



# СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

8 класс

# Ключевые слова

- система счисления
- цифра
- алфавит
- позиционная система счисления
- основание
- развёрнутая форма записи числа
- свёрнутая форма записи числа
- двоичная система счисления
- восьмеричная система счисления
- шестнадцатеричная система счисления



# Общие сведения

Система счисления - это знаковая система для записи чисел при помощи определенного набора символов.

Цифры – это знаки, при помощи которых записываются числа.

Алфавит системы счисления – это совокупность цифр.



|       |        |         |          |      |      |      |      |      |      |
|-------|--------|---------|----------|------|------|------|------|------|------|
| 1     | 2      | 3       | 4        | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | - 30 |
| ·ā·   | ·b·    | ·g·     | ·d·      | ·e·  | ·s·  | ·z·  | ·h·  | ·q·  |      |
| 10    | 20     | 30      | 40       | 50   | 60   | 70   | 80   | 90   |      |
| ·r·   | ·k·    | ·ā·     | ·m·      | ·h·  | ·z·  | ·o·  | ·n·  | ·c·  | 50   |
| 100   | 200    | 300     | 400      | 500  | 600  | 700  | 800  | 900  |      |
| ·p·   | ·g·    | ·t·     | ·v·      | ·f·  | ·x·  | ·ψ·  | ·w·  | ·ц·  |      |
| 11    | 12     | 13      | 14       | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   |      |
| ·ai·  | ·vi·   | ·ri·    | ·di·     | ·ei· | ·si· | ·zi· | ·ni· | ·oi· |      |
| 222   | 319    | 431     | 988      |      |      |      |      |      |      |
| ·СКВ· | ·ТФІ·  | ·УЛА·   | ·ЦПИ·    |      |      |      |      |      |      |
| 222   | 319    | 431     | 988      |      |      |      |      |      |      |
| 1000  | 2000   | 20000   | 43000    |      |      |      |      |      |      |
| ·А·   | ·В·    | ·К·     | ·МГ·     |      |      |      |      |      |      |
| 10000 | 300000 | 4000000 | 80000000 |      |      |      |      |      |      |



Вав. Ег. Древнеславянская система счисления

# Узловые и алгоритмические числа

Узловые числа обозначаются цифрами.

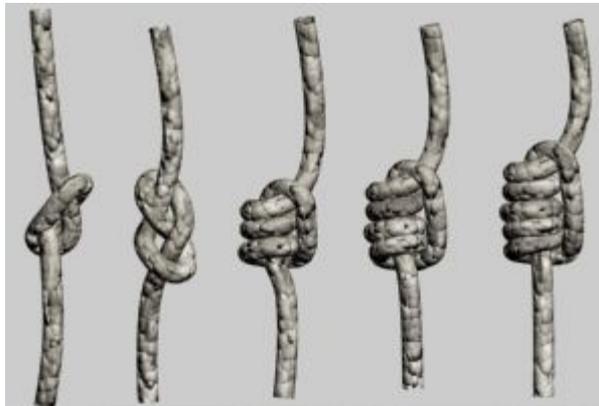


Алгоритмические числа получаются в результате каких-либо операций из узловых чисел.

$$5 \times 100 + 4 \times 10 + 8 = 548$$

# Унарная система счисления

Простейшая и самая древняя система счисления - **унарная** система счисления. В ней для записи любых чисел используется всего один символ - палочка, узелок, зарубка, камушек.



Узелки, дощечки

Примеры узелков, зарубок

Зарубки, камушки

# Непозиционная система счисления

Система счисления называется **непозиционной**, если значение цифры не зависит от её положения в числе.

## Римская система счисления

|    |   |      |   |
|----|---|------|---|
| 1  | I | 100  | C |
| 5  | V | 500  | D |
| 10 | X | 1000 | M |
| 50 | L |      |   |



Здесь **алгоритмические** числа получаются путём сложения и вычитания **узловых** чисел с учётом следующего правила: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

# Позиционная система счисления

Система счисления называется *позиционной*, если значение цифры зависит от её положения в записи числа.

Одна и та же цифра получает разные значения в зависимости от позиции, которую она занимает в записи числа.

Основание позиционной системы счисления = количеству цифр, составляющих её алфавит.

