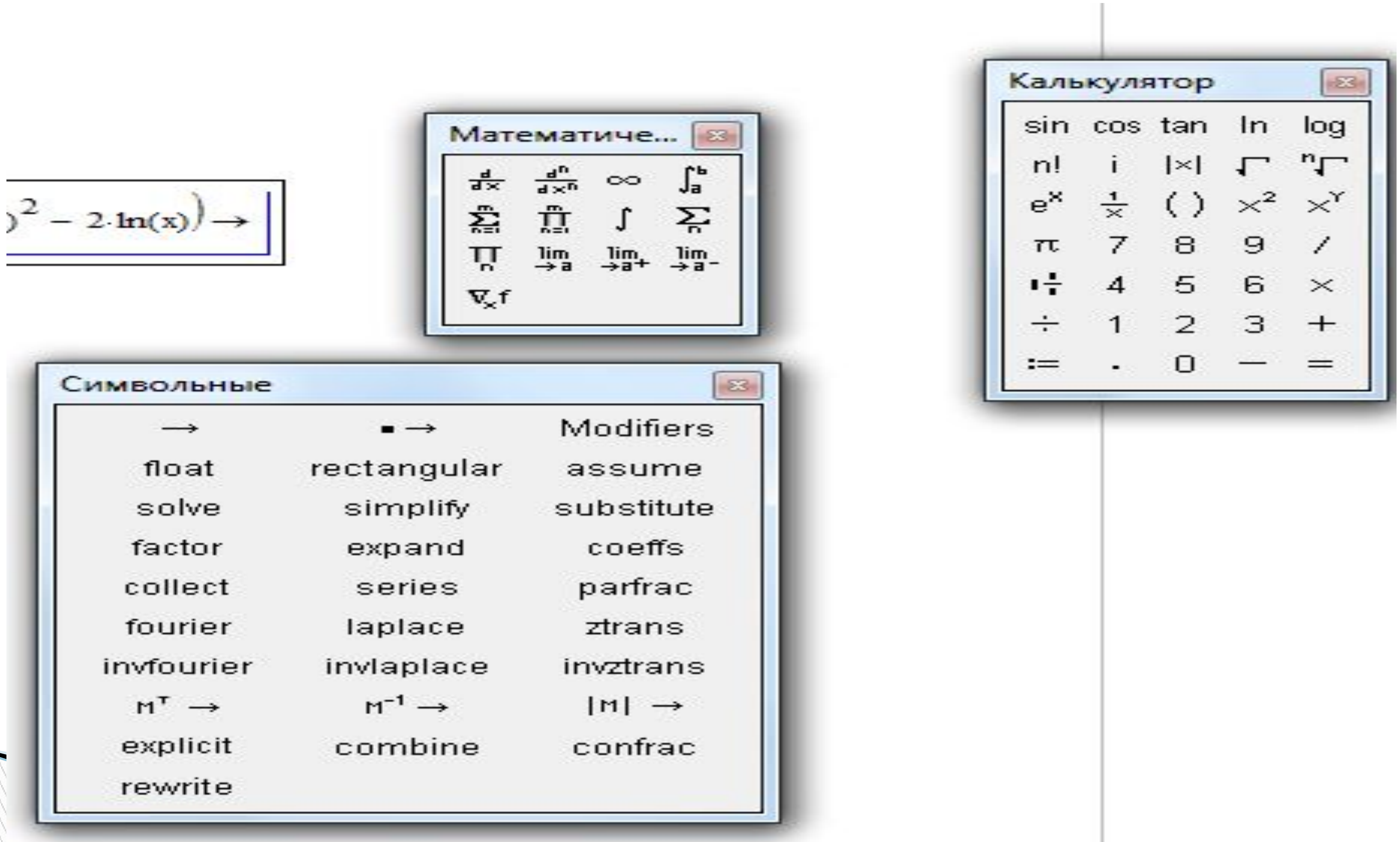
нужно:

- *- ввести оператор первой производной, или оператор производной высшего порядка*
- *- в появившиеся местозаполнители ввести дифференцируемое выражение (в явном или неявном виде), порядок производной (для производных высшего порядка) и переменную интегрирования,*
- *- нажать знак символьного равенства и клавишу < Enter >*


Математиче...
Производная ?



