Системы счисления

Системы счисления

Система счисления – способ записи чисел, а также арифметических действий с ними.

Число в математике и информатике - это величина, а не символьная запись.

Цифры – набор символов, участвующих в записи числа.

Алфавит – совокупность различных цифр, используемых для записи чисел.

системы счисления

позиционные

352, 23

величина числа зависит от номера позиции цифры при его записи

непозиционные

VII, XIX

каждой цифре соответствует величина, не зависящая от ее места в записи числа

непозиционные системы счисления

Период палеолита.

10-11 тысяч лет до н.э.

- **Единичная («палочная»)**

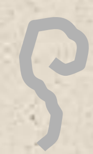
или

см. пример

2,5 тысяч лет до н.э.

- **Древнеегипетская десятичная непозиционная система**

= 3 4 5

 **- единицы**  **- десятки**  **- сотни**

непозиционные системы счисления

2 тысячи лет до н.э.

- **Вавилонская шестидесятеричная**

цифры: и

- единицы - десятки - 60 ; 60^2 ; 60^3 ; … ; 60^n

= 33

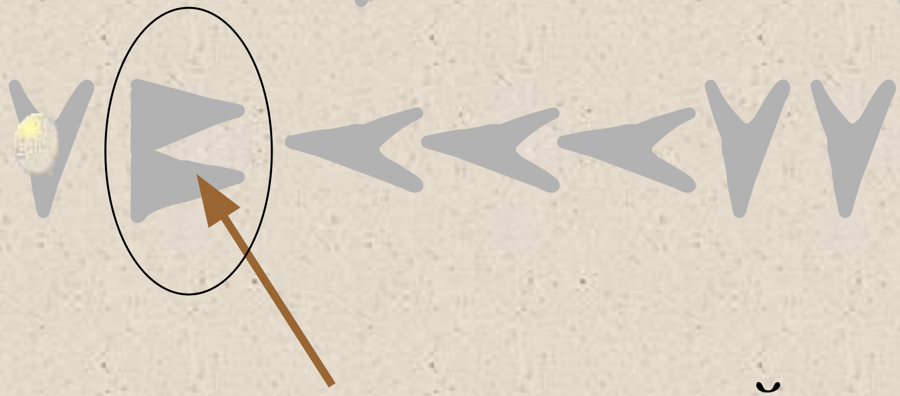
= 60 + 20 + 2 = 82

2-ой разряд

1-ый разряд

пример

= 3



= 3600 + 30 + 2 = 3632

пропущенный шестидесятичный разряд

!

Шестидесятеричная вавилонская система – первая известная нам система счисления, основанная на позиционном принципе.

непозиционные системы счисления

- **Римская система** **500 лет до н.э.**

Цифры:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Число формировалось из цифр, а также с помощью групп:

Группа 1-го вида - несколько одинаковых подряд идущих цифр: XX = 20

Группа 2-го вида - разность значений двух цифр, если слева стоит меньшая:

CM = 1000 – 100 = 900

Величина числа суммируется из значений цифр и групп 1-го или 2-го вида:

$\underbrace{X\,X\,X}\,\underbrace{I\,I} = 32$ $\underbrace{D}\,\underbrace{X\,L}\,\underbrace{I\,I} = 542$

Это римская древняя табличка, написанная 2000 лет назад.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

4 4 4 = C D V

4 4 4 = (D-C)+ (L-X)+ (V-I) + 40 + 4

CD 400

XL 40

IV 4

M C M L X X I V = 1

1000 +

(M-C) = 1000 - 100 = 900 +

50 +

20 +

4

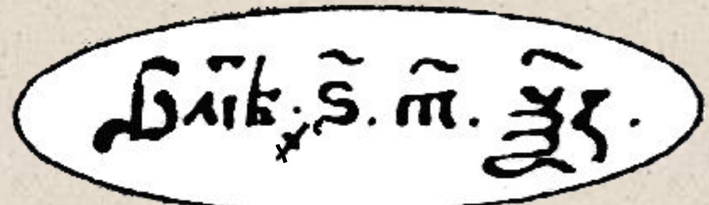
непозиционные системы счисления

- Алфавитные системы

Древняя Русь

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃	і҃

а҃і = 11, в҃і = 12, г҃і = 13, . . ., ѳ҃і = 19, м҃ = 40, т҃а = 301.



