



СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

8 класс

Ключевые слова

- система счисления
- цифра
- алфавит
- позиционная система счисления
- основание
- развёрнутая форма записи числа
- свёрнутая форма записи числа
- двоичная система счисления
- восьмеричная система счисления
- шестнадцатеричная система счисления



Общие сведения

Система счисления - это знаковая система для записи чисел при помощи определенного набора символов.

Цифры – это знаки, при помощи которых записываются числа.

Алфавит системы счисления – это совокупность цифр.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	- 30
·ā·	·b·	·g·	·d·	·e·	·s·	·z·	·h·	·q·	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
·r·	·k·	·ā·	·m·	·n·	·z·	·o·	·p·	·c·	50
100	200	300	400	500	600	700	800	900	
·p·	·g·	·t·	·v·	·f·	·x·	·ψ·	·w·	·ц·	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	
·ai·	·vi·	·ri·	·di·	·ei·	·si·	·zi·	·ni·	·oi·	
222	319	431	988						
·СКВ·	·ТФІ·	·УЛА·	·ЦПИ·						
222	319	431	988						
1000	2000	20000	43000						
·А·	·В·	·К·	·МГ·						
10000	300000	4000000	80000000						



Вав. Ег. Древнеславянская система счисления

Узловые и алгоритмические числа

Узловые числа обозначаются цифрами.



Алгоритмические числа получаются в результате каких-либо операций из узловых чисел.

$$5 \times 100 + 4 \times 10 + 8 = 548$$

Унарная система счисления

Простейшая и самая древняя система счисления - **унарная** система счисления. В ней для записи любых чисел используется всего один символ - палочка, узелок, зарубка, камушек.



Узелки, дощечки

Примеры узелков, дощечки

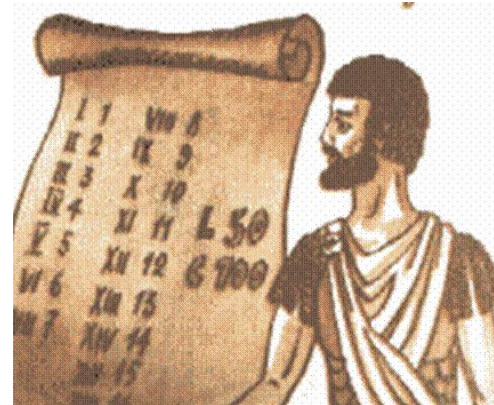
Зарубки, камушки

Непозиционная система счисления

Система счисления называется **непозиционной**, если значение цифры не зависит от её положения в числе.

Римская система счисления

1	I	100	C
5	V	500	D
10	X	1000	M
50	L		



Здесь **алгоритмические** числа получаются путём сложения и вычитания **узловых** чисел с учётом следующего правила: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

Позиционная система счисления

Система счисления называется *позиционной*, если значение цифры зависит от её положения в записи числа.

Одна и та же цифра получает разные значения в зависимости от позиции, которую она занимает в записи числа.

Основание позиционной системы счисления = количеству цифр, составляющих её алфавит.

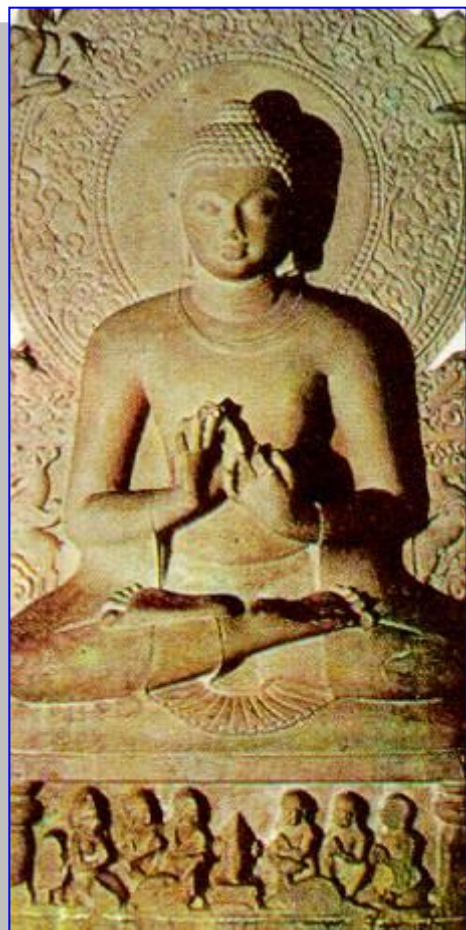
Алфавит *десятичной* системы составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Т.е. всего 10 цифр.