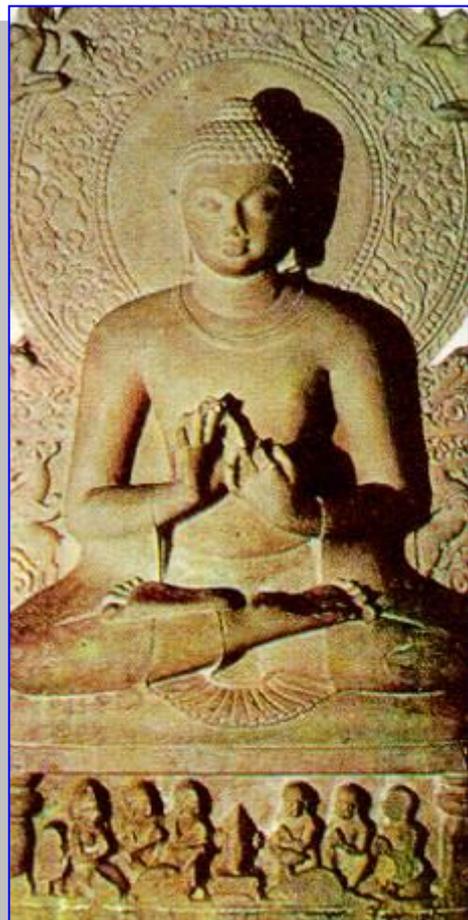
Алфавит *десятичной* системы составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Т.е. всего 10 цифр.

Следовательно, основание десятичной системы = 10

В десятичной системе десять единиц одного разряда составляют одну единицу старшего разряда

# Десятичная система счисления

Цифры **1234567890** сложились в Индии около **400 г. н. э.**



Арабы стали пользоваться подобной нумерацией около **800 г. н. э.**

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۰

Примерно в **1200 г. н. э.** эту нумерацию начали применять в Европе.



# Основная формула

В позиционной системе счисления с основанием  $q$  любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m})$$

где:

$A$  — число;

$q$  — основание системы счисления;

$a_i$  — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

$n$  — количество целых разрядов числа;

$m$  — количество дробных разрядов числа;

$q^i$  — «вес»  $i$ -го разряда.

Такая запись числа называется развёрнутая форма.

# Развёрнутая форма записи числа:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m})$$

Примеры записи чисел в развёрнутой форме:

$$\underline{2015} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$\underline{0,125} = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

$$\underline{14351,1} = 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1}$$

# Развёрнутая форма записи числа:

*Примеры* записи чисел в развёрнутой форме:

$$\underline{2015} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$\underline{0,125} = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

$$\underline{14351,1} = 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1}$$

# Двоичная система счисления

**Двоичной системой счисления** называется позиционная система счисления с основанием 2.

**Двоичный алфавит:** 0 и 1.

Для целых двоичных чисел можно записать:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0 = a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_0 \times 2^0$$

**Пример:**

$$\underline{10011}_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}$$

Правило перевода двоичных чисел в десятичную систему счисления:

Вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа

# Двоичная система счисления

*Двоичной системой счисления* называется позиционная система счисления с основанием 2.

Двоичный алфавит: 0 и 1.

$$\underline{10011}_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}$$

Правило перевода двоичных чисел в десятичную систему счисления:

Вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа

# Правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления

$$\frac{a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_1 \times 2^1 + a_0}{2} = a_{n-1} \times 2^{n-2} + \dots + a_1 \text{ (остаток } a_0)$$

$$\frac{a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_1}{2} = a_{n-1} \times 2^{n-3} + \dots + a_2 \text{ (остаток } a_1)$$

