

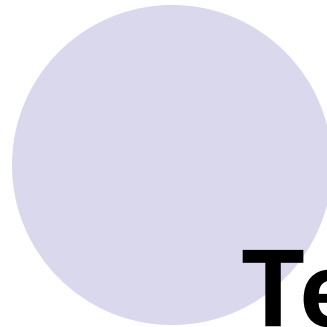
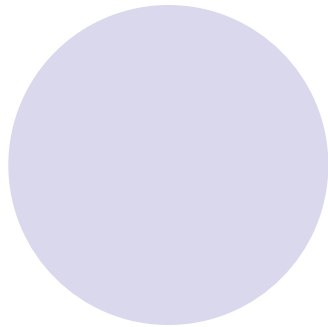
Системы

счисления

1. **Введение**
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

Системы

счисления



Тема 1. Введение

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, ... I, V, X, L, ...

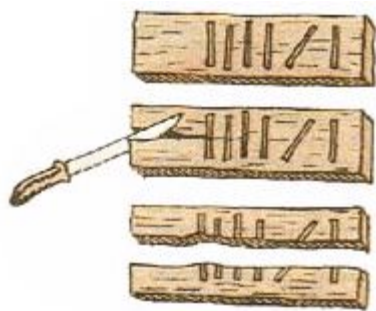
Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

Непозиционные системы

Унар – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),
X – 10 (две ладони), **L** – 50,
C – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*),
M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

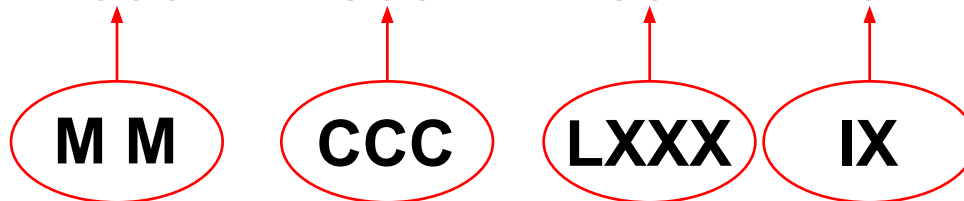
Правила

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$

Примеры:


$$3768 =$$

$$2983 =$$

$$1452 =$$

$$1999 =$$

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
СССLIX + CLXXIV =?

Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «**Пираты XX века**»
- циферблат часов



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

Ѧ
аз
1

Ѣ
вѣди
2

Ѧ
глаголь
3

Ѧ
добро
4

Ѧ
есть
5

Ѧ
зелѣ
6

Ѧ
земля
7

Ѧ
иже
8

Ѧ
фита
9

Ѧ
и
10

Ѧ
како
20

Ѧ
люди
30

Ѧ
мыслѣте
40

Ѧ
наш
50

Ѧ
кси
60

Ѧ
ом
70

Ѧ
покой
80

Ѧ
червь
90

Ѧ
рцы
100

Ѧ
слово
200

Ѧ
твёрдо
300

Ѧ
ук
400

Ѧ
ферт
500

Ѧ
хер
600

Ѧ
пси
700

Ѧ
о
800

Ѧ
цы
900

Позиционные системы

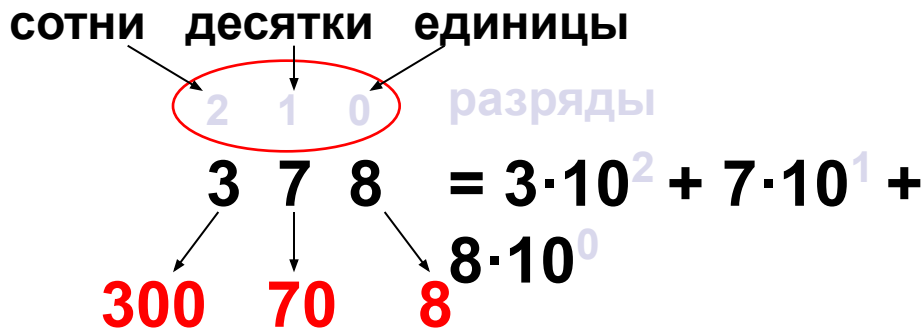
Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах
изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): **10**



