

# Синтез цифровых фильтров



Заданная частотная характеристика  $H_d(j\omega)$  дискретизируется в полосе частот  $0 - \omega_D$  с шагом  $\Delta\omega = \frac{\omega_D}{N} \leq \Delta\omega_{\text{пер}}(L - 1)$ , где  $L$  – число выборок в переходной полосе:

$$H_d(j\omega_k) = H_d(j\omega)|_{\omega=\omega_k=\Delta\omega k}, \quad k=0,1,\dots,(N-1)$$

Условия выбора ДЧХ:

- в полосе пропускания  $|H_d(j\omega_k)| = 1$ ;
- в полосе задерживания  $|H_d(j\omega_k)| = 0$ ;
- в переходной полосе  $|H_d(j\omega_k)| = H_1 = var$  – определяет качество аппроксимации частотной характеристики.

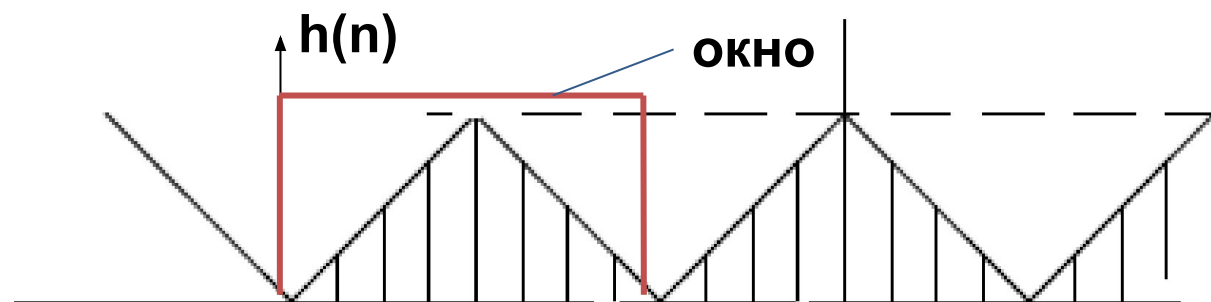
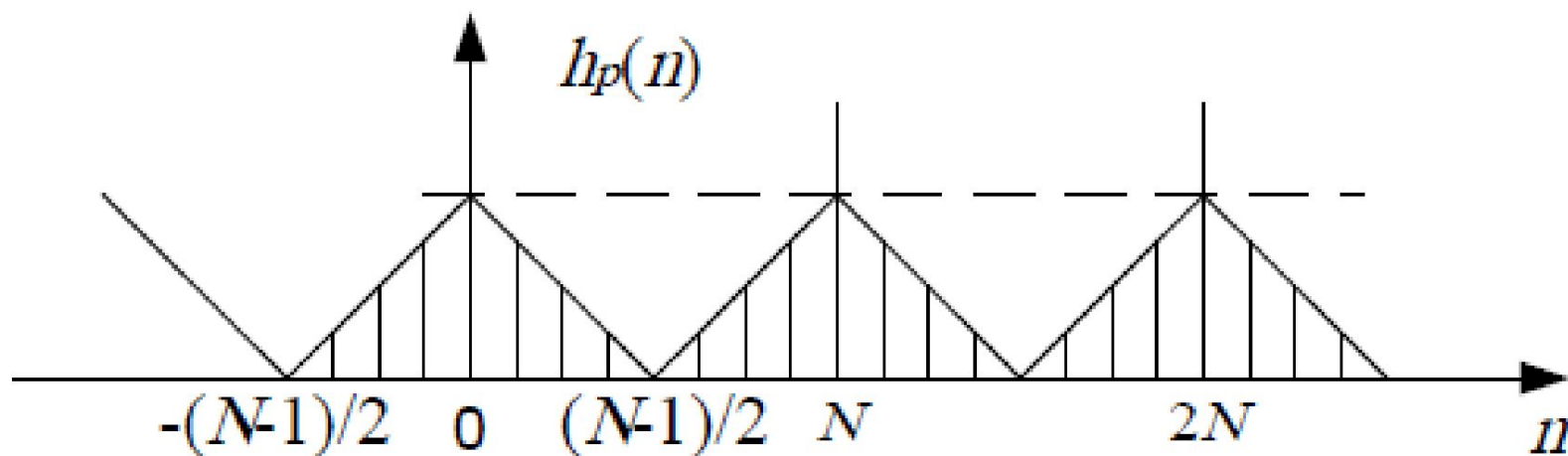
Импульсная характеристика (ОДПФ) – периодическая с периодом  $N_p = N$ :