$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x)^2 - 2\cdot\ln(x)\right)\rightarrow$$



$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x)^2 - 2\ln(x)\right) \rightarrow 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) - \frac{2}{x}$$

- Для того чтобы вычислять производные *третьим способом, используя сочетание*

клавиш < Shift > + < F9 >, нужно:

- ввести оператор дифференцирования, или оператор *n-той производной,* в появившиеся местозаполнители ввести переменную дифференцирования и дифференцируемую функцию *в явном виде,* охватить все выражение выделяющей рамкой и нажать клавиши <Shift>+<F9>.
- Результат дифференцирования появится на экране

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin\left[(k\cdot x)^2 + b\cdot x\right]}$$

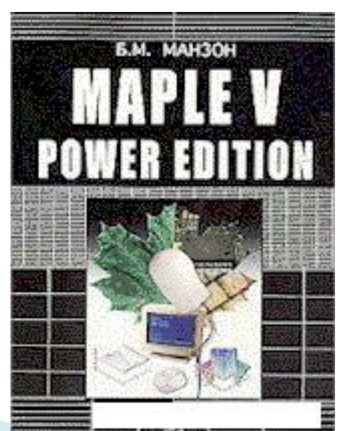
$$\cos\left(k^2\cdot x^2 + b\cdot x\right)\cdot\left(2\cdot k^2\cdot x + b\right)$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\sin\left[(k\cdot x)^2 + b\cdot x\right]}$$

$$-\sin\left(k^2\cdot x^2 + b\cdot x\right)\cdot\left(2\cdot k^2\cdot x + b\right)^2 + 2\cdot\cos\left(k^2\cdot x^2 + b\cdot x\right)\cdot k^2$$

Рис. 24. Дифференцирование нажатием клавиш <Shift>+<F9>.

Maple — программный пакет, система компьютерной алгебры. Является продуктом компании Waterloo Maple Inc. (англ.)русск., которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами. Имеет собственный язык программирования, напоминающий Паскаль.



Символьные вычисления

Maple выдает ответ в самой точной форме — символьной, более точной, чем любой из численных методов. Однако, если вы хотите получить ответ в виде числа с плавающей точкой, то он будет найден в конце символьных вычислений. Таким образом, погрешность метода – это лишь погрешность округления!

Решения получаются компактными, можно сказать – изящными. Посмотрите, как по команде solve (решить) выдается решение для системы из трех алгебраических уравнений:

>solve({a*x+b*y=1, 2*c*x+y=3, z – y=5}, {x,y,z});

$$\left\{y = \frac{3\,a - 2\,c}{a\,d - 2\,c\,b},\, x = -\,\frac{3\,b - d}{a\,d - 2\,c\,b}\right\}$$

Дифференцирование

В среде Maple V можно легко найти как стандартные дифференциалы, так и дифференциалы от любых функций, а также частные производные.

Для нахождения производных от выражений существует команда diff:

>f:=sin(x)^2: diff(f,x);

$$2\sin(x)\cos(x)$$

Найдем производные от функции двух переменных:

> Ffunction:=cos(x)*y+sin(y)*x;

$$Ffunction := \cos(x)\,y + \sin(y)\,x$$

Производная по x:

> diff(Ffunction,x);

$$-\sin(x)\,y + \sin(y)$$

Производная по y:

> diff(Ffunction,y);

$$\cos(x) + \cos(y)\,x$$

Для нахождения производных более высокого порядка достаточно указать после аргумента дифференцирования знак $ и порядок производной:

> diff(Ffunction,x$2);

$$-\cos(x)\,y$$

Существует особый оператор D, применимый для дифференцирования операторов и задания начальных условий при решении дифференциальных уравнений.