Другие позиционные системы:

- **двоичная**, восьмеричная, **шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

Системы

счисления

**Тема 2. Двоичная система
счисления**

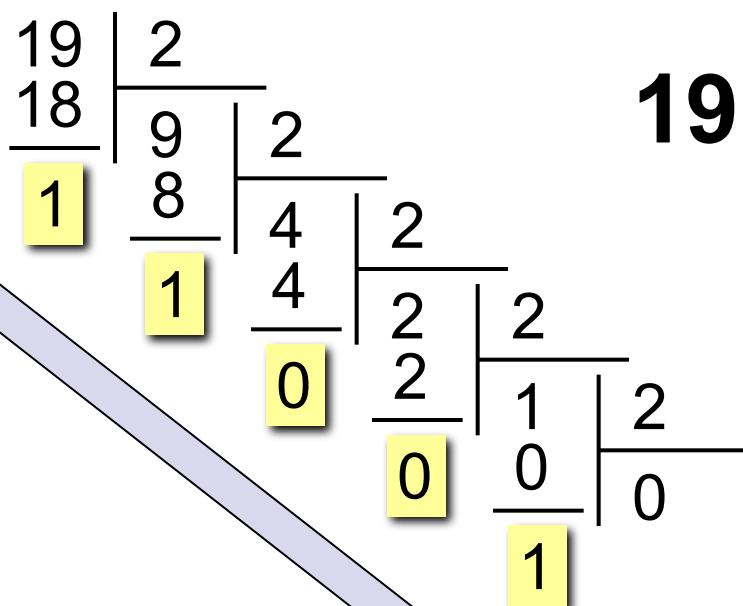
Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Примеры:


$$131 =$$

$$79 =$$

Примеры:


$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$



Когда двоичное число четное? делится на 8?

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0,375 = 0,011_2$$

$$\times 2$$

$$0,750$$

$$0,75$$

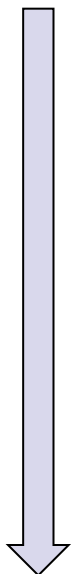
$$\times 2$$

$$1,50$$

$$0,5$$

$$\times 2$$

$$1,0$$



$$0,7 =$$

$$0,7 = 0,101100110\dots$$

$$= 0,1(0110)_2$$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101,011_2$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

Примеры:

 $0,625 =$

$3,875 =$

Арифметические операции

СЛОЖЕНИЕ

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 11_2$$

перенос

ВЫЧИТАНИЕ

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad 10_2-1=1$$

заем

$$\begin{array}{r}
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 10110_2 \\
 + 111011_2 \\
 \hline
 1010001_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \cdot \quad \cdot \\
 01110_2 \quad 010_2 \\
 \cancel{1000101}_2 \\
 - \quad 11011_2 \\
 \hline
 0101010_2
 \end{array}$$

16

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции



умножение

деление

$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ \times 10 \\ \hline 1_210101_2 \\ + 10101_2 \\ \hline 1101001_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10101_2 \big| 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Плюсы и минусы двоичной системы

-  нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
 - **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
 - выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.
-
-  простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
 - двоичные числа имеют **много разрядов**;
 - запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.



Двоично-десятичная система

BCD *Binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

10 → BCD

$$9024,19 = 1001 \mathbf{0000} 0010 \mathbf{0100}, 0001 \mathbf{1001}_{\text{BCD}}$$

9 0 2 4 , 1 9

BCD → 10

$$1 \ 0101 \ 0011, \ 0111 \ 1_{\text{BCD}} =$$
$$\mathbf{0001 \ 0101 \ 0011, \ 0111 \ 1000}_{\text{BCD}} = \mathbf{153,78}$$



Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101,1_{\text{BCD}} = \mathbf{15,8}$$
$$10101,1_2 = 16 + 4 + 1 + 0,5 = \mathbf{21,5}$$