$$h_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_D} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k (n+iN) T_D}$$

- где  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$

Для обеспечения физической реализуемости НФ выбирается один сдвинутый вправо на  $(N-1)/2$  отсчетов период  $h_p(n)$ :

$$h(n) = h_p\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$$



■ Частотная характеристика синтезируемого фильтра :

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n T_d} = e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(\omega_k) \frac{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} N T_d}{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} T_d}$$

Множитель  $e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d}$  - определяет линейную ФЧХ фильтра:

$$\varphi(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} T_d$$

Из формулы для АЧХ следует, что  $H(\omega) = H_d(\omega_k)$  при  $\omega = \omega_k$  и  $H(\omega) \neq H_d(\omega_k)$  при  $\omega \neq \omega_k$ .

Качество аппроксимации зависит от числа выборок в переходной полосе  $L$  и поиске их оптимальных значений  $H_{i \text{ опт}}$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ).

Пример:

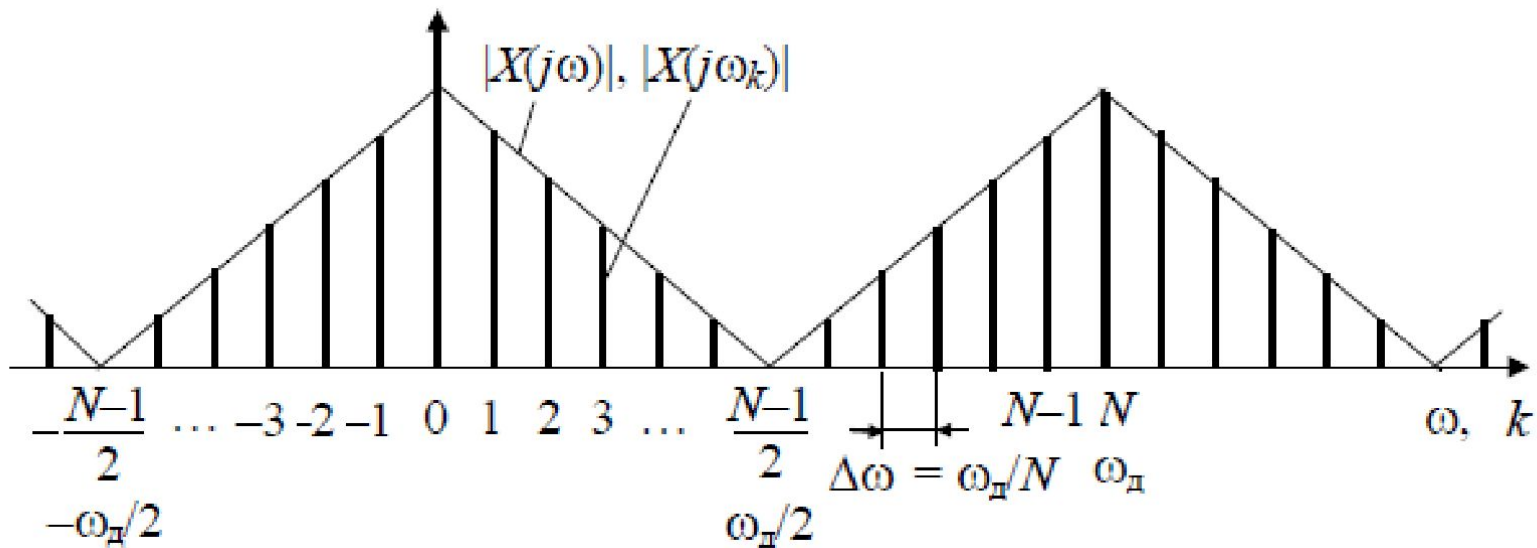
$$\begin{aligned} L = 0; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -20 \text{ дБ}; \\ L = 1; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -40 \text{ дБ}; \\ L = 2; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -(50 \dots 60) \text{ дБ}; \\ L = 3; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -(80 \dots 100) \text{ дБ}; \end{aligned}$$