«… В год 6367. Варяги из заморья взимали дань…» («Повесть временных лет»)

- тысячи

- тьма: х10 000

а = 10 000

100 000 - легион

1000 000 - леодр

. . .

0^{50} - колода

«более сего несть человеческому уму разумевати»

непозиционные системы счисления

Древняя Русь

«Ученье – свет, а неученье – тьма»

- Какая разница между понятиями «цифра» и «число»?
- Какие следы разных систем счисления сохранились в наше время?

Позиционные системы счисления

Позиционной называют систему счисления, в которой число представляется в виде последовательности цифр, количественное значение которых зависит от места (позиции), которое занимает каждая из них в числе.

1000 (10^3) 100 (10^2) 10 (10^1) 1 (10^0)

4 позиция 3 позиция 2 позиция 1 позиция

1 | 2 | 3 | 5

x 1000 x 100 x 10 x 1

Базис позиционной системы счисления – это последовательность чисел, каждое из которых задает значение цифры «по месту» и «вес» каждого разряда.

Десятичная система: $1, 10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$

Двоичная система: $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$

***P*-ичная система:** $p^{-n}, \ldots, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, \ldots, p^n$

p – основание системы

позиционные системы счисления

- **Традиционные: *P*-ичные**

Базис системы – геометрическая прогрессия с основанием *p*:

$$\ldots, p^{-2}, p^{-1}, p^{0}, p^{1}, p^{2}, p^{3}, p^{4}, p^{5}, \ldots$$

Десятичная система

Пример: 253_{10}

Основание: 10

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Базис: $\ldots, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, \ldots, 10^{n}$

- **Нетрадиционные**

Фибоначчиевая система

Базис: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Алфавит: 0, 1

Пример: $10000100_{ф} = 3 + 34 = 37_{10}$

- По… си… фи… сис… стоя… единицы подряд?

- **Смешанные: *P-Q*-ичные**

Каждая цифра числа, заданного в *Q*-ичной системе, заменяется ее представлением в *P*-ичной системе.

Двоично-десятичная система $35809_{10} = 0011\ 0101\ 1000\ 0000\ 1001_{2\text{-}10}$

позиционные системы счисления

В любой традиционной *Р*-ичной позиционной системе счисления число равно сумме степеней основания:

147,205

$147{,}205_{10} = 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001 =$

$= 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$

$$X_p = a_n \ldots a_1 a_0, b_{-1} \ldots b_{-k} \ldots_P$$

$$X = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0 + b_{-1} P^{-1} + b_{-2} P^{-2} + \ldots + b_{-k} P^{-k} + \ldots$$

!

Арифметические действия над числами во всех Р-ичных системах счисления выполняются одинаково. ($+ \quad - \quad \times \quad \div$)

Двоичная система счисления

0 и 1

p=2 – основание системы; *0, 1* – алфавит

…, ¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16, 32, … – базис

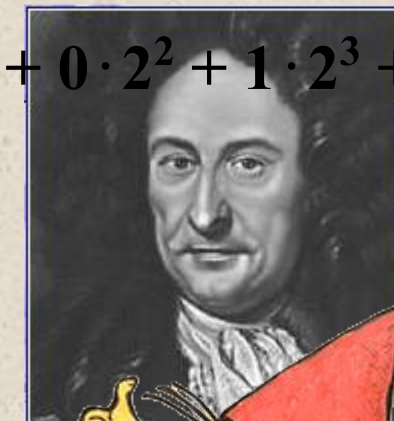
$(\dots, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}, 2^{4}, 2^{5}, \dots)$

Перевод из двоичной системы счисления в десятичную:

$101001_{2} = 1\cdot2^0 + 0\cdot2^1 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^5 = 1 + 8 + 32 = 41_{10}$

$2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1646-1716) немецкий философ, математик, физик, языковед



Лейбниц, изрядное время уделивший двоичной (бинарной) математике, видел в ней «… прообраз творения». Он считал, что «единица представляет божественное начало, а нуль – небытие. Высшее Существо создает все сущее из небытия точно таким же образом, как

задание:

см. слайд

С конца XX века, века компьютеризации, человечество пользуется двоичной системой ежедневно, так как вся информация, обрабатываемая ЭВМ, хранится в них в двоичном виде.