21

Системы

счисления

Тема 3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

$$\begin{array}{r|l} 100 & 8 \\ \hline 96 & 12 \\ \hline 4 & 8 \\ & 1 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 1 \end{array}$$

$$100 = 144_8$$

система
счисления

8 → 10

2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 144_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 4 = 100_{10} \end{aligned}$$

Примеры:


$$134 =$$


$$75 =$$

$$134_8 =$$

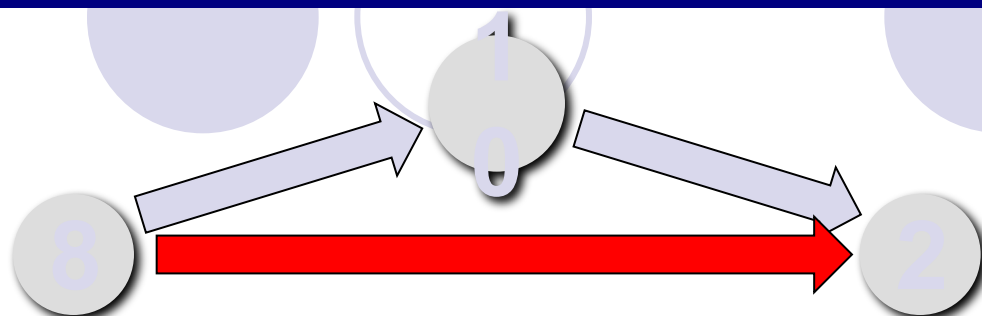
$$75_8 =$$

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



$$8 = 2^3$$

- трудоемко
- 2 действия



Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$

Примеры:


$$3467_8 =$$

$$21\cancel{4}8_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$
 $1\ 1\ 3\ 5\ 7$

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:



$$101101010010_2 =$$

$$11111101011_2 =$$

$$1101011010_2 =$$

Арифметические операции

сложение

1 в перенос

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0 \quad \text{1 в перенос}$$

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

заем

$$\begin{array}{r} 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157_8 \end{array}$$

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы

счисления

Тема 4. Шестнадцатеричная системы счисления

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**
10 11 12 13 14 15

10 → 16

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \hline 96 & 6 \\ \hline & 0 \\ \hline & 0 \end{array}$$

← **B** **11**
6

$$107 = 6B_{16}$$

система
счисления

16 → 10

2 1 0 разряды

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

Примеры:

$$171 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$206 =$$

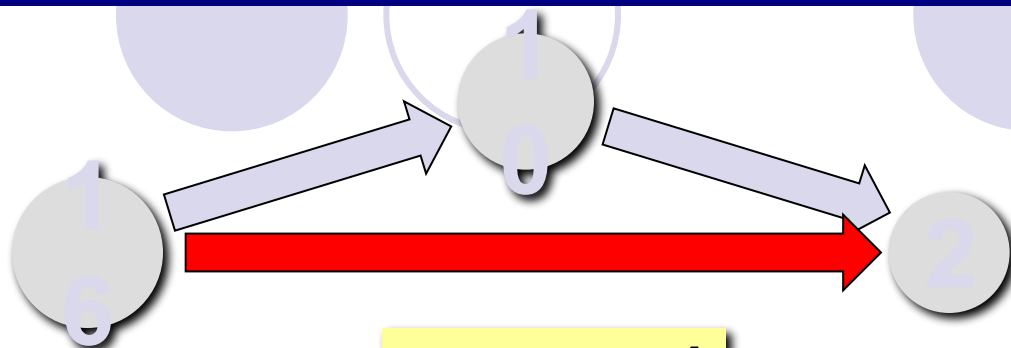
$$22B_{16} =$$

Таблица шестнадцатеричных чисел

X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

X_{10}	X_{16}	X_2
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

$$16 = 2^4$$



Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_F \underbrace{0001}_1 \underbrace{1010}_A_2$$

Примеры:



$$C73B_{16} =$$

$$2FE1_{16} =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

Примеры:

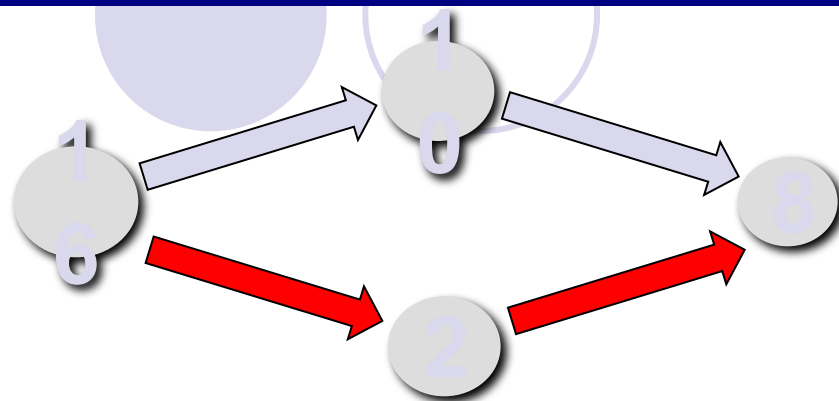
A horizontal blue line spans the width of the slide. Above the line, there are four circles: a solid purple circle, an empty white circle with a purple outline, a solid purple circle, an empty white circle with a purple outline, and a solid purple circle.

$$1010101101010110_2 =$$

$$111100110111110101_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

Перевод в восьмеричную и обратно



трудоемко

Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

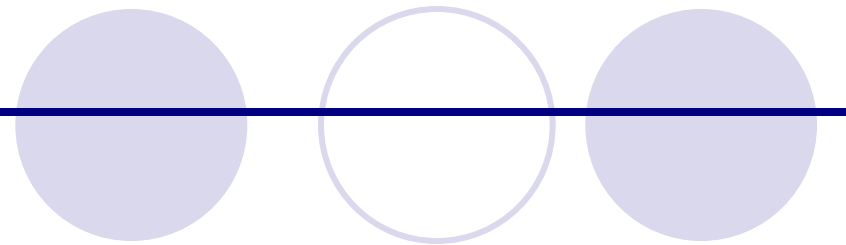
$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

$$A35_{16} =$$



$$765_8 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 D } 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13} \text{ 9} \end{array}$$

1 в перенос

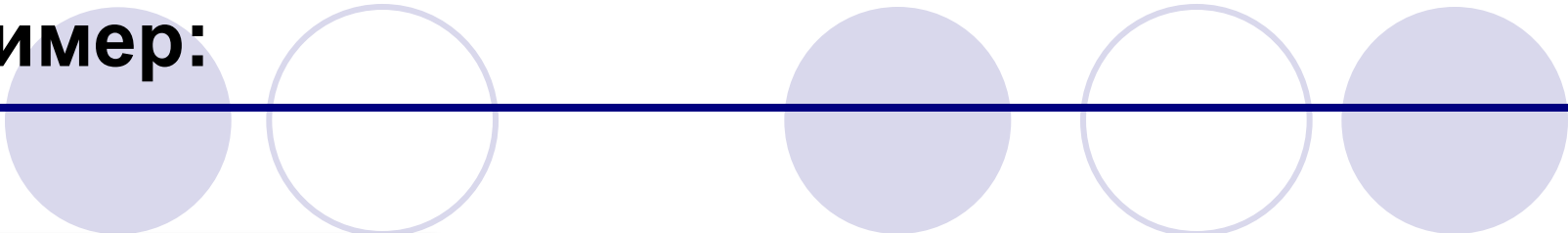
$$11 + 14 = 25 = 16 + 9$$

$$5 + 7 + 1 = 13 = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = 16 + 6$$

Пример:


$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

заем

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \ 5 \ 11 \\ - 10 \ 7 \ 14 \\ \hline 1 \ 13 \ 13 \end{array}$$