# Алгоритм цифровой фильтрации сигналов на основе дискретного преобразования Фурье

□ Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) соответствует выборкам непрерывного преобразования Фурье  $X(j\omega)$  дискретной последовательности  $x(n)_{N_1}$  конечной длины  $N_1$ , вычисленным на дискретных равностоящих частотах  $\omega_k = k\Delta\omega$ : (сравнить с формулой 2.10 – спектр дискретного сигнала)

$$F_{\text{ПН}}[x(n)] = X(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_k} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x(n)e^{-j\omega_k n T_d}, \quad (4.18)$$

где  $\Delta\omega = \omega_d/N$  – шаг дискретизации по частоте;  $N$  – число вычисляемых частотных выборок ДПФ в полосе частот  $0 \dots \omega_c$  (в общем случае  $N \neq N_1$ ),  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  – номер частотной выборки.



Заменив дискретную частоту  $\omega_k$  на номер частотной выборки  $k$  ( $\omega_k = k \cdot \Delta\omega$ ) и с учетом  $\Delta\omega = \omega_D/N$ , ( $N=N_1$ ) преобразуем (4.18) к виду функции номера частотной выборки  $k$ :

$$F_{\Pi N}[x(n)] = X(j\omega_k) = X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.19)$$

□ Обратное преобразование Фурье:

$$x(n) = \frac{T_D}{2\pi} \int_0^{\omega_D} X(j\omega) e^{j\omega n T_D} d\omega.$$

Используя замену  $d\omega \rightarrow \frac{\omega_D}{N}$ ;  $\int \rightarrow \sum$ ;  $\omega \rightarrow \omega_k$ ,  
получим обратное дискретное преобразование Фурье:

$$F_{ON}[X(j\omega_k)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_D} \quad (4.20)$$

Или

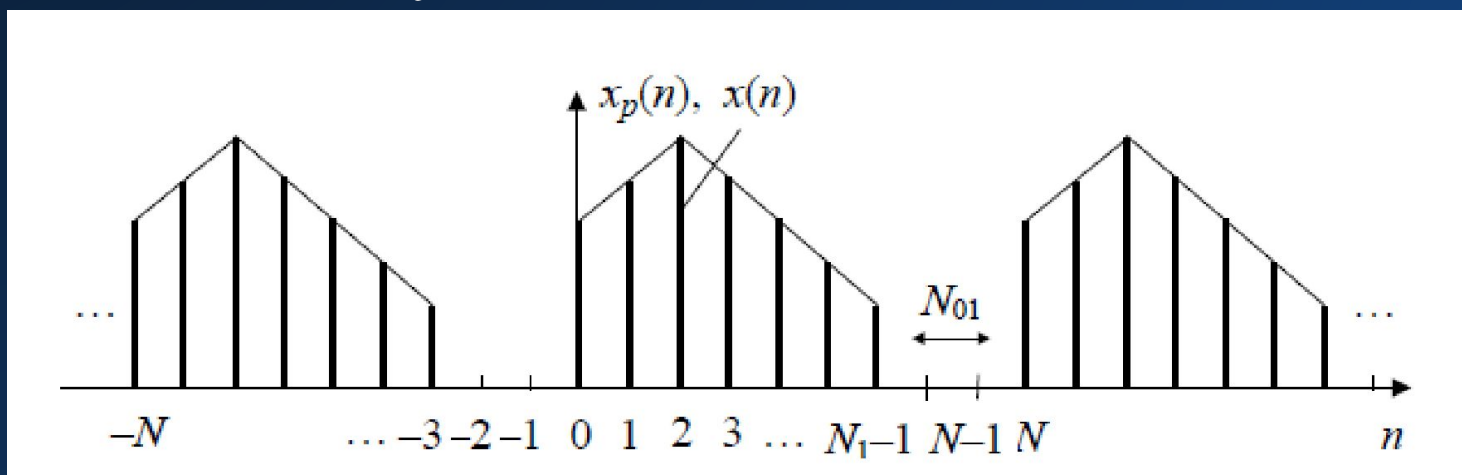
$$F_{ON}[X(jk)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.21)$$