К примеру, найдем производную от операторов cos и tan:

> D(cos); D(tan);

$$-\sin$$

$$1+\tan^2$$

Оператор D можно использовать для дифференцирования пользовательских функций. Например, зададим функцию f=x^2 и вычислим ее производную:

> f:=x –> x^2: D(f);

$$x \rightarrow 2\,x$$

Зададим функцию двух переменных:

> f := (x,y) –> exp(x*y);

$$f := (x, y) \rightarrow e^{(x\,y)}$$

Найдем производную от функции f по переменной x. Для этого в квадратных скобках вслед за оператором D необходимо указать, по какому элементу множества неизвестных следует находить производную:

> D[1](f);

$$(x, y) \to y\, e^{(x\, y)}$$

Производная по y:

> D[2](f);

$$(x, y) \to x\, e^{(x\, y)}$$

Следующая запись означает, что сначала берется производная по x, а затем по y:

> D[1,2](f);

$$(x, y) \rightarrow e^{(x\,y)} + x\,y\,e^{(x\,y)}$$

Интегрирование

С помощью Maple можно находить как определенные, так и неопределенные интегралы, используя команду int. К примеру, найдем неопределенный интеграл от функции **x**:

```
> int(x,x);
```

$$\frac{1}{2}x^2$$

Значение того же интеграла на промежутке от 0 до 5 определяется следующим образом:

```
> int(x,x=0..5.);
```

$$12.50000000$$

Богатый аппарат встроенных математических функций позволяет айти значения интегралов, не выражающиеся в аналитической форме:

```
> var3:=int(cos(x^2),x);
```

$$var3 := \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\ \mathrm{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\pi}}\right)$$

десь функция FresnelC определена в среде Maple.

Найдем значение интеграла от cos(x^2) на отрезке от 0 до 1:

```
> var3:=evalf(int(cos(x^2),x=0..1));
```

$$var3 := .9045242375$$

Matematica

- **Mathematica** — система компьютерной алгебры, используемая во многих научных, инженерных, математических и компьютерных областях. Изначально система была придумана Стивеном Вольфрамом, в настоящее время разрабатывается компанией Wolfram Research.

- Символьные операции — это как раз то, что кардинально отличает систему Mathematica (и подобные ей символьные математические системы) от систем для выполнения численных расчетов. При символьных операциях, называемых также аналитическими, задания на вычисление составляются в виде символьных (формульных) выражений, и результаты вычислений также получаются в символьном виде. Численные результаты при этом являются частными случаями символьных.

- Одна из важнейших операций — вычисление первообразных и определенных интегралов в символьном виде. Первообразная — это функция F(x), удовлетворяющая уравнению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

$$\int_a^b f(X)dX = F(b)-F(a)$$

- где C — постоянная интегрирования. А вычисление определенного интеграла с пределами — верхним b и нижним a — производится по формуле

- Заметим, что определенный интеграл может быть представлен как аналитическим, так « численным значением. Для вычисления численных значений определенных интегралов разработан ряд приближенных методов — от простых (прямоугольников и трапеций) до сложных, автоматически адаптирующихся к характеру изменения подынтегральной функции f(x).

Для интегрирования в системе Mathematica используются следующие функции:
Integrate [f, x] — возвращает первообразную (неопределенный интеграл) подынтегральной функции f по переменной x;
Integrate [f, {x, xmin, xmax}] — возвращает значение определенного интеграла с пределами от x_{min} до $\mathbf{x_{max}}$ **;Integrate [f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},...]** —возвращает значение кратного интеграла с пределами от $\mathbf{x_{min}}$ **до** $\mathbf{x_{max}}$ **по переменной x, от** $\mathbf{y_{min}}$ **до** $\mathbf{y_{max}}$ по переменной y и т. д. (кратность реально не ограничена).

Обычно функция Integrate применяется в простейшей форме, но она имеет три характерные опции:

Options[Integrate]

{Assumptions -> {}, GenerateConditions->Automatic, PrincipalValue > False)

- Для обозначения бесконечных пределов используется константа **Infinity**. Эта константа означает положительную бесконечность, для задания отрицательной бесконечности она используется со знаком «минус».
- Особый интерес, естественно, вызывает применение функции **Integrate** для вычисления заданных пользователем неопределенных интегралов в символьном виде.

