

Системы счисления

1. Введение

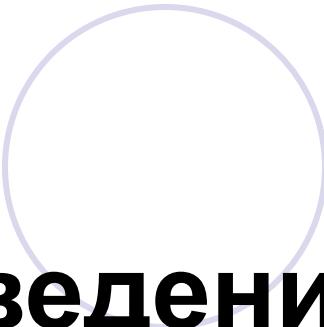
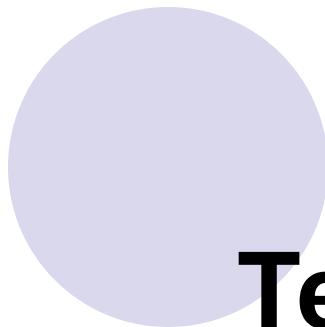
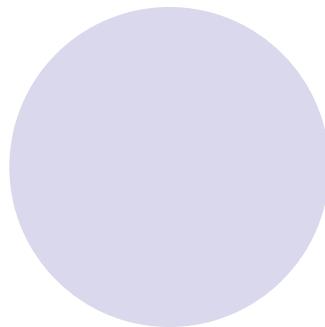
2. Двоичная система

3. Восьмеричная система

4. Шестнадцатеричная система

5. Другие системы счисления

Системы
счёте



Тема 1. Введение

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, ... I, V, X, L, ...

Алфавит – это набор **цифр**. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

Непозиционные системы

Унар – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),
X – 10 (две ладони), **L** – 50,
C – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*),
M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

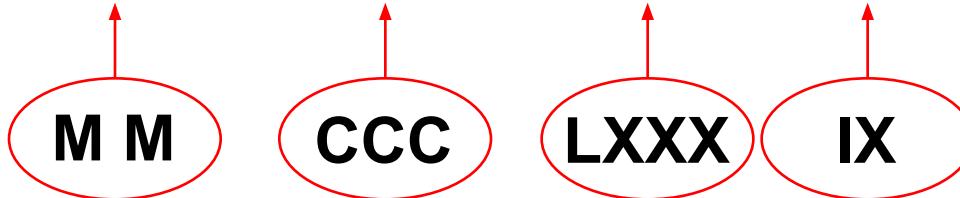
Прав

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (частично непозиционная!)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{MM CCC LXXXIX}$$

Примеры:

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших** чисел (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V, X, L, C, D, M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
CCCLIX + CLXXIV =?

Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «**Пираты XX века**»
- циферблат часов



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

а	в	г	д	е	з	з	и	ј
аз	вёди	глаголь	добро	есть	зело	земля	иже	фита
1	2	3	4	5	6	7	8	9

и	к	л	м	н	о	п	ч	
и	како	люди	мыслёте	наш	иси	ом	покой	
10	20	30	40	50	60	70	80	90

р	с	т	у	ф	х	п	ш	ц
рцы	слово	твёрдо	ук	Ферт	хер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): 10

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{сотни} & \text{десятки} & \text{единицы} & & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \\ 2 & 1 & 0 & & & & \text{разряды} \\ \swarrow & \downarrow & \searrow & & & & \\ 3 & 7 & 8 & = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + & & & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow & & & & \\ 300 & 70 & 8 & 8 \cdot 10^0 & & & \end{array}$$

Другие позиционные системы:

- **двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

Системы
счи-
тывания

Тема 2. Двоичная система
счисления

Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

$10 \rightarrow 2$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 18 \end{array} \Big| \begin{array}{r} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

Diagram illustrating the conversion of the decimal number 19 to binary. The quotient 19 is divided by 2, with remainders 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1 written below the line. An arrow points from the right towards the quotient, labeled "2 → 10".

$$19 = 10011_2$$

система
счисления

$2 \rightarrow 10$

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Примеры:

131 =

79 =

Примеры:

$$101011_2 =$$

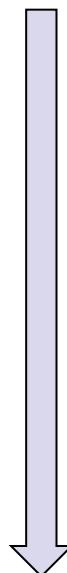
$$110110_2 =$$



Когда двоичное число четное? делится на 8?