$x_p(n)$  – периодический сигнал



Сигнал  $x_p(n)$  является периодическим повторением сигнала  $x(n)$  с периодом  $N$ . При  $N=N_1$

$$x_p(n) = \sum_i x(n - iN), \quad \text{при } i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$



При  $N > N_1$  дополнительные  $N - N_1$  отсчетов равны 0.

Т.е. при  $N \geq N_1$  сигнал  $x(n)$  восстанавливается точно.

При  $N < N_1$  будет происходить перекрытие сигналов  $x_p(n)$  т.е. будут искажения сигнала  $x(n)$ .

## Алгоритм цифровой фильтрации конечных последовательностей на основе ДПФ

□ Сигнал на выходе КИХ фильтра (свертка  $h(n)$  и  $x(n)$ )

$$y(n)_N = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x(n-m), \quad (4.22)$$

$N_1$  – длина входной последовательности  $x(n)$ ,

$N_2$  – длина импульсной характеристики  $h(n)$  фильтра,

$N = N_1 + N_2 - 1$  – длина выходной последовательности,

$n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

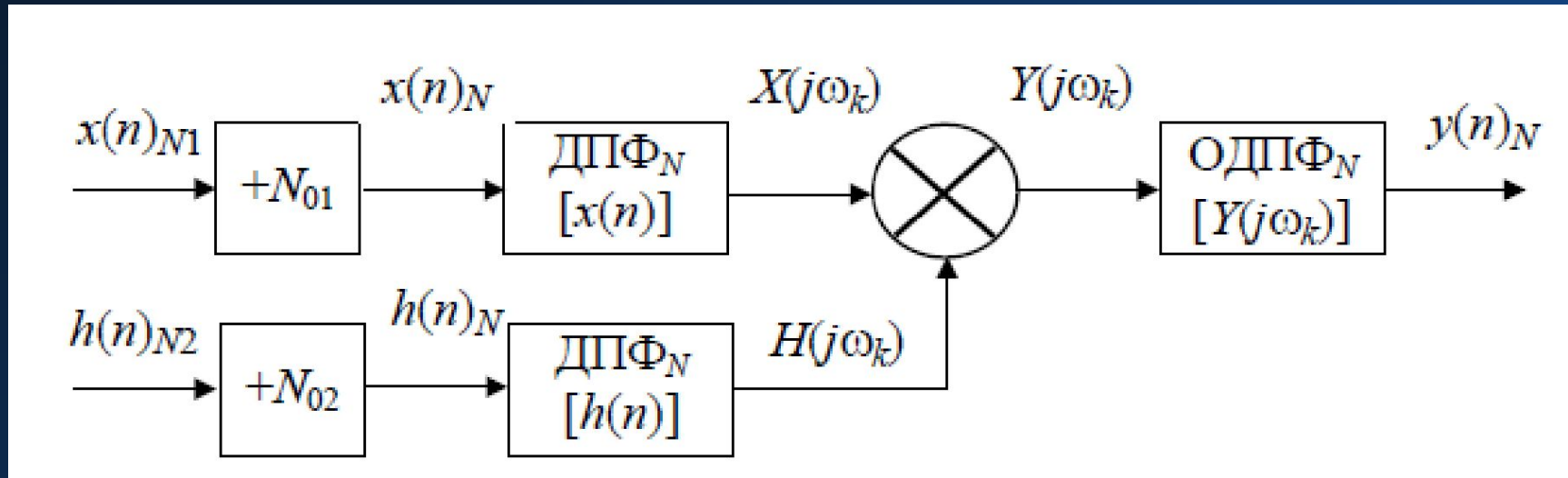
Очевидно, что (свойство свертки)