Здесь входная ячейка в первом примере представлена в формате ввода (Input-Form), а в остальных примерах — в стандартном формате (StandardForm). При записи интегралов последний предпочтителен ввиду большей наглядности, поскольку при этом знаки интеграла имеют естественный математический вид

Untitled-4 *

In[119]:= `Integrate[a*x^b, x]`

Out[119]= $\frac{a\,x^{1+b}}{1+b}$

In[121]:= $\int a\,x^{b}\,dx$

Out[121]= $\frac{a\,x^{1+b}}{1+b}$

In[122]:= $\int x\sqrt{x}\,dx$

Out[122]= $\frac{2\,x^{5/2}}{5}$

In[123]:= $\int \{Log[x],\ Exp[x],\ Sin[x]\}\,dx$

Out[123]= $\{-x + x\,Log[x],\ e^{x},\ -Cos[x]\}$

In[124]:= `D[%, x]`

Out[124]= $\{Log[x],\ e^{x},\ Sin[x]\}$

In[126]:= $\int (a\,x^{2} + b\,x + c)\,dx$

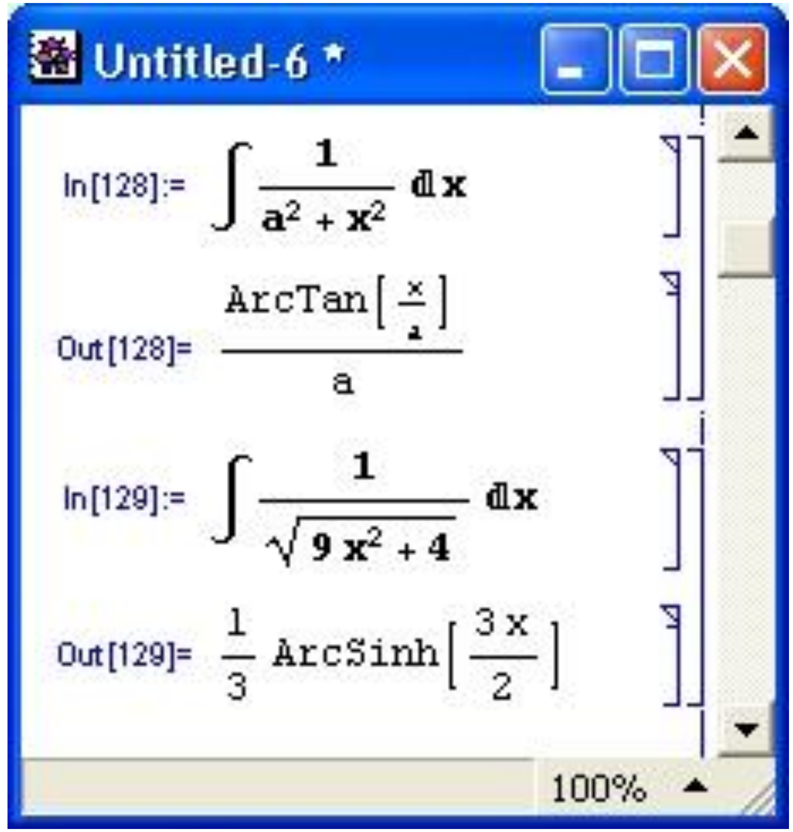
Out[126]= $c\,x + \frac{b\,x^{2}}{2} + \frac{a\,x^{3}}{3}$