Следовательно, основание десятичной системы = 10

В десятичной системе десять единиц одного разряда составляют одну единицу старшего разряда

Десятичная система счисления

Цифры **1234567890** сложились в Индии около **400 г. н. э.**



Арабы стали пользоваться подобной нумерацией около **800 г. н. э.**

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۰

Примерно в **1200 г. н. э.** эту нумерацию начали применять в Европе.



Основная формула

В позиционной системе счисления с основанием q любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m})$$

где:

A — число;

q — основание системы счисления;

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа;

m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» i -го разряда.

Такая запись числа называется развёрнутая форма.

Развёрнутая форма записи числа:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m})$$

Примеры записи чисел в развёрнутой форме:

$$\underline{2015} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$\underline{0,125} = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

$$\underline{14351,1} = 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1}$$

Развёрнутая форма записи числа:

Примеры записи чисел в развёрнутой форме:

$$\underline{2015} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$\underline{0,125} = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

$$\underline{14351,1} = 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1}$$

Двоичная система счисления

Двоичной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 2.

Двоичный алфавит: 0 и 1.

Для целых двоичных чисел можно записать:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0 = a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_0 \times 2^0$$

Пример:

$$\underline{10011}_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}$$

Правило перевода двоичных чисел в десятичную систему счисления:

Вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа

Двоичная система счисления

Двоичной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 2.

Двоичный алфавит: 0 и 1.

$$\underline{10011}_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}$$

Правило перевода двоичных чисел в десятичную систему счисления:

Вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа

Правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления

$$\frac{a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_1 \times 2^1 + a_0}{2} = a_{n-1} \times 2^{n-2} + \dots + a_1 \text{ (остаток } a_0)$$

$$\frac{a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_1}{2} = a_{n-1} \times 2^{n-3} + \dots + a_2 \text{ (остаток } a_1)$$

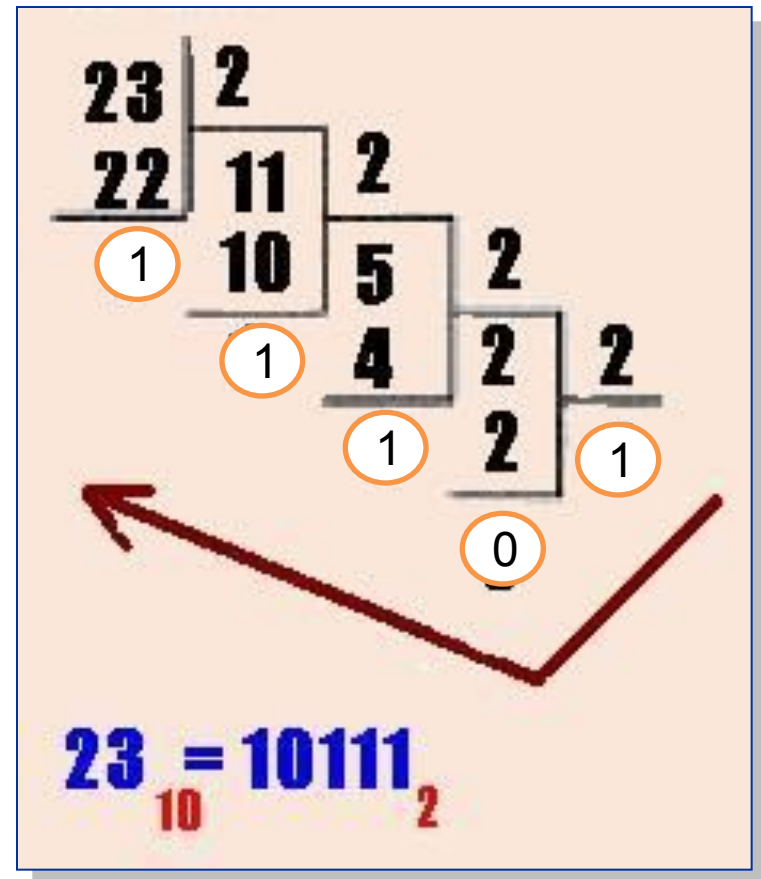
$$\frac{a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + a_2}{2} = a_{n-1} \times 2^{n-4} + \dots + a_3 \text{ (остаток } a_2)$$

...

На n -м шаге получим набор цифр: $a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}$

Перевод целых десятичных чисел в двоичную систему

- 1) **Разделить** целое десятичное число на **2**. Остаток записать и обвести в кружочек.
- 2) Если полученное **частное** ≥ 2 , то надо продолжать делить дальше.
- 3) Двоичный код десятичного числа получают так:
последовательно записывают последнее частное
(самое правое в кружочке)
и затем все остальные остатки (в кружочках) справа налево



Правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления

Компактное оформление

363	181	90	45	22	11	5	2	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1



$$363_{10} = 101101011_2$$

314	157	78	39	19	9	4	2	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1



$$314_{10} = 100111010_2$$

Восьмеричная система счисления

Восьмеричной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием $q = 8$.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Пример: $1063_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 563_{10}$

Для перевода целого восьмеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развёрнутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Для перевода целого десятичного числа в восьмеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 8 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю.