$$F_{\Pi N}[y(n)] = F_{\Pi N}[h(n)] \cdot F_{\Pi N}[x(n)] = H(j\omega_k) \cdot X(j\omega_k)$$

Тогда

$$y(n) = F_{ON}[H(j\omega_k) \cdot X(j\omega_k)] \quad (4.23)$$

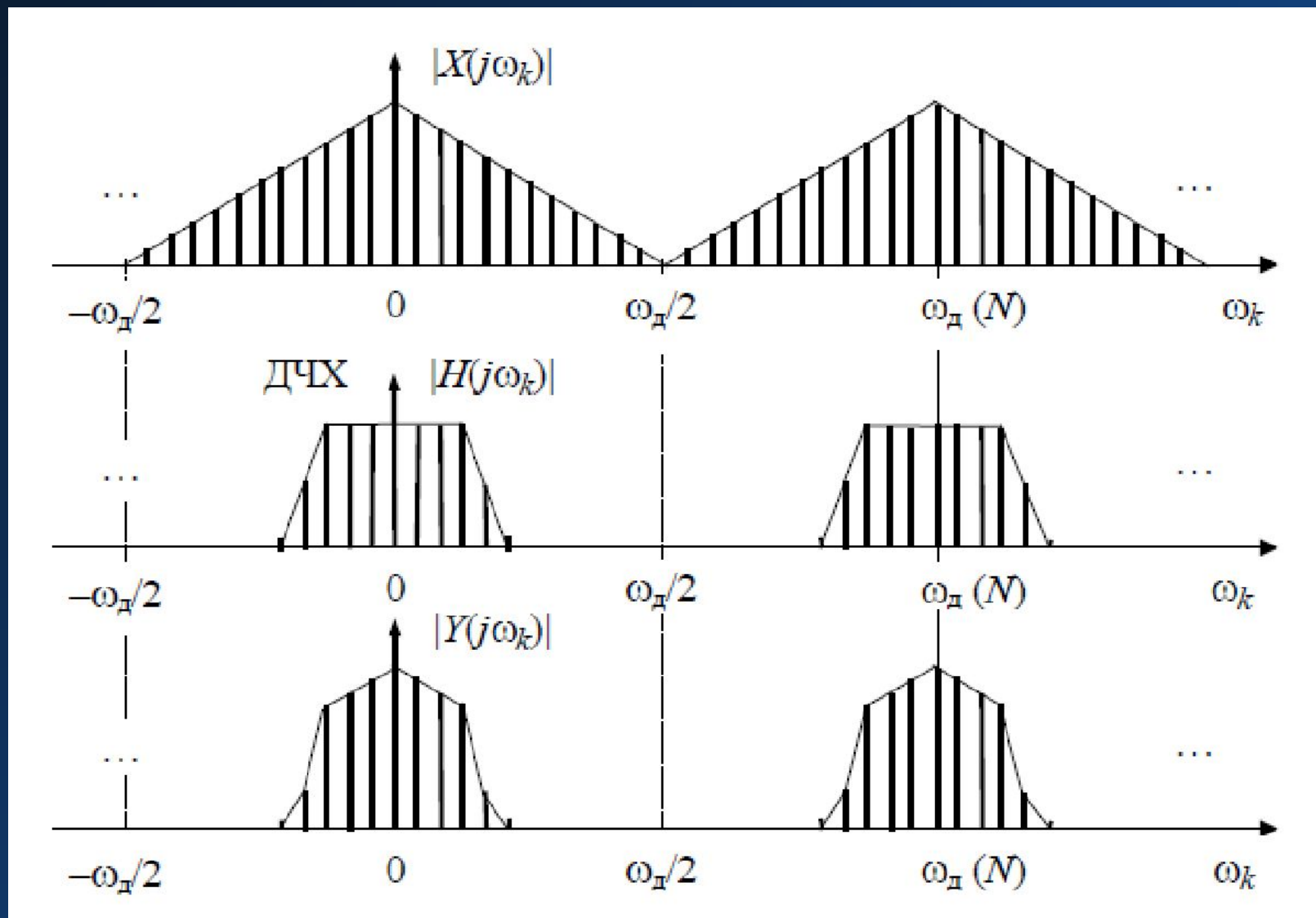
## Структурная схема НЦФ на основе ДПФ



$+N_{01}$  и  $+N_{02}$  - добавка нулевых отсчетов для выравнивания длины  $x(n)$  и  $h(n)$

Частотная характеристика  $H(j\omega_k)$  может быть задана заранее и отсчеты  $H(jk)$  могут храниться в ПЗУ ЦФ.