In[127]:= `D[%, x]`

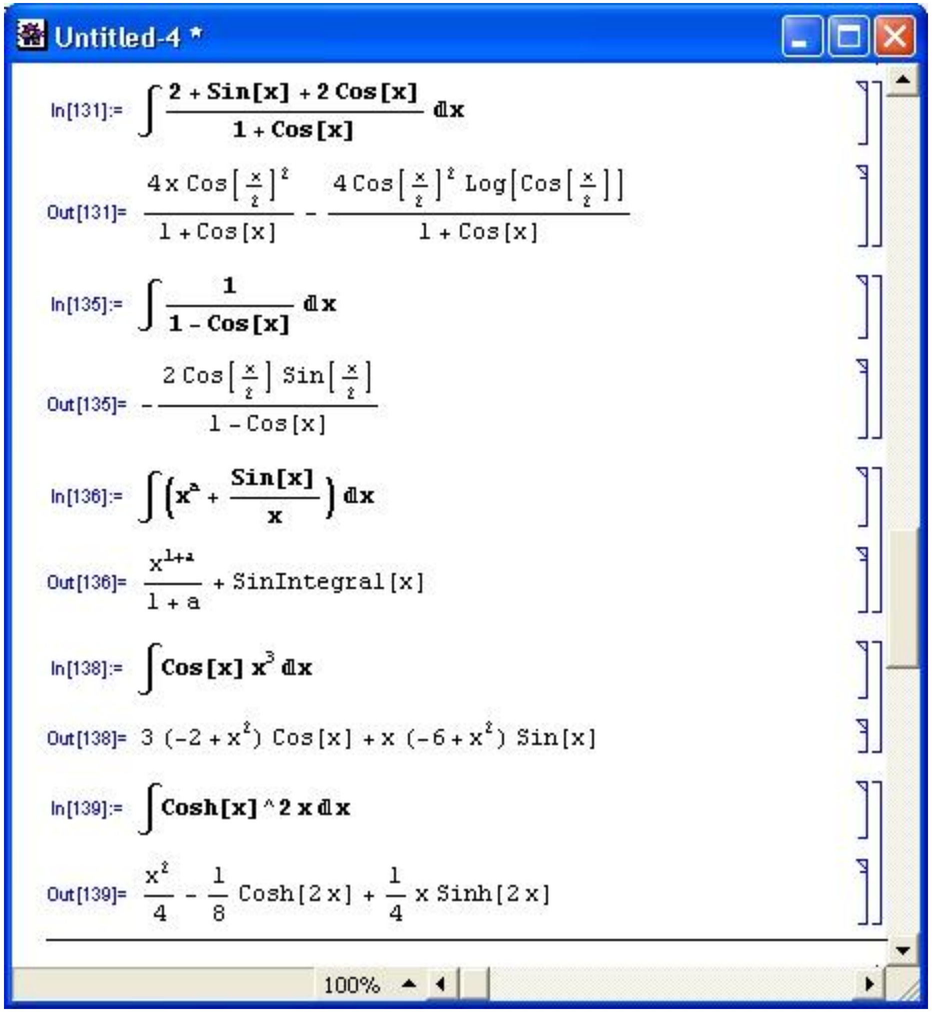
Out[127]= $c + b\,x + a\,x^{2}$

100%

Примеры вычисления неопределенных интегралов (начало)



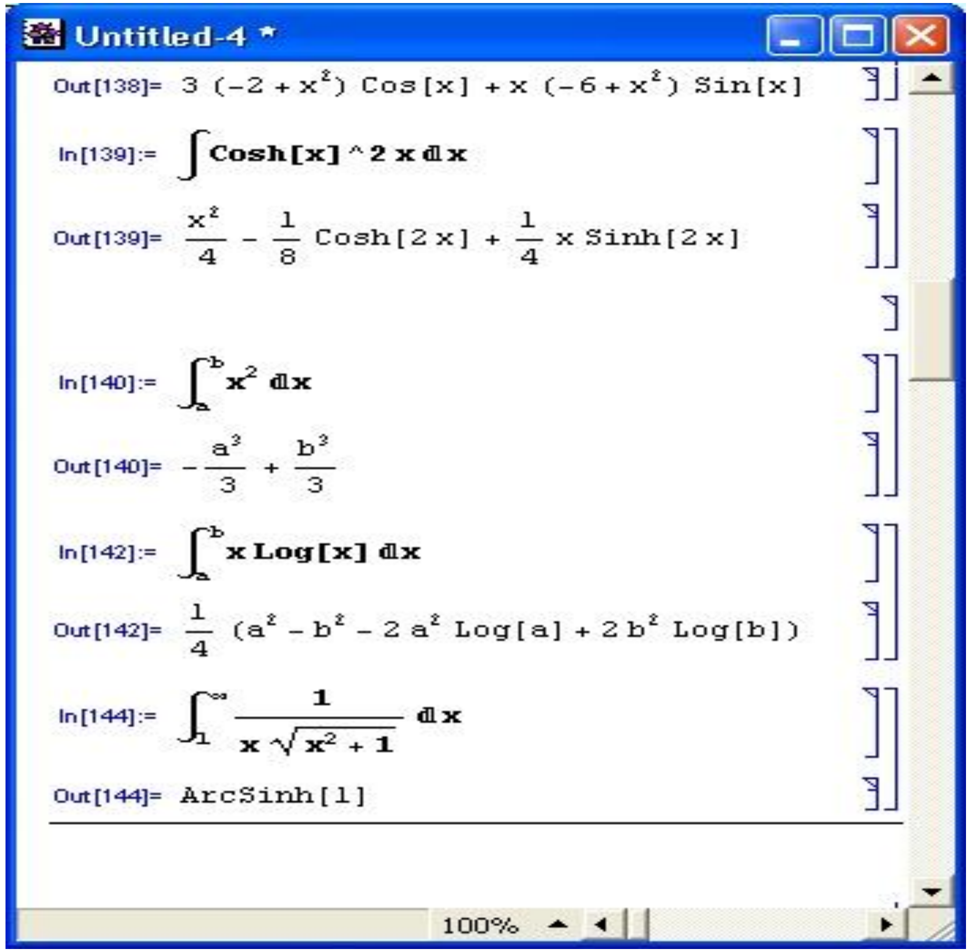
Примеры вычисления неопределенных интегралов (продолжение)