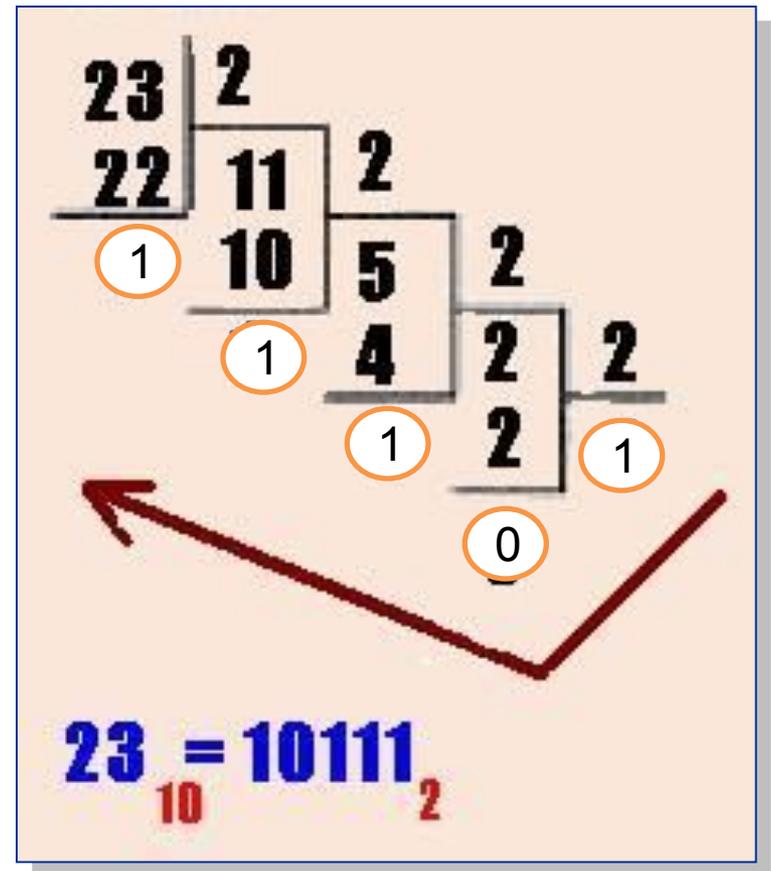
$$\frac{a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_2}{2} = a_{n-1} \times 2^{n-4} + \dots + a_3 \text{ (остаток } a_2)$$

...

На  $n$ -м шаге получим набор цифр:  $a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}$

# Перевод целых десятичных чисел в двоичную систему

- 1) **Разделить** целое десятичное число на **2**. Остаток записать и обвести в кружочек.
- 2) Если полученное **частное**  $\geq 2$ , то надо продолжать делить дальше.
- 3) Двоичный код десятичного числа получают так:  
**последовательно записывают последнее частное**  
(самое правое в кружочке)  
и затем все остальные остатки (в кружочках) справа налево



# Правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления

## Компактное оформление

|     |     |    |    |    |    |   |   |   |
|-----|-----|----|----|----|----|---|---|---|
| 363 | 181 | 90 | 45 | 22 | 11 | 5 | 2 | 1 |
| 1   | 1   | 0  | 1  | 0  | 1  | 1 | 0 | 1 |



$$363_{10} = 101101011_2$$

|     |     |    |    |    |   |   |   |   |
|-----|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| 314 | 157 | 78 | 39 | 19 | 9 | 4 | 2 | 1 |
| 0   | 1   | 0  | 1  | 1  | 1 | 0 | 0 | 1 |



$$314_{10} = 100111010_2$$

# Восьмеричная система счисления

**Восьмеричной системой счисления** называется позиционная система счисления с основанием  $q = 8$ .

**Алфавит:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

**Пример:**  $1063_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 563_{10}$

Для перевода целого восьмеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развёрнутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Для перевода целого десятичного числа в восьмеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 8 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю.

# Восьмеричная система счисления

**Восьмеричной системой счисления** называется позиционная система счисления с основанием  $q = 8$ .

**Алфавит:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0 = a_{n-1} \times 8^{n-1} + a_{n-2} \times 8^{n-2} + \dots + a_0 \times 8^0$$

**Пример:**  $1063_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 563_{10}$

Для перевода целого восьмеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развёрнутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Для перевода целого десятичного числа в восьмеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 8 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю.

# Шестнадцатеричная система

## СЧИСЛЕНИЯ

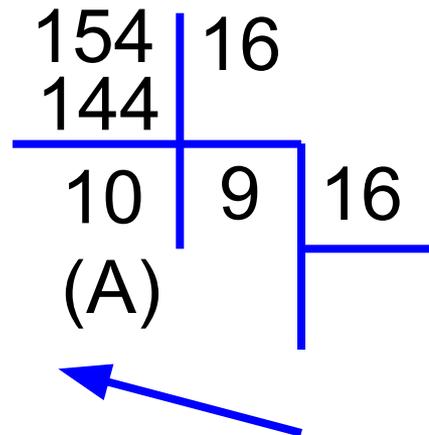
Основание:  $q = 16$ .

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Пример:

$$3AF_{16} = 3 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 768 + 160 + 15 = 943_{10}$$

Переведём десятичное число 154 в шестнадцатеричную систему счисления:



$$154_{10} = 9A_{16}$$

# Правило перевода целых десятичных чисел в систему счисления с основанием $q$

- 1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, равное нулю;
- 2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;
- 3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего полученного остатка.