Перевод дробных чисел

$10 \rightarrow 2$



$$\begin{array}{r} 0,375 = \\ \times \quad 2 \\ \hline 0,750 \\ 0,75 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1,50 \\ 0,5 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1,0 \end{array}$$

$$0,7 =$$

$$\begin{aligned} 0,7 &= 0,101100110\dots \\ &= 0,1(0110)_2 \end{aligned}$$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется бесконечное число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

$2 \rightarrow 10$

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

$$\begin{aligned} 101,011_2 &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375 \end{aligned}$$

Примеры:

0,625 =

3,875 =

Арифметические операции

сложение

вычитание

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=\mathbf{10}_2$$

$$1 + 1 + 1 = \mathbf{11}_2$$

перенос

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad \mathbf{10}_2 - 1 = 1$$

заем

$$\begin{array}{r} 00001 \\ + 111011 \\ \hline 101110_2 \\ 010011 \\ \hline 1010001 \\ 010011 \\ \hline \end{array} \quad 2$$

$$\begin{array}{r} 01110_2 \\ - 100101_2 \\ \hline 010101 \\ 11011 \\ \hline 010101 \\ 10101 \\ \hline \end{array} \quad 16 \quad 2$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101 \\ + 11111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111 \\ + 101110 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011 \\ + 11011 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011 \\ + 10011 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101 \\ - 11111 \\ \hline \end{array}_2$$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ - 110101 \\ \hline \end{array}_2$$

Арифметические операции

умножение

деление

$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ \times 10 \\ \hline 1_210101_2 \\ + 10101_2 \\ \hline 1101001_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ - 111_2 \\ \hline 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 111_2 \\ \hline 11 \\ 2 \end{array}$$

Плюсы и минусы двоичной системы



- нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагнчен — не намагнчен и т.п.);
- **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
- выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.



- простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
- двоичные числа имеют **много разрядов**;
- запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.



Двоично-десятичная система

BCD (Binary coded decimals) (десятичные цифры в двоичном коде)

10 → BCD

$$9024,19 = 1001 \text{ 0000 } 0010 \text{ 0100, } 0001 \text{ 1001}_{\text{BCD}}$$

9 0 2 4 , 1 9

BCD → 10

$$1 \text{ 0101 } 0011, \text{ 0111 } 1_{\text{BCD}} =$$
$$0001 \text{ 0101 } 0011, \text{ 0111 } 1000_{\text{BCD}} = 153,78$$



Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101,1_{\text{BCD}} = 15,8$$

$$10101,1_2 = 16 + 4 + 1 + 0,5 = 21,5$$

Системы
счисления

Тема 3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

A diagram showing the division of 100 by 8 to find the quotient 12 and remainder 4. This quotient 12 is then divided by 8 to get a quotient of 1 and a remainder of 4. Finally, 4 is divided by 8 to get a quotient of 0 and a remainder of 4. The remainders 4, 4, and 1 are highlighted in yellow boxes.

$$\begin{array}{r} 100 \\ 96 \end{array} \Big| \begin{array}{r} 8 \\ 12 \\ 8 \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

100 = 144₈

система
счисления

8 → 10

2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 144_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 4 = 100_{23} \end{aligned}$$

Примеры:

134 =

75 =

$134_8 =$

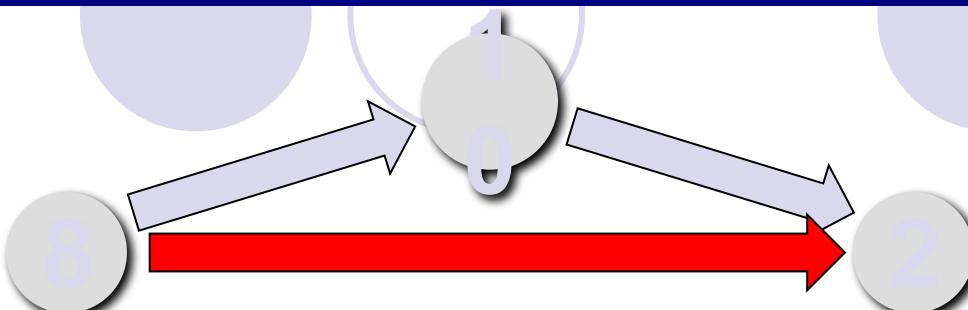
$75_8 =$

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$$8 = 2^3$$



Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$

Примеры:

$$3467_8 =$$

$$\cancel{2148}_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

001 001 011 101 111₂

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

001 001 011 101 111₂

1	1	3	5	7
---	---	---	---	---

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

101101010010₂ =

11111101011₂ =

1101011010₂ =

Арифметические операции

сложение

1 в перенос

$$\begin{array}{r} 156 \\ + 662 \\ \hline 1040 \end{array}$$

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

вычитание

заем

$$\begin{array}{r} 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157_8 \end{array}$$