Примеры вычисления неопределенных интегралов (окончание)

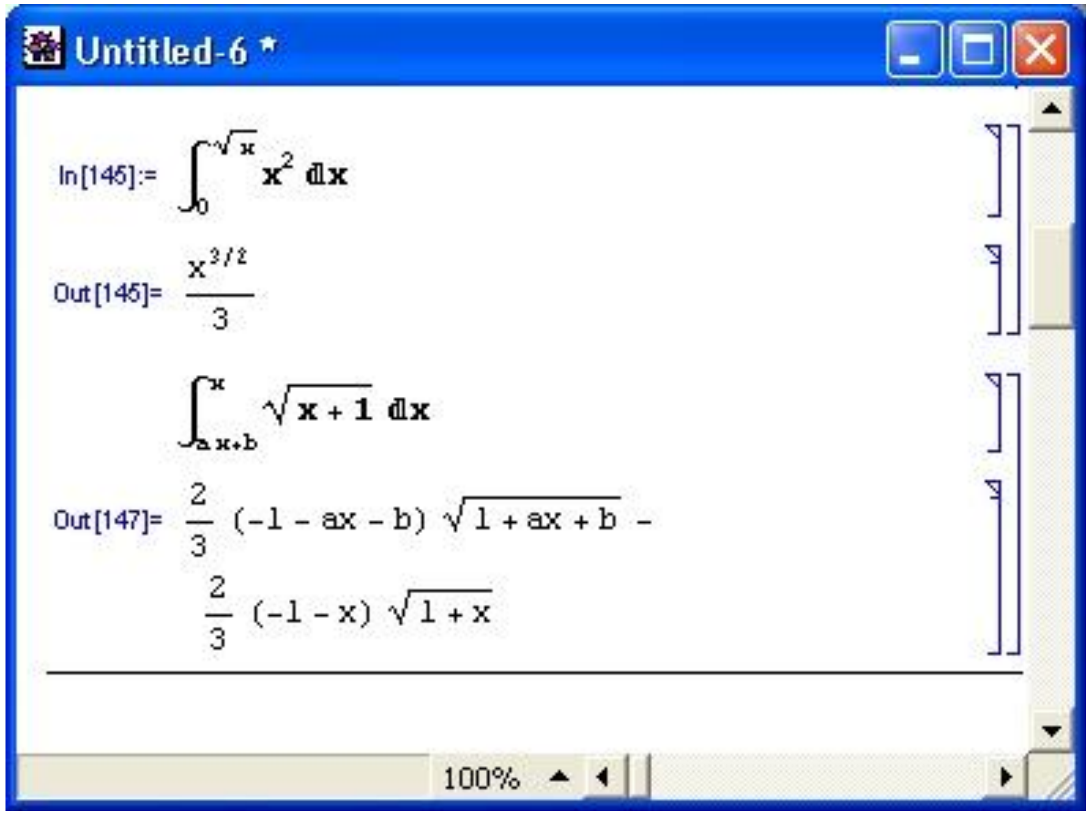
Вычисление определенных интегралов

Следующая серия примеров иллюстрирует вычисление определенных интегралов в символьном виде.