Восьмеричная система счисления

Восьмеричной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием $q = 8$.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0 = a_{n-1} \times 8^{n-1} + a_{n-2} \times 8^{n-2} + \dots + a_0 \times 8^0$$

Пример: $1063_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 563_{10}$

Для перевода целого восьмеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развёрнутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Для перевода целого десятичного числа в восьмеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 8 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю.

Шестнадцатеричная система

СЧИСЛЕНИЯ

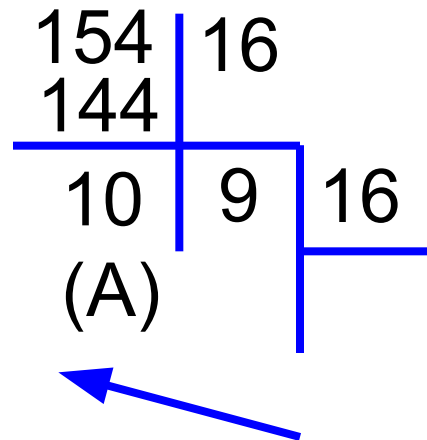
Основание: $q = 16$.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Пример:

$$3AF_{16} = 3 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 768 + 160 + 15 = 943_{10}$$

Переведём десятичное число 154 в шестнадцатеричную систему счисления:



$$154_{10} = 9A_{16}$$

Правило перевода целых десятичных чисел в систему счисления с основанием q

- 1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, равное нулю;
- 2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;
- 3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего полученного остатка.



Таблица соответствия 10-х, 2-х, 8-х и 16-х чисел от 1 до 16

Десятичная система	Двоичная система	Восьмеричная система	Шестнадцатеричная система
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12

Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Арифметика одnorазрядных двоичных чисел



Ôàëë "SWF"

Арифметика многоразрядных двоичных чисел



Ôàëë "SWF"

Умножение и деление двоичных чисел

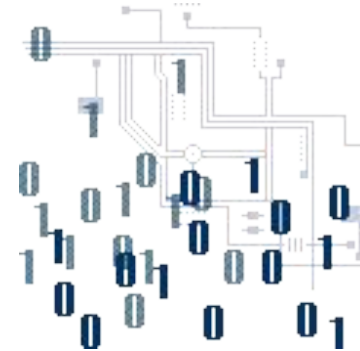


Ôàëë "SWF"

«Компьютерные» СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Двоичная система используется в компьютерной технике, так как:

- двоичные числа представляются в компьютере с помощью простых технических элементов с двумя устойчивыми состояниями;
- представление информации посредством только двух состояний надёжно и помехоустойчиво;
- двоичная арифметика наиболее проста;
- существует математический аппарат, обеспечивающий логические преобразования двоичных данных.



Двоичный код удобен для компьютера.

Человеку неудобно пользоваться длинными и однородными кодами.

Специалисты заменяют двоичные коды на величины в восьмеричной или шестнадцатеричной системах счисления.

Самое главное

Система счисления — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел.

Система счисления называется **позиционной**, если количественный эквивалент цифры в числе зависит от её положения в записи числа.

В позиционной системе счисления с основанием q любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m})$$

Здесь:

A — число;

q — основание системы счисления;

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа;

m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» i -го разряда.



Вопросы и задания

Ци

Задача 1. Переведите число 101101 из десятичной системы счисления в двоичную. Если число не делится на 2, то остаток от деления записывайте в виде 1/2, 1/4, 1/8 и т.д. Например, число 1/2 записывается как 0,5. Ответ: 101101.

Задача 2. Переведите число 127 из десятичной системы счисления в восьмеричную. Ответ: 177.

Задача 3. Переведите число 321 из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную. Ответ: 141.

Задача 4. Переведите число 1435 из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную. Ответ: 57B.

Задача 5. Переведите число 1100101011 из двоичной системы счисления в десятичную. Ответ: 165.


Задача 6. Переведите число 1100101011 из двоичной системы счисления в восьмеричную. Ответ: 147.

Задача 7. Переведите число 1100101011 из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную. Ответ: 63B.

Задача 8. Переведите число 1100101011 из двоичной системы счисления в десятичную. Ответ: 165.

Задача 9. Переведите число 1100101011 из двоичной системы счисления в восьмеричную. Ответ: 147.

Задача 10. Переведите число 1100101011 из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную. Ответ: 63B.