## Таблица соответствия 10-х, 2-х, 8-х и 16-х чисел от 1 до 16

| Десятичная система | Двоичная система | Восьмеричная система | Шестнадцатеричная система |
|--------------------|------------------|----------------------|---------------------------|
| 1                  | 1                | 1                    | 1                         |
| 2                  | 10               | 2                    | 2                         |
| 3                  | 11               | 3                    | 3                         |
| 4                  | 100              | 4                    | 4                         |
| 5                  | 101              | 5                    | 5                         |
| 6                  | 110              | 6                    | 6                         |
| 7                  | 111              | 7                    | 7                         |
| 8                  | 1000             | 10                   | 8                         |
| 9                  | 1001             | 11                   | 9                         |
| 10                 | 1010             | 12                   | A                         |
| 11                 | 1011             | 13                   | B                         |
| 12                 | 1100             | 14                   | C                         |
| 13                 | 1101             | 15                   | D                         |
| 14                 | 1110             | 16                   | E                         |
| 15                 | 1111             | 17                   | F                         |
| 16                 | 10000            | 20                   | 10                        |
| 17                 | 10001            | 21                   | 11                        |
| 18                 | 10010            | 22                   | 12                        |

# Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

| + | 0 | 1  |
|---|---|----|
| 0 | 0 | 1  |
| 1 | 1 | 10 |

| × | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Арифметика одnorазрядных двоичных чисел



Ôàëë "SWF"

Арифметика многоразрядных двоичных чисел



Ôàëë "SWF"

Умножение и деление двоичных чисел

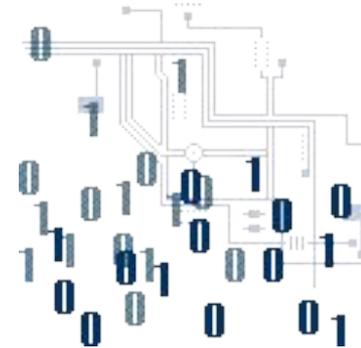


Ôàëë "SWF"

# «Компьютерные» СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Двоичная система используется в компьютерной технике, так как:

- двоичные числа представляются в компьютере с помощью простых технических элементов с двумя устойчивыми состояниями;
- представление информации посредством только двух состояний надёжно и помехоустойчиво;
- двоичная арифметика наиболее проста;
- существует математический аппарат, обеспечивающий логические преобразования двоичных данных.



Двоичный код удобен для компьютера.

Человеку неудобно пользоваться длинными и однородными кодами.

Специалисты заменяют двоичные коды на величины в восьмеричной или шестнадцатеричной системах счисления.

# Самое главное

**Система счисления** — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел.

Система счисления называется **позиционной**, если количественный эквивалент цифры в числе зависит от её положения в записи числа.

В позиционной системе счисления с основанием  $q$  любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m})$$

Здесь:

$A$  — число;

$q$  — основание системы счисления;

$a_i$  — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

$n$  — количество целых разрядов числа;

$m$  — количество дробных разрядов числа;

$q^i$  — «вес»  $i$ -го разряда.



# Вопросы и задания

Задача 1. Переведите число 101010 из десятичной системы счисления в двоичную, если известно, что в десятичной системе счисления оно равно 42. Ответ: 101010.

Задача 2. Переведите число 127 из десятичной системы счисления в восьмеричную. Ответ: 177.

Задача 3. Переведите число 321 из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную. Ответ: 141.

Задача 4. Переведите число 1435 из десятичной системы счисления в двоичную. Ответ: 10110010011.

Задача 5. Переведите число 1100101011 из двоичной системы счисления в десятичную. Ответ: 166.

Задача 6. Переведите число 1011010111111111 из двоичной системы счисления в десятичную. Ответ: 15007.

Задача 7. Переведите число 1011010111111111 из двоичной системы счисления в десятичную. Ответ: 15007.

Задача 8. Переведите число 1011010111111111 из двоичной системы счисления в десятичную. Ответ: 15007.