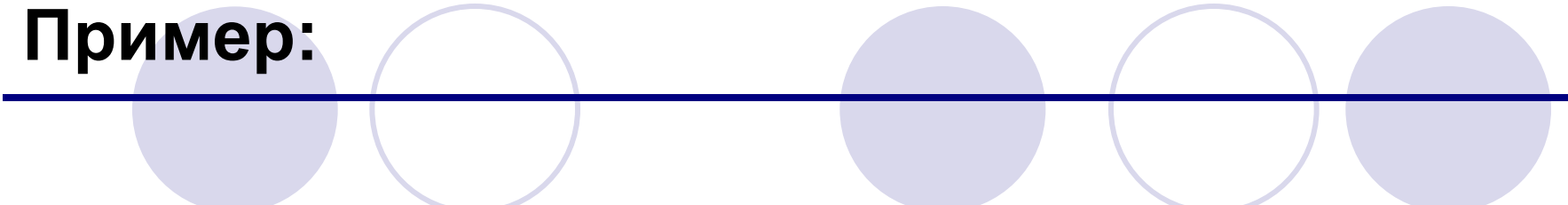
заем

$$(11 + 16) - 14 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(5 - 1) + 16 - 7 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(12 - 1) - 10 = 1$$

Пример:

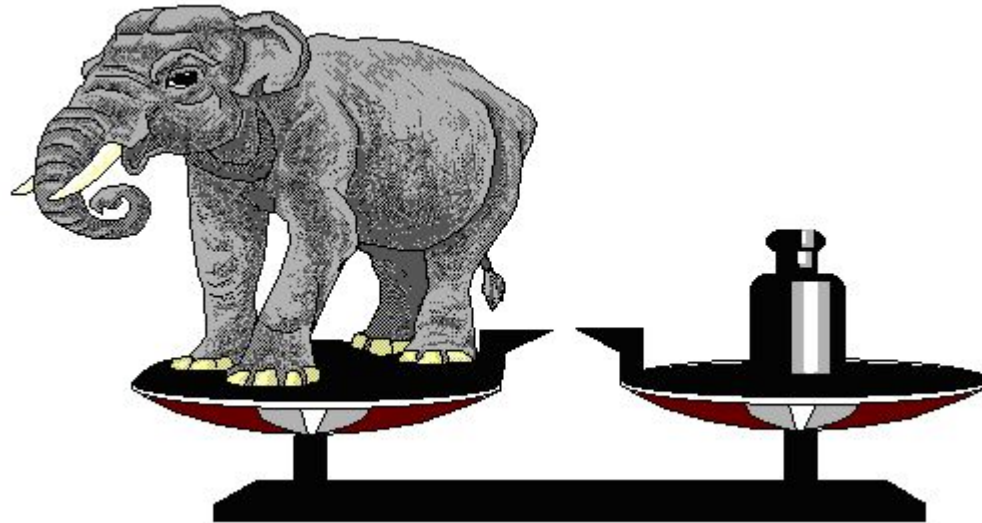

$$\begin{array}{r} 1 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

The background features a decorative arrangement of circles. There are two solid light purple circles in the upper right quadrant, one solid light purple circle in the lower left, and one hollow light purple circle in the lower right. The text 'Системы счисления' is overlaid on these circles in a light purple, sans-serif font.

Тема 5. Другие системы счисления

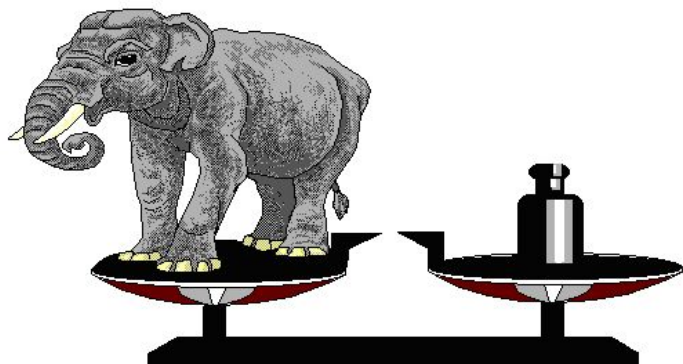
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гирь можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа
0 гиря снята
- 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$

1 1 1 1_{3ур} = 40

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов

! Троичная система!

Конец фильма