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы
счисления

Тема 4. Шестнадцатеричная системы счисления

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

10 11 12 13 14 15

10 → 16

A division algorithm diagram for base 16 conversion of 107. The dividend is 107, the divisor is 16, and the quotient is 6 with a remainder of 11. The quotient 6 is highlighted in yellow, and the remainder 11 is highlighted in red. An arrow points from the quotient 6 to a yellow box labeled 'B'. Another arrow points from the remainder 11 to a red box labeled '11'.

$$\begin{array}{r} 107 \\ 96 \end{array} \Big| \begin{array}{r} 16 \\ 6 \\ 0 \end{array}$$

107 = 6B₁₆

система
счисления

16 → 10

разряды

$$\begin{aligned} 1C5_{16} &= 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + \\ &\quad 5 \cdot 16^0 \\ &= 256 + 192 + 5 = 453 \end{aligned}$$

Примеры:

$$171 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$206 =$$

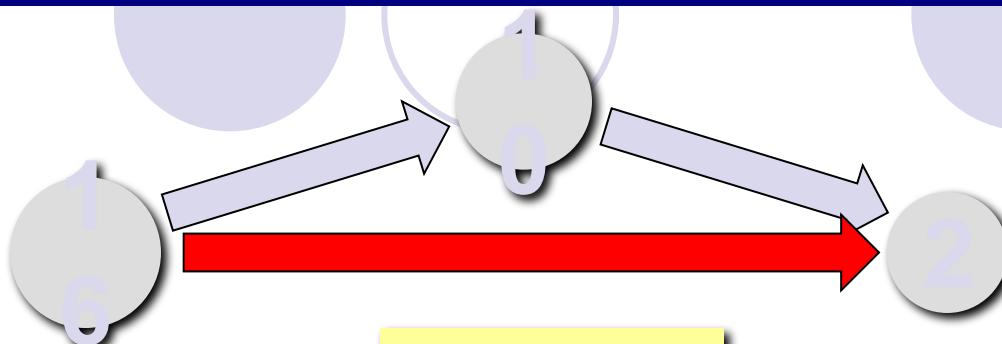
$$22B_{16} =$$

Таблица шестнадцатеричных чисел

X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

X_{10}	X_{16}	X_2
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

$$16 = 2^4$$



Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \quad \underbrace{1111}_F \quad \underbrace{0001}_1 \quad \underbrace{1010}_2 A$$

Примеры:

C73B₁₆ =

2FE1₁₆ =

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$
1 2 E F²

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

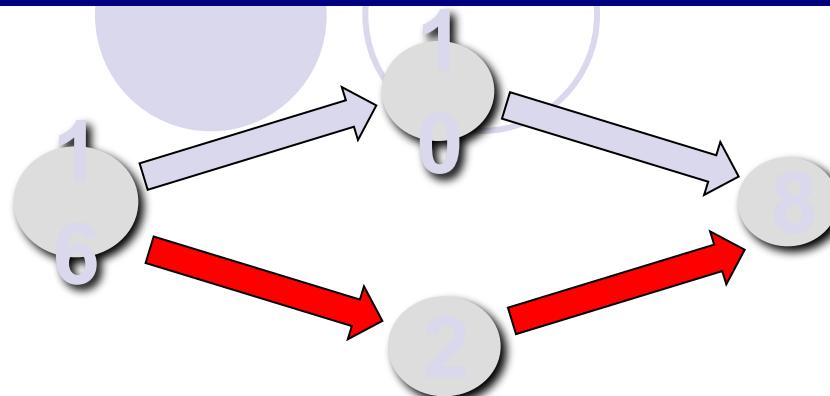
Примеры:

1010101101010110₂ =

11110011011110101₂ =

110110110101111110₂ =

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$\textcolor{red}{011}\ \textcolor{blue}{110}\ 111\ \textcolor{blue}{101}\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} A 5 B \\ + C 7 E \\ \hline 1 6 D 9 \end{array}_{16}$$

$$\begin{array}{r} 10 5 11 \\ + 12 7 14 \\ \hline 1 6 \textcolor{red}{13} 9 \end{array}$$