$100101_2 = 1 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^2 + \dots 2^4 + 1\cdot2^5 = 1 + 4 + 32 = 37_{10}$

$101010_2 = 0 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^5 = 2 + 8 + 32 = 42_{10}$

1	2	4	8	16	32	64	128
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7

Двоичная система счисления

0 и 1

2 – **основание системы**

0, 1 – **алфавит**

Перевод из десятичной системы счисления в двоичную:

	остаток
51 : 2 = 25	1
25 : 2 = 12	1
12 : 2 = 6	0
6 : 2 = 3	0
3 : 2 = 1	1

$51_{10} = 110011_2$

	остаток
76 : 2 = 38	0
38 : 2 = 19	0
19 : 2 = 9	1
9 : 2 = 4	1
4 : 2 = 2	0
2 : 2 = 1	0

$76_{10} = \quad _2$

проверка:

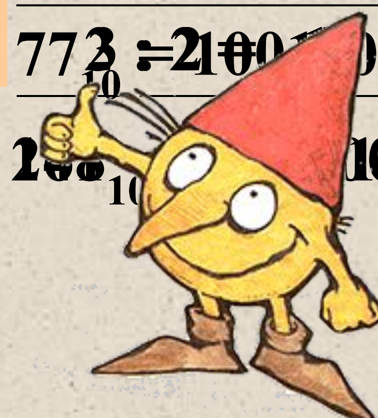
остаток

задание:

$168_{10} = 10101000_2$

$241_{10} = 11110001_2$

$77_{10} = 1001101_2$



Необыкновенная девочка

Ей было тысяча сто лет, (1100)
Она в сто первый класс ходила, (101)
В портфеле по сто книг носила - (100)
Всё это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног, (10)
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
(1) С одним хвостом, зато стоногий. (100)
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами, (10)
И десять загорелых рук (10)
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз (10)
Рассматривали мир привычно…

Но станет всё совсем обычным,
Когда поймете вы рассказ.

Задание 1

Задание 2

Задание 3

Задание 4

Задание 5

Задание 6

Задание 7

Системы счисления

<u>**позиционные**</u>

- **традиционные**

  100010011_2

- **нетрадиционные**

  $10001010_Ф$

- **смешанные**

  $0011\ 0101_{\ 2\text{-}10}$

<u>**непозиционные**</u>

- **единичная**

- **древнеегипетская**

- **вавилонская**

- **римская**

  X X X I I

- **алфавитная**

  колода

задание

Используя римскую систему счисления выпишите числа от 95 до 105

95 = XCV

96 = XCVI

97 = XCVII

98 = XCVIII

99 = XCIX

100 = C

101 = CI

102 = CII

103 = CIII

104 = CIV

105 = CV

задание

- Можно ли любое целое число представить в виде суммы степеней двойки?

Ответ: да.

- Какое максимальное число можно записать в двоичной системе счисления пятью цифрами?

Ответ: $11111_2 = 31_{10}$.

задание

Было 11 яблок. После того как каждое яблоко разрезали пополам, стало 110 половинок.

Возможно ли это? Обоснуйте ответ.

Ответ: да, если считать числа в задаче представленными в двоичной системе счисления:

$$11_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 3_{10};$$

$$110_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 2 + 4 = 6_{10}$$

задание

Определите четное число или нечетное:

а) 101_2
б) 110_2
в) 1001_2
г) 100_2

Сформулируйте критерий четности в двоичной системе.

Ответ: четное число в двоичной системе счисления оканчивается на 0, а нечетное – на 1.

а) $101_2 = 5_{10}$; б) $110_2 = 6_{10}$; в) $1001_2 = 9_{10}$; г) $100_2 = 4_{10}$

задание

Выпишите алфавит и базис традиционной позиционной пятеричной системы счисления.

Пятеричная система счисления

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4

Базис: …, 5^{-2}, 5^{-1}, 1, 5, 5^{2}, 5^{3}, …

задание

Переведите данные десятичные числа в двоичную систему:

10, 20, 100, 200, 1000

$10_{10} = 1010_2$

$20_{10} = 10100_2$

$100_{10} = 1100100_2$

$200_{10} = 11001000_2$

$1000_{10} = 1111101000_2$

задание