# Частотные диаграммы в структуре НЦФ на основе ДПФ



## Недостатки:

1. По объему вычислений фильтр на основе ДПФ уступает НФ на основе ДВС, где на один отсчет сигнала выполняется  $N_2$  операции умножения.

Для рассматриваемого фильтра – число операций умножения  $K_{\text{умн}} = 4(2N^2 + N)$  и сложения  $K_{\text{сл}} = 4(N - 1)N$ , т.е. в пересчете на один отсчет:

$$K_{\text{умн}(1)} = 4(2N + 1) \text{ и } K_{\text{сл}(1)} = 4(N - 1).$$

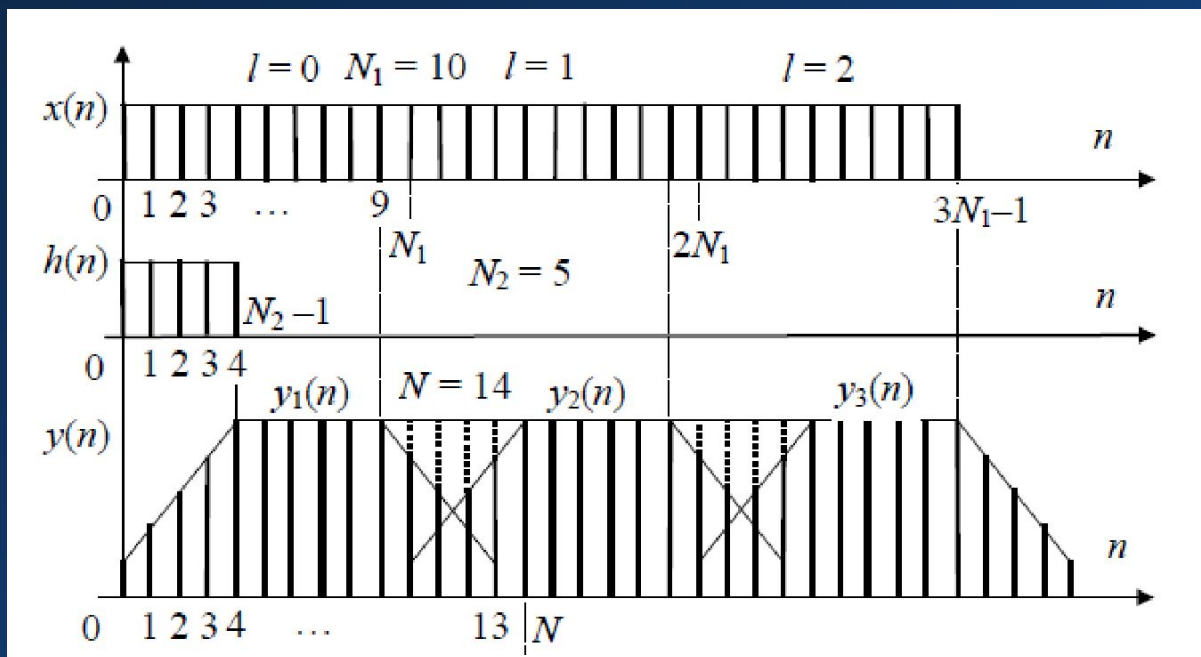
Однако при использовании быстрого преобразования Фурье (БПФ) ситуация меняется:

(пример:  $N = 1024$ , НФ на основе БПФ -  $K_{\text{умн}(1)} = 44$  и  $K_{\text{сл}(1)} = 40$ .  
НФ на основе ДВС -  $K_{\text{умн}(1)} = K_{\text{сл}(1)} = 512$ ).

2. Требуется значительный объем памяти.

При обработке последовательностей, длина которых намного превышает длину импульсной характеристики фильтра входную последовательность  $x(n)$  представляют суммой конечного или бесконечного числа примыкающих друг к другу секций  $x_l(n)_{N_1}$  конечной длины  $N_1$ .

Полученные секции сигналов  $y_l(n)_{N_1}$  «склеивают»:



# Численные методы синтеза цифровых фильтров

- Численные, или оптимальные, методы синтеза ЦФ реализуются с помощью процедур непосредственной аппроксимации заданных частотных характеристик фильтра в соответствии с определенными критериями минимизации ошибок аппроксимации.
  - Основными при аппроксимации БИХ и КИХ-фильтров являются критерии минимума среднего квадрата ошибки (СКО) и наилучшего чебышевского приближения (минимаксный критерий).
  - Пусть  $H_d(j\omega_i)$  и  $H(j\omega_i)$  - заданная и аппроксимирующая частотные характеристики фильтра, вычисляемые на дискретном множестве частот  $\omega_i$ .

- Тогда целевая функция алгоритма минимизации СКО определяется выражением

$$E = \sum_{i=1}^M [|H(j\omega_i)| - |H_d(j\omega_i)|]^2. \quad (4.24)$$

- Минимаксный критерий заключается в минимизации на множестве частот  $\omega_i$  максимальных значений взвешенного функционала ошибки:

$$E(\omega) = W(\omega) \cdot |H(j\omega) - H_d(j\omega)|, \quad (4.25)$$

где  $W(\omega)$  - положительная весовая функция

- Для численного синтеза КИХ и БИХ-фильтров существует большое количество методов аппроксимации передаточной функции  $H(j\omega)$  и эффективных компьютерных программ.



## Синтез оптимальных КИХ-фильтров

Искомую АЧХ фильтра представляют в форме тригонометрического полинома

$$H(\omega_H) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} 2b_k \cos \left[ \omega_H \left( \frac{N-1}{2} - k \right) \right] = \sum_k^M a_k \cos[\varphi_k(\omega_H)] = H(\omega_H, \bar{a})$$