1 в перенос

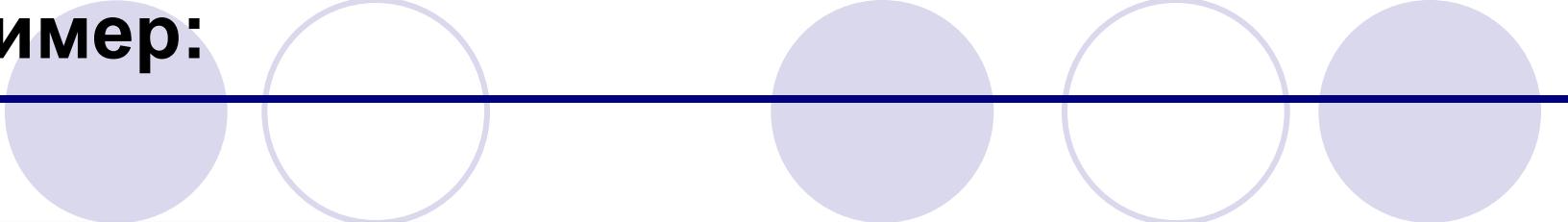
$$11+14=25=\textcolor{blue}{16}+9$$

$$5+7+\textcolor{blue}{1}=\textcolor{red}{13}=D_{16}$$

1 в перенос

$$10+12=22=\textcolor{blue}{16}+6$$

Пример:


$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

вычитание

заем

$$\begin{array}{r} \text{C} \ 5 \ \text{B}_{16} \\ - \ \text{A} \ 7 \ \text{E}_{16} \\ \hline 1 \ \text{D} \ \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcolor{red}{12} \ 5 \ 11 \\ - \textcolor{red}{10} \ 7 \ 14 \\ \hline 1 \ \textcolor{red}{13} \ 13 \end{array}$$

заем

$$(11 + \textcolor{blue}{16}) - 14 = \textcolor{red}{13} = \text{D}_{16}$$

$$(5 - \textcolor{red}{1}) + \textcolor{blue}{16} - 7 = \textcolor{red}{13} = \text{D}_{16}$$

$$(12 - \textcolor{red}{1}) - 10 = 1$$

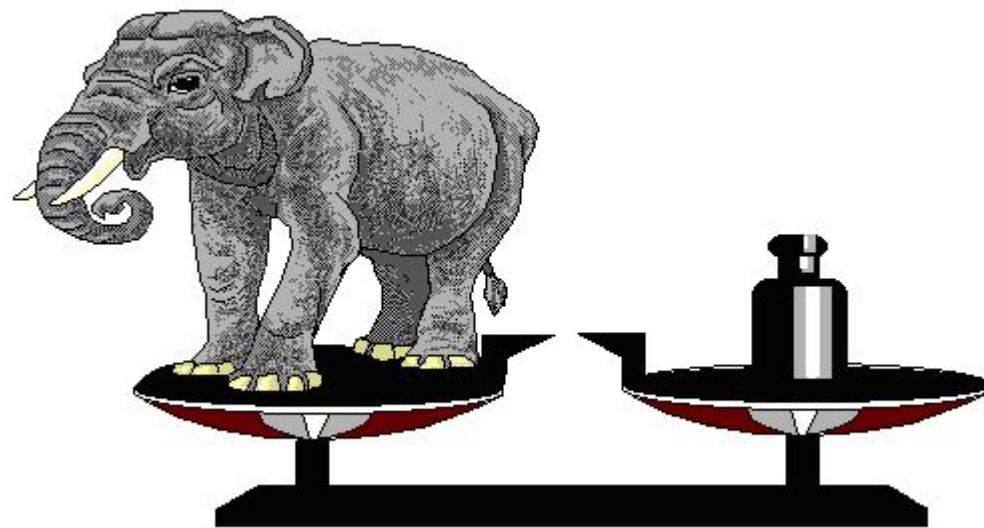
Пример:

$$\begin{array}{r} 1BA_{16} \\ - A59_{16} \\ \hline \end{array}$$

Системы
счисления

Тема 5. Другие системы счисления

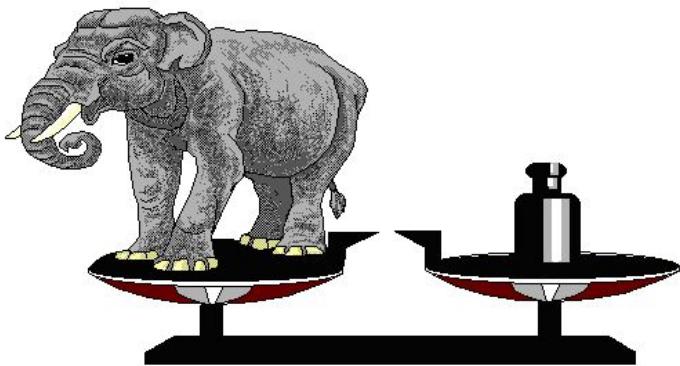
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гири можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



- + 1 гиря справа
- 0 гиря снята
- 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

$$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \text{3ур} \end{array} = 40$$

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Бруsenцов (1958)

50 промышленных образцов



Троичная система!

Конец фильма