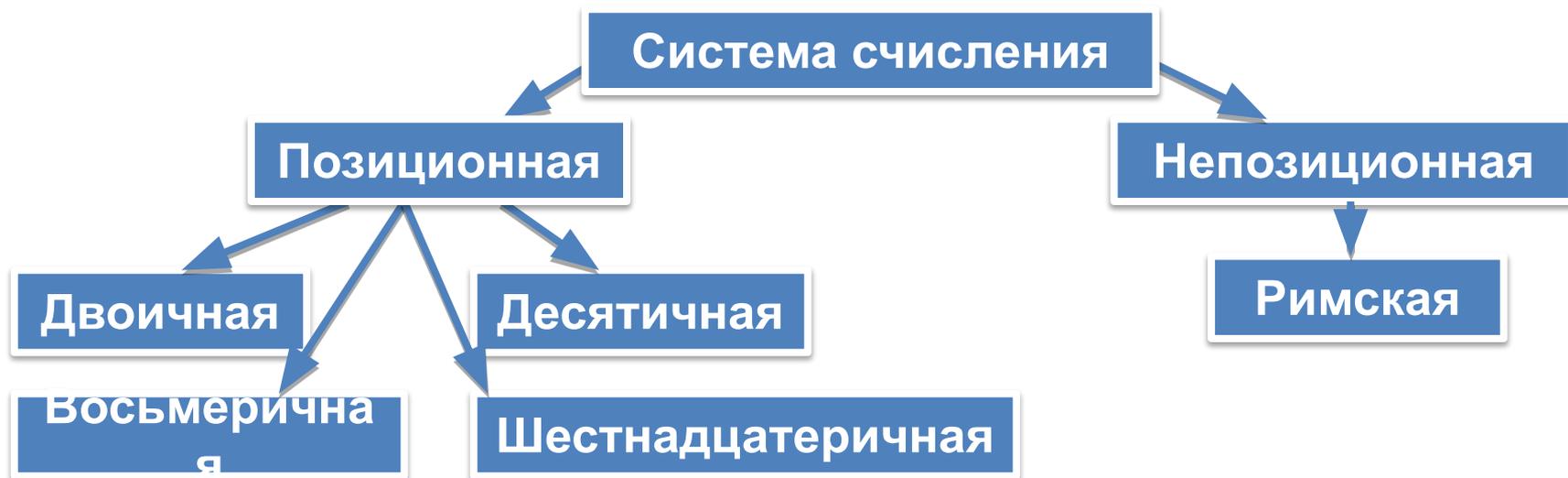
| Основание 2  | Основание 8 | Основание 10 | Основание 16 |
|--|-------------|--------------|--------------|
| 101010   |             |              |              |
|  | 127         |              |              |
|  |             | 321          |              |
| <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span>Задачник «Системы счисления»</span>  <span>ôàëë "SWF"</span> </div> |             |              |              |

# Опорный конспект

**Система счисления** — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел.

**Цифры** - знаки, при помощи которых записываются числа.

**Алфавит** - совокупность цифр системы счисления.



В позиционной системе счисления с основанием  $q$  любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m}).$$

# Электронные образовательные ресурсы

1. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/caeea6cc-bd1d-4f47-9046-1434ac57e111/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/caeea6cc-bd1d-4f47-9046-1434ac57e111/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Умножение и деление двоичных чисел
2. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/402b749c-240b-4e16-9e4d-bea3fc4fa8fa/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/402b749c-240b-4e16-9e4d-bea3fc4fa8fa/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – История развития систем счисления
3. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/1a264912-eca9-4b45-8d77-c3655b199113/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/1a264912-eca9-4b45-8d77-c3655b199113/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Перевод недесятичных чисел в десятичную систему счисления
4. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/78ba290c-0f7c-4067-aaf4-d72f40f49f3b/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/78ba290c-0f7c-4067-aaf4-d72f40f49f3b/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Перевод десятичных чисел в другие системы счисления
5. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/67cbf74b-f85a-4e9d-88c5-58f203fb90ce/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/67cbf74b-f85a-4e9d-88c5-58f203fb90ce/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Сложение и вычитание многоразрядных двоичных чисел
6. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/8bb7eefa-4ed9-43fe-aebe-4d6ac67bc6ec/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/8bb7eefa-4ed9-43fe-aebe-4d6ac67bc6ec/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Сложение и вычитание одноразрядных двоичных чисел
7. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/fc77f535-0c00-4871-b67c-fa2ecf567d46/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/fc77f535-0c00-4871-b67c-fa2ecf567d46/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Задачник
8. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/a96df437-5ae3-4cab-8c5f-8d4cd78c5775/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/a96df437-5ae3-4cab-8c5f-8d4cd78c5775/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Развернутая форма записи числа
9. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/19d0fb95-871d-4063-961d-e7dc5725e555/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub\\_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/19d0fb95-871d-4063-961d-e7dc5725e555/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Тренировочный тест