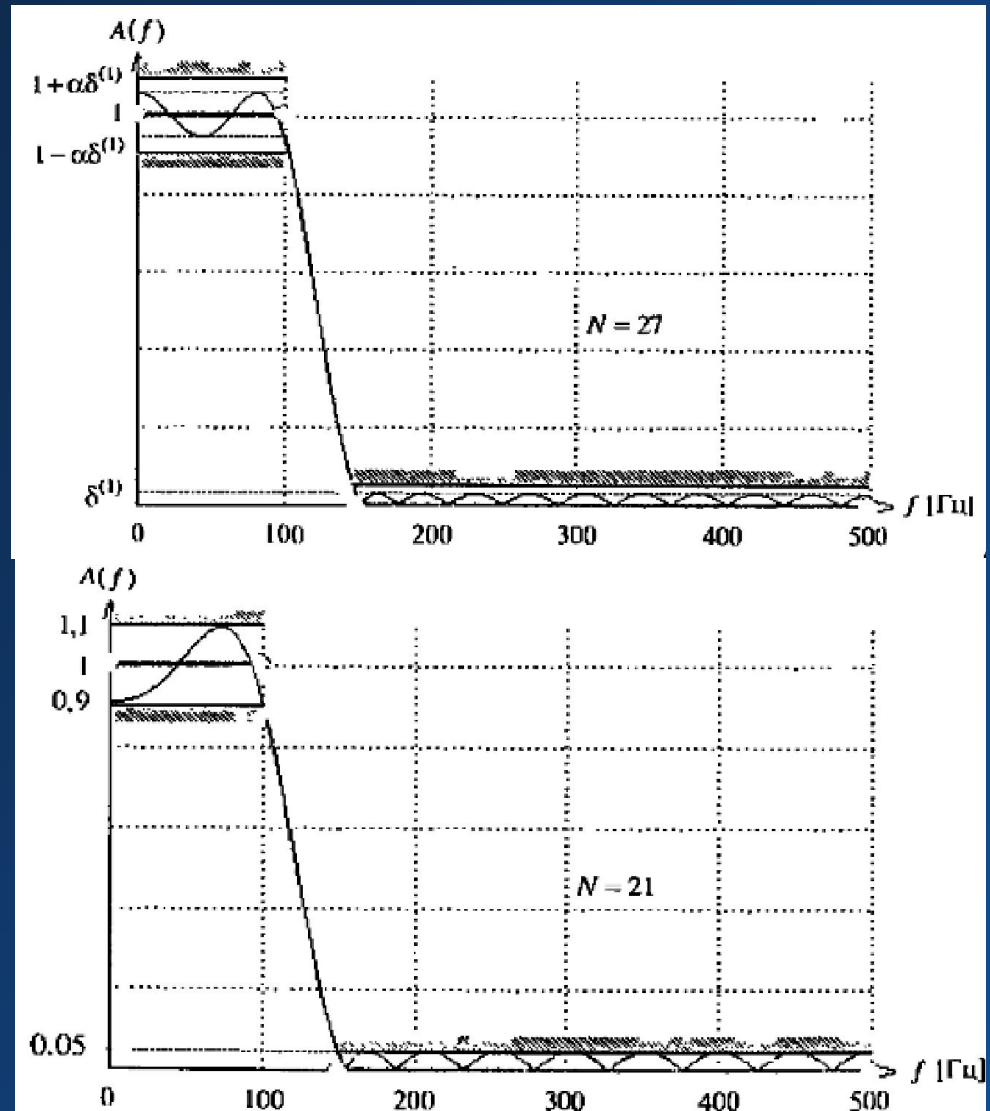
где  $\bar{a}$  - вектор коэффициентов,  $M=(N-1)/2$  – порядок фильтра.

Зная коэффициенты  $a_k = 2b_k$ , можно записать передаточную функцию

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}, \quad b_i = b_{N-1-i} = \frac{a_k}{2}, \quad i = k.$$

Задача оптимального синтеза состоит в определении такого вектора коэффициентов  $\bar{a}$  полинома  $H(\omega_H, \bar{a})$ , при котором достигается минимальный порядок передаточной функции.

# Пример поиска оптимального решения для ФНЧ



▣ Тригонометрический полином  $H(\omega_H, \bar{a})$  может быть представлен в виде суммы полиномов Чебышева  $C_k(x)$  с весом  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ :

$$\begin{aligned} H(\omega_H, \bar{a}) &= \sum_{k=0}^M a_k \cos(k\omega_H) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(k \cdot \arccos(x)) \\ &= \sum_{k=0}^M a_k C_k(x), \end{aligned}$$

$$\text{где } x = \cos(2\pi f T_D) = \cos \omega_H, \quad -1 \leq x \leq 1$$

тогда  $\omega_H = \arccos(x)$ .

Полином Чебышева  $k$ -го порядка

$$C_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x))$$

## График полинома $C_5(x)$

- Свойства: -  $|C_k(x)| \leq 1$  на интервале  $-1 \leq x \leq 1$ ;  
- полином N-го порядка N раз переходит через нуль и (N+1) раз достигает значений +1 или -1