Примеры вычисления определенных интегралов обычного вида

Приведенные примеры показывают вычисление определенных интегралов с пределами-функциями.



Примеры вычисления определенных интегралов с пределами-функциями

- Mathematica способна вычислять даже кратные интегралы с фиксированными и переменными верхним или нижним пределами. Кратный, например двойной, интеграл с фиксированными пределами имеет вид:

$$\int_a^b \int_b^a f(x,y)dxdy$$

Untitled-6 *

In[148]:= `Integrate[x^2 + y^2, {x, 0, a}, {y, 0, a}]`

Out[148]= $\frac{2 a^4}{3}$

In[149]:= $\int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

Out[149]= $\frac{2 a^4}{3}$

In[150]:= $\int_0^{x^2} \int_0^{y} \mathrm{Sin}[x y^2]\, dx\, dy$

Out[150]= $\frac{1}{2} x^4 \mathrm{Sin}[x y^2]$

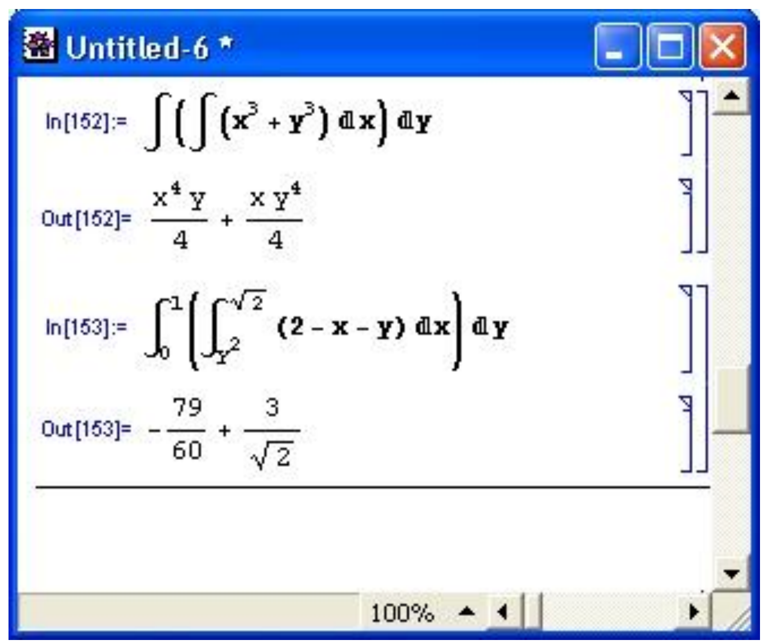
In[151]:= $\int_a^b \int_c^d x\, y\, dy\, dx$

Out[151]= $\left(-\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)\left(-\frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right)$

Примеры вычисления двойных определенных интегралов

100%

- Другая серия примеров показывает, как вычисляются двойные и тройные интегралы, пределы которых сами по себе являются функциями.



Дифференцирование

- При проведении математических и технических расчетов именно операции математического анализа используются чаще всего. Одна из основных операций математического анализа — дифференцирование. Mathematica умеет вычислять производные всех стандартных математических функций, а также специальных функций (А. Н. Прокопеня и А. В. Чичурин)

- Производную первого порядка функции expr по переменной var вычисляют при помощи выражения D[expr,var]. При вычислении смешанных и кратных производных аргумент var задаётся в виде списка. Производную высшего порядка n вычисляют при помощи функции D[expr,{var,n}], а производную по нескольким переменным var1,var2,... — при помощи D[expr,var1,var2,...]

```
In[1]:= D[3*x^2*Cos[2*y], x]

Out[1]= 6 x Cos[2 y]

In[2]:= D[3*x^2*Cos[2*y], {x, 2}]

Out[2]= 6 Cos[2 y]
```