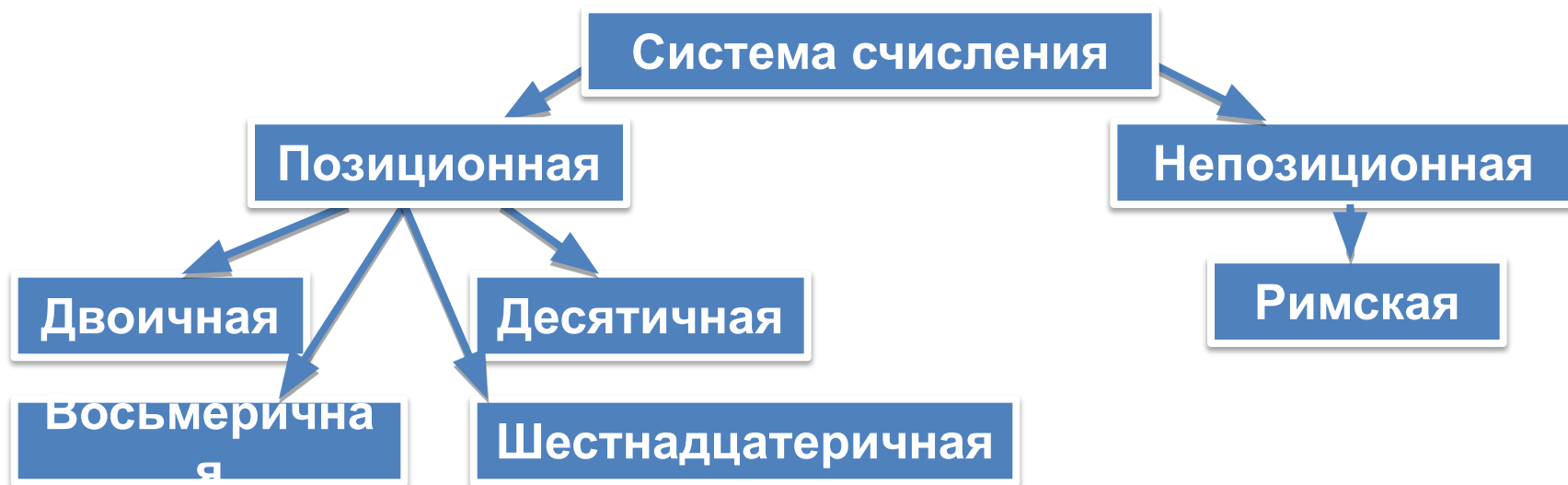
Основание 2	Основание 8	Основание 10	Основание 16
101010			
	127		
		321	
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> Задачник «Системы счисления»  ôàëë "SWF" </div>			

Опорный конспект

Система счисления — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел.

Цифры - знаки, при помощи которых записываются числа.

Алфавит - совокупность цифр системы счисления.



В позиционной системе счисления с основанием q любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m}).$$

Электронные образовательные ресурсы

1. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/caeea6cc-bd1d-4f47-9046-1434ac57e111/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/caeea6cc-bd1d-4f47-9046-1434ac57e111/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Умножение и деление двоичных чисел
2. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/402b749c-240b-4e16-9e4d-bea3fc4fa8fa/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/402b749c-240b-4e16-9e4d-bea3fc4fa8fa/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – История развития систем счисления
3. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/1a264912-eca9-4b45-8d77-c3655b199113/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/1a264912-eca9-4b45-8d77-c3655b199113/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Перевод недесятичных чисел в десятичную систему счисления
4. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/78ba290c-0f7c-4067-aaf4-d72f40f49f3b/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/78ba290c-0f7c-4067-aaf4-d72f40f49f3b/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Перевод десятичных чисел в другие системы счисления
5. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/67cbf74b-f85a-4e9d-88c5-58f203fb90ce/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/67cbf74b-f85a-4e9d-88c5-58f203fb90ce/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Сложение и вычитание многоразрядных двоичных чисел
6. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/8bb7eefa-4ed9-43fe-aebe-4d6ac67bc6ec/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/8bb7eefa-4ed9-43fe-aebe-4d6ac67bc6ec/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Сложение и вычитание одноразрядных двоичных чисел
7. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/fc77f535-0c00-4871-b67c-fa2ecf567d46/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/fc77f535-0c00-4871-b67c-fa2ecf567d46/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Задачник
8. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/a96df437-5ae3-4cab-8c5f-8d4cd78c5775/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/a96df437-5ae3-4cab-8c5f-8d4cd78c5775/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) - Развернутая форма записи числа
9. [http://school-collection.edu.ru/catalog/res/19d0fb95-871d-4063-961d-e7dc5725e555/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid\[\]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66](http://school-collection.edu.ru/catalog/res/19d0fb95-871d-4063-961d-e7dc5725e555/?from=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66&interface=catalog&class=51&subject=19&rub_guid[]=a30a9550-6a62-11da-8cd6-0800200c9a66) – Тренировочный тест