Функция D[expr,{{var1,var2,...}}] для скалярного выражения expr даёт вектор производныхexpr по каждой из переменных var1,var2,... (пример In[4]).

```
In[4]:= D[3*x^2*Cos[2*y], {{x, y}}]

Out[4]= {6 x Cos[2 y], -6 x^2 Sin[2 y]}
```

- Рассмотрим произвольную функцию f[x,y] и вычислим ее третью смешанную производную \partial ^3f/\partial x^2\partial y. Обозначение производной в Out[5] задано выражением (2,1), компоненты которого показывают, что вычислена вторая производная по первому аргументу и первая производная по второму аргументуЕсли Mathematica не может явно вычислить производную, она сводит вычисление к выражениям с видом Derivative[n1,n2,...][f]. В примере In представлена внутренняя форма вычисленного выражения Out[5].

```
In[5]:= D[f[x, y], {x, 2}, y]

Out[5]= f^(2,1)[x, y]

In[6]:= Out[5] // FullForm
```

Если выражение, к которому применена функция дифференцирования, не содержит переменных, по которым дифференцирование осуществляется, то Mathematica D рассматривает это выражение как константу по переменным дифференцирования. Поэтому при вычислении производной некоторой функции $f(x)$ необходимо обязательно в явном виде указывать её аргумент. Если в функции двух аргументов $g(x,y)$ один аргумент зависит от другого, например, $x(y)$, то эту зависимость также следует явно указывать .

5.13. Partial Derivatives.nb

```
In[1]:= D[3*x^2*Cos[2*y], x]

Out[1]= 6 x Cos[2 y]

In[2]:= D[3*x^2*Cos[2*y], {x, 2}]

Out[2]= 6 Cos[2 y]

In[3]:= D[3*x^2*Cos[2*y], x, y]

Out[3]= -12 x Sin[2 y]

In[4]:= D[3*x^2*Cos[2*y], {{x, y}}]

Out[4]= {6 x Cos[2 y], -6 x^2 Sin[2 y]}

In[5]:= D[f[x, y], {x, 2}, y]

Out[5]= f^(2,1)[x, y]

In[6]:= Out[5] // FullForm

Out[6]//FullForm=
        Derivative[2, 1][f][x, y]

In[7]:= D[func, x]

Out[7]= 0

In[8]:= D[func[x], x]

Out[8]= func'[x]

In[9]:= D[g[x[y], y], y]

Out[9]= g^(0,1)[x[y], y] + x'[y] g^(1,0)[x[y], y]
```

100%

- В Mathematica имеется функция **Dt[expr,var],** которая находит полную производную выражения expr: она рассматривает все символы в выражении expr как функции от переменных var, по которым осуществляется дифференцирование.. Функция в упрощённом виде, без второго аргумента, Dt[expr], есть дифференциал выражения expr — пример In[2].

In[2]:= Dt[a * Log[2 * x]]

Out[2]= $\frac{a\,\mathrm{Dt}[x]}{x} + \mathrm{Dt}[a]\,\mathrm{Log}[2\,x]$

Если дифференцируемое выражение expr содержит какие-либо константы, т.е., при дифференцировании их производные равны нулю, то их можно указать в соответствующей опции, т.е., задать функцию дифференцирования в виде Dt[expr,var,Constants->{const1,const2,...}], где {const1,const2,...} — список имеющихся в выражении expr констант .

5.14. Tottal Derivatives.nb

```
In[1]:= Dt[a*Tan[2*x], x]

Out[1]= 2 a Sec[2 x]^2 + Dt[a, x] Tan[2 x]

In[2]:= Dt[a*Log[2*x]]

Out[2]= a Dt[x]/x + Dt[a] Log[2 x]

In[3]:= Dt[a*x^2 + 2*b*Cos[3*x], x]

Out[3]= 2 a x + x^2 Dt[a, x] + 2 Cos[3 x] Dt[b, x] - 6 b Sin[3 x]

In[4]:= Dt[a*x^2 + 2*b*Cos[3*x], x, Constants → {a, b}]

Out[4]= 2 a x - 6 b Sin[3 x]
```

100%

Нахождение полных производных